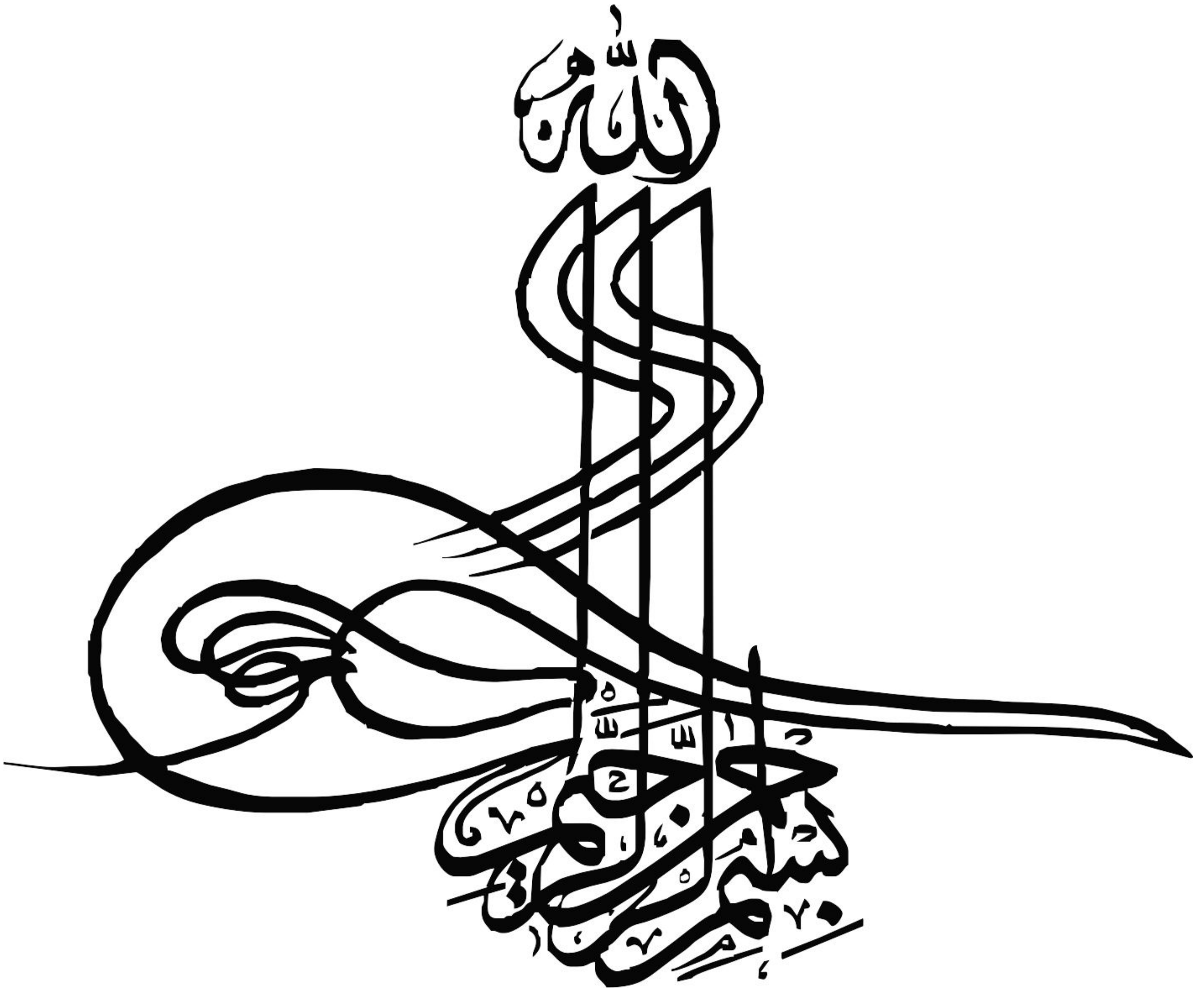

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

نگاشت‌های باز بین فضاهای شیفت

از:

ندا میرزائی چلکی

استاد راهنما:

دکتر داود احمدی دستجردی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

اسطوره‌های عشق و زندگی

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

از دست و زبان که براید   کز عهده‌ی شکرش به در آید

منت خدای را عزوجل، که طاعتش موجب قربت است و شکر اندرش مزید نعمت.

حمد و سپاس بی‌پایان خداوند متعال را که سختی‌های تحصیل علم را در تمام مقاطع تحصیل بر من هموار نمود و در لحظه لحظه‌ی زندگیم مرا به حال خود وا نگذاشت.

اینک که با استعانت و یاری پروردگار متعال نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است برخود لازم می‌دانم که از زحمات بی دریغ اساتید و عزیزانی که هر یک به نوعی در تدوین این رساله مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم.

از زحمات اساتید محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه گیلان بالاخص از زحمات بی‌دریغ و دلسوزانه‌ی استاد راهنمای عزیز و بزرگوارم جناب آقای دکتر داود احمدی دستجردی تشکر و قدردانی می‌کنم که در طول این مدت با صبر و شکیبایی و راهنمایی‌های به‌جای خود مرا در پیشبرد کار یاری رساندند و با حمایت‌های ایشان سختی کار برایم لذت‌بخش بود. برایشان از خدای منان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون دارم.

از جناب آقای دکتر عباس سهله که به‌عنوان نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی در جلسه‌ی دفاعیه حضور داشتند و هم‌چنین، از جناب آقای دکتر اسماعیل عزیزپور و سرکار خانم دکتر ساناز لامعی که قبول زحمت نمودند و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، تشکر می‌نمایم.

از مدیر محترم گروه ریاضی، جناب آقای دکتر فرهاد درستکار به خاطر تمامی همکاری‌هایشان بی‌نهایت سپاسگزارم.

از پدر و مادر مهربانم که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی سیمایشان سرمایه‌های جاودانی زندگیم است. آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت و برای به سرانجام رسیدنم از جوانی‌شان گذشتند، سپاسگزارم و آرزو می‌کنم همیشه وجودشان هم‌چون چتری سایه‌بان زندگیم باشد. از خواهر و برادران عزیزم که همیشه مرا مورد حمایت‌شان قرار دادند و مشوقم بودند، سپاسگزارم.

از دوستان خوبم سرکار خانم سمیه جنگجو که در لحظه به لحظه‌ی کارهای پایان‌نامه مرا همراهی کردند و سرکار خانم المیرا شیرازی که در تایپ پایان‌نامه صمیمانه مرا یاری نمودند، سپاسگزارم و برایشان آرزوی موفقیت دارم. هم‌چنین، از تمام دوستان خوبم که بی‌منت مرا یاری نمودند و لحظات خوب و شادی را برایم آفریدند بالاخص دوستان عزیزم مرضیه عسگری و الهام رادمقدم به خاطر همراهی خواهرانه‌یشان در دوران تحصیل تشکر می‌کنم.

در پایان از آنان که در راه اعتلای علمی ایران از هیچ کوششی دریغ نمی‌ورزند، تشکر و قدردانی می‌نمایم و از خداوند بزرگ برایشان سلامتی و توفیق روز افزون را خواستارم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

چکیده:

نگاشت‌های باز بین فضاهای شیفت

ندا میرزائی چلکی

در این پایان‌نامه، هدف این است که نشان دهیم در یک کد از یک فضای شیفت به یک فضای شیفت سافیک تحویل‌ناپذیر، هر دو از سه شرط باز ، ثابت به یک و بسته (راست یا چپ) سومی را نتیجه می‌دهد. اگر برد سافیک نباشد، شرط از دو طرف بسته به‌جای شرط بسته در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین، ویژگی‌هایی از نگاشت‌های باز بین فضاهای شیفت را بررسی می‌کنیم. به خصوص، نشان می‌دهیم که یک توسیع باز و بسته (یا ثابت به یک)، ساختار یک شیفت سافیک را حفظ می‌کند.

کلید واژه:

شیفت سافیک، شیفت از نوع متناهی، باز، ثابت به یک، از دو طرف بسته.

Abstract:

OPEN MAPS BETWEEN SHIFT SPACES

Neda Mirzaee Chalaki

In this dissertation, we aim to show that in a code from a shift space to an irreducible sofic shift, any two of the following three conditions – open, constant-to-one, (right or left) closing – imply the third. If the range is not sofic, then the same result holds when bi-closing is replaced by closing. Properties of open mappings between shift spaces are investigated in detail. In particular, we show that a closing open (or constant-to-one) extension preserves the structure of a sofic shift.

Key words:
sofic shift, shift of finite type, open, constant-to-one, bi-closing.

پیشگفتار:

دینامیک سمبولیک، بخشی از سیستم‌های دینامیکی است که رشد سریع‌تری نسبت به سایر بخش‌ها داشته و علاوه بر این‌که یکی از روش‌های اصلی برای بررسی سیستم‌های دینامیکی است ابزار مفیدی در نظریه‌ی کدگذاری محسوب می شود. در حالات ایده‌آل، حرکت سیارات یا مولکول‌های گاز را می‌توان توسط چنین سیستمی مدل‌سازی کرد. برای ساده‌تر کردن مطالعه‌ی چنین حرکاتی زمان پیوسته‌ی آن‌ها را به زمان گسسته تبدیل می‌کنند. جهت تحقق این امر، حالات سیستم را فقط در زمان‌های مشخصی در نظر می‌گیرند.

در دینامیک سمبولیک، باز بودن یک کد اولین بار در [۷] مورد بررسی قرار گرفت. هدلاند[۱] نشان داد که یک اندومورفیسم[۲] از یک شیفت کامل، باز است اگر و تنها اگر ثابت به یک باشد. در [۱۴]، ناسو[۳] این نتیجه را به کدهای متناهی به یک بین شیفت‌های از نوع متناهی تحویل‌ناپذیر تعمیم داد و نشان داد که در این رده، دو شرط فوق با شرط از دو طرف بسته بودن معادل هستند. در حالت سافیک وضعیت متفاوت است و هر یک از این سه شرط به تنهایی، دو شرط دیگر را ایجاب نمی‌کند. تاکنون، ساختار کدهای باز بین شیفت‌های سافیک به طور دقیق بررسی نشده است. در این پایان‌نامه، ابتدا خصوصیات چنین کدهایی را مورد مطالعه قرار داده و سپس نتیجه‌ی ناسو را به رده‌ی شیفت‌های سافیک تعمیم می‌دهیم.

در اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰، بلنچارد[۴] و هنسل[۵] ثابت کردند که یک توسیع ثابت به یک سافیک تحویل‌ناپذیر از یک شیفت از نوع متناهی تحویل‌ناپذیر، از نوع متناهی است [۳]. اگر فرض سافیک یا تحویل‌ناپذیری توسیع حذف شود، آن‌گاه این حکم برقرار نیست [۶]. ما نشان می‌دهیم که با قرار دادن فرض بسته بودن، حکم فوق بدون فرض سافیک یا تحویل‌ناپذیری توسیع برقرار است. هم‌چنین، نتیجه‌ی مشابهی را برای کدهای باز و از راست بسته ارائه می‌کنیم.

ابتدا در فصل اول، مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز داریم را ارائه می‌دهیم. در فصل دوم، ویژگی‌هایی از کدهای باز مطرح می‌شود. هم‌چنین ساختار ضرب فیبری بیان شده و نشان می‌دهیم که این ضرب، باز بودن کدها را حفظ می‌کند. سپس، برخی روابط بین کدهای باز، ثابت به یک و از دو طرف بسته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم، قضیه‌ی توسیع ثابت به یک ناسو در شیفت‌های از نوع متناهی را به رده‌ی شیفت‌های سافیک تعمیم می‌دهیم. در فصل چهارم، ابتدا نتیجه‌ی معروف ناسو در خصوص ارتباط بین

[۱]Hedlund [۲]endomorphism [۳]Nasu [۴]Blanchard [۵]Hansel

کدهای باز، ثابت به یک و بسته در شیفت‌های از نوع متناهی را به شیفت‌های سافیک تعمیم می‌دهیم. در ادامه، برقراری این نتیجه را در فضاهای شیفت کلی بررسی می‌کنیم. هم‌چنین، نشان می‌دهیم که توسیع‌های باز (یا ثابت به یک) از راست بسته، ساختار فضاهای شیفت (از نوع متناهی، سافیک و...) را حفظ می‌کنند.

این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۸] به نگارش درآمده است.

فصل ۱
پیش نیاز

۱-۱ تعاریف مقدماتی

در این فصل، تعاریف سیستم‌های دینامیکی و قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعد، از مراجع [۱]، [۸] و [۱۳] انتخاب شده است.

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از تعداد متناهی یا شمارا سمبول (نماد) که حروف یا الفبا نامیده می‌شوند باشد. دنباله‌ای متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ را یک *کلمه* یا *بلوک* می‌نامیم. طول کلمه تعداد سمبول‌هایی است که آن کلمه دارا می‌باشد.

در این پایان‌نامه حالت متناهی بررسی شده است. برای مطالعه‌ی حالت نامتناهی به [۲] و [۱۰] مراجعه شود.

تعریف ۱-۱-۲. مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ را در نظر می‌گیریم. $\mathcal{A}$–*شیفت کامل*[۱] مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های از دو طرف نامتناهی از اعضای $\mathcal{A}$ است که به‌صورت

$$\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{\{n_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : n_i \in \mathcal{A},\ \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

نمایش داده می‌شود. اگر $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, r-1\}$، آن‌گاه Σ را r–شیفت کامل می‌نامیم و توسط $X_{[r]}$ نمایش می‌دهیم.

در این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

نگاشت $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ را به‌صورت $\sigma(\{n_i\})_{i\in\mathbb{Z}} = \{n_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ تعریف می‌کنیم و آن را *نگاشت شیفت* می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۳. یک سیستم سمبولیک شامل فضای Σ به همراه تابع شیفت است.

تعریف ۱-۱-۴. به هر دو دنباله‌ی $x = \{m_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ و $y = \{n_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ از فضای Σ عدد $N(x, y)$ را نسبت می‌دهیم که به‌صورت $N(x, y) = \min\{|i| : m_i \neq n_i\}$ تعریف می‌شود. یعنی $N(x, y)$ اولین مختصی است که دو دنباله با یکدیگر متفاوت هستند و متر فضا را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{N(x,y)}}, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

با این متر فضای Σ به یک فضای کانتور تبدیل می‌شود. یادآوری می‌کنیم که به یک فضای متری فشرده‌ی کامل و همه‌جا ناهمبند، فضای کانتور گفته می‌شود.

لم ۱-۱-۵. *نگاشت شیفت همیومورفیسم است.*

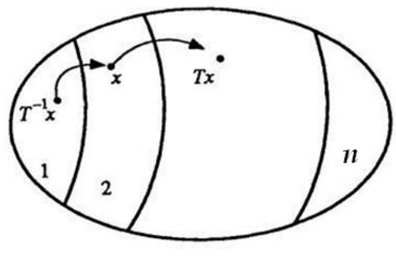
[۱] full $\mathcal{A}$-shift

اگر بتوانیم یک سیستم دینامیک چون (X, T) را به یک سیستم سمبولیک تبدیل کنیم، آن‌گاه به هر نقطه چون x از X دنباله‌ای سمبولیک به‌صورت $\phi(x) = \{n_i(x)\}$ نسبت داده می‌شود. نگاشت ϕ باید یک به یک بوده و در شرایط $\phi \circ T = \sigma \circ \phi$ صدق کند. یعنی دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Sigma & \xrightarrow[\sigma]{} & \Sigma \end{array}$$

جابه‌جایی باشد. بنابراین، بررسی مسائل مربوط به نگاشت T روی فضای X به بررسی مسائل مربوط به نگاشت σ روی فضای Σ تبدیل می‌شود. کار کردن در سیستم دینامیک سمبولیک (Σ, σ) به مراتب ساده‌تر از سیستم دینامیکی (X, T) است. برای نمونه بررسی نقاط پریودیک نگاشت T یعنی نقاطی که $T^k(x) = x$ برای $k > 0$، به بررسی نقاطی در دنباله‌ی $\{n_i(x)\}$ که در آن‌ها $n_{i+k}(x) = n_i(x)$ تحویل می‌شود.

یک روش برای کد کردن فضای X این است که افرازی از آن چون $P = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ را در نظر بگیریم و به ازای هر $x \in X$ تعریف کنیم $\phi(x) = \{S_n(x)\}$ به‌طوری‌که $T^n(x) \in X_{S_n}$. چون $\{S_n(Tx)\} = \{S_{n+1}(x)\}$، داریم $\phi \circ T = \sigma \circ \phi$. بنابراین، اگر ϕ یک به یک باشد می‌توان زوج (X, T) را توسط زوج (Σ, σ) کد کرد. این تابع همه جا یک به یک نیست. با انتخاب اندازه‌ی مناسب، می‌تواند تقریباً همه جا یک به یک شود.



شکل ۱-۱: به دست آوردن دنباله‌های سمبولیک از افراز فضا.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم X زیر مجموعه‌ای از شیفت کامل و $\mathcal{B}_n(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی کلمات مجاز از طول n در X باشد. *زبان*[1] X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(X).$$

برای $u \in \mathcal{B}(X)$ اختیار می‌کنیم

$${}_l[u] = \{x \in X : x_{[l, l+|u|-1]} = u\}.$$

[1] language

مجموعه‌ی $[u]_l$ با متر داده شده در تعریف ۱-۱-۴، هم باز و هم بسته است که آن را یک *سیلندر*[۱] X می‌نامیم. اگر $l \geq 0$ و $|u| = 2l + 1$ باشد، آن‌گاه $_{-l}[u]$ یک سیلندر مرکزی از طول $2l + 1$ نامیده می‌شود و وقتی $u \in \mathcal{B}_1(X)$ یعنی $l = 0$، معمولاً اندیس زیرین صفر را نمایش نمی‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۷. زیر مجموعه‌ی X از شیفت کامل $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ را یک *فضای شیفت*[۲] گوییم هرگاه $X = X_{\mathcal{F}}$ که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از بلوک‌های غیرمجاز روی الفبای $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۱-۱-۸. نقطه‌ی $x \in X$ را *از دو طرف ترایا*[۳] گوییم اگر هر کلمه‌ی X نامتناهی بار از چپ و راست در x ظاهر شود.

تعریف ۱-۱-۹. فضای شیفت X *تحویل‌ناپذیر*[۴] نامیده می‌شود، اگر برای هر $u, v \in \mathcal{B}(X)$، کلمه‌ای چون $w \in \mathcal{B}(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $uwv \in \mathcal{B}(X)$. اگر X تحویل‌ناپذیر باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی نقاط از دو طرف ترایا در X چگال است.

تعریف ۱-۱-۱۰. فضای شیفت X *غیرسرگردان*[۵] نامیده می‌شود اگر برای هر کلمه‌ی $u \in \mathcal{B}(X)$، کلمه‌ای چون $w \in \mathcal{B}(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $uwu \in \mathcal{B}(X)$.

توجه می‌کنیم که هر فضای تحویل‌ناپذیر، غیر سرگردان است. اما عکس آن برقرار نیست. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم $\mathcal{A}_1 = \{0, 1\}$ و $\mathcal{A}_2 = \{2, 3\}$. در این‌صورت اجتماع دو فضای $\mathcal{A}_1$–شیفت کامل و $\mathcal{A}_2$–شیفت کامل یک فضای شیفت غیرسرگردان و تحویل‌پذیر است.

تعریف ۱-۱-۱۱. دو الفبای $\mathcal{A}$ و $\mathcal{D}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم X فضای شیفتی روی الفبای $\mathcal{A}$ و $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(X) \to \mathcal{D}$ یک نگاشت بلوکی باشد به‌طوری‌که $m, n \in \mathbb{Z}$ و $-m \leqslant n$. آن‌گاه نگاشت $\phi : X \to \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ را یک *کد* $(m + n + 1)$–*بلوکی* با حافظه‌ی[۶] m و *پیش‌بینی*[۷] n می‌نامیم اگر $\phi(x) = y$ به‌طوری‌که

$$y_i = \Phi(x_{i-m}x_{i-m+1} \dots x_{i+n}) = \Phi(x_{[i-m, i+n]}).$$

در این‌صورت می‌نویسیم $\phi = \Phi_\infty^{[-m, n]}$ یا وقتی m و n معلومند به‌طور ساده‌تر $\phi = \Phi_\infty$. اگر کد ϕ پوشا باشد، آن‌را *فاکتور*[۸] و اگر یک به یک و پوشا باشد، آن‌را یک *تزویج*[۹] گوییم.

---
[۱]cylinder [۲]shift space [۳]doubly transitive [۴]irreducible [۵]nonwandering [۶]memory [۷]anticipation
[۸]factor [۹]conjugacy

قضیه ۱-۱-۱۲. *نگاشت $\phi : X \to Y$ یک کد است اگر و تنها اگر σ-تعویض‌پذیر و پیوسته باشد. منظور از σ-تعویض‌پذیری این است که دیاگرام زیر جابه‌جایی باشد.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma_X} & X \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ Y & \xrightarrow[\sigma_Y]{} & Y \end{array}$$

تعریف ۱-۱-۱۳. گراف G شامل یک مجموعه‌ی $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ از رأس‌ها و مجموعه‌ی $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$ از یال‌ها است. رأس ابتدای هر یال $e \in \mathcal{E}(G)$ را با $i(e) \in \mathcal{V}(G)$ و انتهای آن را با $t(e) \in \mathcal{V}(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۴. یک *هومومورفسیم گرافی*[1] از G به H شامل نگاشت‌های $\partial\Phi : \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H)$ و $\Phi : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$ می‌باشد به‌طوری‌که برای هر یال $e \in \mathcal{E}(G)$، $i(\Phi(e)) = \partial\Phi(i(e))$ و $t(\Phi(e)) = \partial\Phi(t(e))$. در این‌صورت هومورفیسم گرافی را به شکل $(\partial\Phi, \Phi) : G \to H$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۵. فرض کنیم G یک گراف با ماتریس مجاورت A باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم $\mathcal{E}$ مجموعه‌ی یال‌های G است. *شیفت یالی*[2] X_G یا X_A، فضای شیفتی روی الفبای $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$X_G = X_A = \{\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : t(\xi_i) = i(\xi_{i+1}), \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

تعریف ۱-۱-۱۶. فضای شیفتی را که توسط حذف مجموعه‌ای متناهی از کلمات تعریف شده باشد *شیفت از نوع متناهی*[3] یا به اختصار SFT می‌نامیم. این فضای شیفت، *مارکوف*[4] نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱-۱-۱۷. شیفت کامل در تعریف ۱-۱-۲، با مجموعه کلمات غیر مجاز $\mathcal{F} = \emptyset$، از نوع متناهی است.

قضیه ۱-۱-۱۸. *هر شیفت از نوع متناهی با یک شیفت یالی مزدوج است.*

طبق قضیه‌ی ۱-۱-۱۸، تمام مفاهیم تعریف شده روی شیفت های یالی به شیفت‌های از نوع متناهی قابل تعمیم هستند.

تعریف ۱-۱-۱۹. یک *گراف برچسب‌دار*[5] $\mathcal{G}$، زوج $(G, \mathcal{L})$ می‌باشد که G گرافی با مجموعه یال‌های $\mathcal{E}$ است و نگاشت $\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ به هر یال e از G یک برچسب $\mathcal{L}(e)$ از الفبای متناهی $\mathcal{A}$ اختصاص می‌دهد. برچسب مسیری مانند $\pi = e_1e_2 \dots e_n$ در G را تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{L}(\pi) = \mathcal{L}(e_1)\mathcal{L}(e_2)\dots\mathcal{L}(e_n),$$

[1]graph homomorphism [2]edge shift [3]shift of finite type [4]Markov [5]labeled graph

که یک $n-$بلوک روی الفبای $\mathcal{A}$ است. برای هر مسیر تهی ε_I در G تعریف می‌کنیم $\mathcal{L}(\varepsilon_I) = \varepsilon$ که ε کلمه‌ی تهی روی الفبای $\mathcal{A}$ است.

اگر $\xi = \ldots e_{-1}e_0e_1 \ldots$ که $\xi \in X_G$، برچسب ξ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{L}_\infty(\xi) = \ldots \mathcal{L}(e_{-1})\mathcal{L}(e_0)\mathcal{L}(e_1) \ldots \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}},$$

و مجموعه‌ی همه‌ی برچسب‌های نقاط X_G را به صورت

$$X_{\mathcal{G}} = \{\mathcal{L}_\infty(\xi) : \xi \in X_G\} = \mathcal{L}_\infty(X_G)$$

نمایش می‌دهیم. بنابراین، $X_{\mathcal{G}}$ زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{A}-$شیفت کامل است.

تعریف ۱-۱-۲۰. زیر مجموعه‌ی X از یک شیفت کامل را *سافیک*[1] می‌نامیم هرگاه $X = X_{\mathcal{G}}$ که $\mathcal{G}$ گرافی برچسب‌دار است. در این‌صورت $\mathcal{G}$ را یک نمایش شیفت سافیک X می‌نامیم.

قضیه ۱-۱-۲۱. *فضای شیفت X سافیک است اگر و تنها اگر فاکتوری از یک شیفت از نوع متناهی باشد.*

رده‌ی شیفت‌های سافیک، کوچک‌ترین خانواده از فضاهای شیفت شامل شیفت‌های از نوع متناهی و تحت فاکتور، پایا است. طبق قضیه‌ی ۱-۱-۲۱، هر شیفت از نوع متناهی، سافیک است ولی مثال ۱-۱-۲۶ نشان می‌دهد که عکس آن لزوماً برقرار نیست.

تعریف ۱-۱-۲۲. کلمه‌ی $v \in \mathcal{B}(X)$ را *هم‌زمان‌کننده*[2] گوییم اگر $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$، آن‌گاه $uvw \in \mathcal{B}(X)$.

لم ۱-۱-۲۳. *هر شیفت سافیک تحویل‌ناپذیر کلمه‌ای هم‌زمان‌کننده دارد.*

تعریف ۱-۱-۲۴. فرض کنیم X یک فضای شیفت است و $w \in \mathcal{B}(X)$. در این‌صورت *مجموعه‌ی پیرو*[3] w که با نماد $F_X(w)$ نمایش می‌دهیم، مجموعه‌ی همه‌ی کلماتی است که بعد از w در X می‌آیند؛ یعنی،

$$F_X(w) = \{v \in \mathcal{B}(X) : wv \in \mathcal{B}(X)\}.$$

مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های پیرو در X را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\mathcal{C}_X = \{F_X(w) : w \in \mathcal{B}(X)\}.$$

قضیه ۱-۱-۲۵. *فضای شیفت X سافیک است اگر و تنها اگر دارای تعداد متناهی مجموعه‌ی پیرو باشد.*

---
[1] sofic [2] synchronizing [3] follower set

مثال ۱-۱-۲۶. فرض کنیم $X = X_{\mathcal{F}}$ که $\mathcal{F} = \{10^{2n+1}1 : n \in \mathbb{N}_0\}$. در این‌صورت، X را شیفت زوج[1] می‌نامیم. حال سه مجموعه‌ی پیرو متمایز به صورت زیر وجود دارند.

$$\begin{aligned} C_0 &= F_X(0) = \{0,\ 1,\ 00,\ 01,\ 10,\ 11,\ 000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 111,\ \ldots\}, \\ C_1 &= F_X(1) = \{0,\ 1,\ 00,\ 10,\ 11,\ 000,\ 001,\ 100,\ 110,\ 111,\ \ldots\}, \\ C_2 &= F_X(10) = \{0,\ 00,\ 01,\ 000,\ 010,\ 011,\ \ldots\}. \end{aligned}$$

حال برای $w \in \mathcal{B}(X)$، داریم

$$F_X(w) = \begin{cases} C_0, & \text{اگر } w \text{ شامل ۱ نباشد} \\ C_1, & \text{اگر } w \text{ برای } k \geq 0 \text{، به } 10^{2k}1 \text{ ختم شود} \\ C_2, & \text{اگر } w \text{ برای } k \geq 0 \text{، به } 10^{2k+1} \text{ ختم شود.} \end{cases}$$

در نتیجه،

$$\mathcal{C}_X = \{C_0,\ C_1,\ C_2\}.$$

بنابراین، طبق قضیه‌ی ۱-۱-۲۵، X سافیک است و چون برای هر n، $0^n \in \mathcal{B}_n(X)$ یک کلمه‌ی غیر هم‌زمان‌کننده است، طبق [قضیه‌ی 3.4.17 [۱۳]]، شیفت زوج از نوع متناهی نیست.

طبق قضیه‌ی ۱-۱-۲۵، فضاهای شیفتی وجود دارند که سافیک نیستند. برای نمونه، مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱-۱-۲۷. فضای X را روی الفبای $\mathcal{A} = \{a,\ b,\ c\}$ با مجموعه‌ی کلمات غیر مجاز

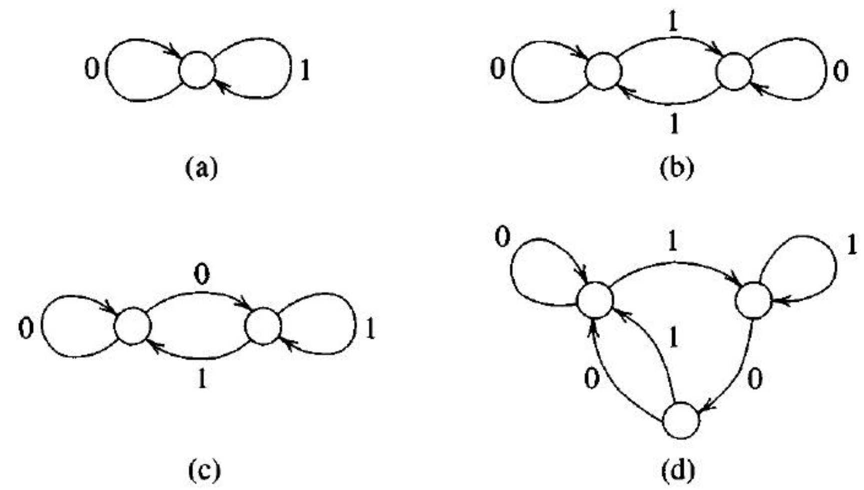
$$\mathcal{F} = \{ab^m c^n a : m \neq n\}$$

در نظر می‌گیریم. این فضا، *شیفت متن‌آزاد*[2] نامیده می‌شود. چون $c^n a \in F_X(ab^m)$ اگر و تنها اگر $n = m$، برای $m = 1, 2, 3, \ldots$، مجموعه‌های پیرو $F_X(ab^m)$ از یکدیگر مجزا هستند. بنابراین، $\mathcal{C}_X$ نامتناهی است. لذا طبق قضیه‌ی ۱-۱-۲۵، X سافیک نیست.

نمایش یک شیفت سافیک لزوماً یکتا نیست. به عنوان مثال، شکل ۱-۲ چهار نمایش متفاوت از ۲-شیفت کامل را نشان می‌دهد. ولی شیفت‌های سافیک تحویل‌ناپذیر دارای نمایش منحصر به‌فردی هستند که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۲۸. یک گراف برچسب‌دار $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ *از راست منفک*[3] است اگر برای هر رأس I، یال‌هایی که ابتدای آنها I است، برچسب‌های متفاوتی داشته باشند.

[1] even [2] context free shift [3] right-resolving



شکل ۱-۲: نمایش‌هایی از ۲-شیفت کامل.

تعریف ۱-۱-۲۹. یک نمایش *از راست منفک مینیمال* شیفت سافیک X، نمایش از راست منفکی از آن است که دارای کمترین تعداد رأس در بین سایر نمایش‌های از راست منفک X می‌باشد.

قضیه ۱-۱-۳۰. *هر دو نمایش از راست منفک مینیمال یک شیفت سافیک تحویل‌ناپذیر یکریخت هستند.*

طبق قضیه‌ی ۱-۱-۳۰، هر شیفت سافیک تحویل‌ناپذیر X دارای نمایش از راست منفک مینیمال منحصر به‌فردی است که آن را *پوشش شانون*[۱] X می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۳۱. کد ۱-بلوکی $\phi = \Phi_\infty : X \to Y$ را *از راست منفک* گوییم اگر $ab, ac \in \mathcal{B}_2(X)$ و $\Phi(b) = \Phi(c)$، آن‌گاه $b = c$. به‌طور مشابه کد *از چپ منفک*[۲] تعریف می‌شود. کد ϕ را *از دو طرف منفک*[۳] گوییم اگر هم از راست و هم از چپ منفک باشد.

فرض کنیم $\phi = \Phi_\infty : X_G \to X_H$ کد ۱-بلوکی باشد. در این‌صورت Φ نگاشت یالی از یک همومورفیسم گرافی از G به H است. اگر برای هر $I \in \mathcal{V}(G)$، $\mathcal{E}_I(G)$ بیانگر یال‌هایی باشد که ابتدای آنها رأس I است، کد Φ، $\mathcal{E}_I(G)$ را بتوی $\mathcal{E}_{\partial\Phi(I)}(H)$ می‌نگارد. بنابراین، $\phi = \Phi_\infty$ از راست منفک است اگر و تنها اگر برای هر I از G تحدید Φ_I از Φ به $\mathcal{E}_I(G)$ یک به یک باشد. حال این خاصیت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۳۲. همومورفیسم گرافی $\Phi : G \to H$ *از راست پوششی*[۴] نامیده می‌شود اگر برای هر رأس I متعلق به G، تحدید Φ_I از Φ به $\mathcal{E}_I(G)$ یک دوسویی از $\mathcal{E}_I(G)$ به $\mathcal{E}_{\partial\Phi(I)}(H)$ باشد. کد ۱-بلوکی $\phi : X_G \to X_H$ از راست پوششی است اگر یک همومورفیسم گرافی از راست پوششی Φ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\phi = \Phi_\infty$. به‌طور مشابه کد *از چپ پوششی*[۵] با استفاده از مجموعه‌ی $\mathcal{E}^I(G)$ شامل یال‌های ورودی به I تعریف می‌شود. کد $\phi = \Phi_\infty$ را *از دو طرف پوششی*[۶] گوییم اگر هم از راست و هم از چپ پوششی باشد.

[۱] Shannon cover [۲] left-resolving [۳] bi-resolving [۴] right-covering [۵] left-covering [۶] bi-covering

تعریف ۱-۱-۳۳. *آنتروپی* [۱] فضای X به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{B}_n(X)|.$$

آنتروپی یک سیستم، پیچیدگی سیستم را مشخص می‌کند و تحت تزویج، پایا است.

قضیه ۱-۱-۳۴. *اگر X یک شیفت سافیک تحویل‌ناپذیر و Y زیر شیفتی محض از X باشد، آن‌گاه $h(Y) < h(X)$.*

قضیه ۱-۱-۳۵. *فرض کنیم G و H گراف‌های تحویل‌ناپذیر باشند و کد $\phi : \Phi_\infty : X_G \to X_H$ از راست منفک باشد. آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل هستند.*

۱. *کد ϕ، پوشا است.*

۲. *کد ϕ، از راست پوششی است.*

۳. $h(X_G) = h(X_H)$.

در حالت خاص، کد ۱-بلوکی از یک شیفت یالی تحویل‌ناپذیر، یک فاکتور از راست منفک است اگر و تنها اگر از راست پوششی باشد.

تعریف ۱-۱-۳۶. نقاط x و x' از فضای شیفت X را *مجانب چپ* [۲] گوییم اگر عدد صحیح N وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_{(-\infty,N]} = x'_{(-\infty,N]}$. به عبارت دیگر، نقاط x و x' مجانب چپ هستند هرگاه $d(\sigma^{-n}(x), \sigma^{-n}(x')) \to 0$ وقتی‌که $n \to \infty$. به‌طور مشابه *مجانب راست* [۳] تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۱-۳۷. کد $\phi : X \to Y$ *از راست بسته* [۴] است اگر x و x' مجانب چپ باشند و $\phi(x) = \phi(x')$، آن‌گاه $x = x'$. به عبارت دیگر، کد ϕ از راست بسته است اگر نقاط متمایز در پیش‌تصویر یک نقطه، نامتناهی بار از چپ مخالف یکدیگر باشند. به‌طور مشابه کد *از چپ بسته* [۵] تعریف می‌شود.

هر کد از راست بسته را می‌توان با یک کد از راست منفک دوباره کدگذاری کرد.

کد ϕ را *بسته* [۶] گوییم هرگاه از راست یا از چپ بسته باشد. هم‌چنین کد ϕ را *از دو طرف بسته* [۷] گوییم اگر هم از راست و هم از چپ بسته باشد.

کدهای بسته تعمیمی از کدهای منفک هستند که اولین بار توسط کیچن [۸] [۱۱] تعریف شدند. جانگ [۹] [۹] تعریف معادل دیگری برای کدهای از راست بسته به صورت زیر ارائه کرد.

[۱] entropy [۲] left-asymptotic [۳] right-asymptotic [۴] right-closing [۵] left-closing [۶] closing [۷] bi-closing
[۸] Kitchens [۹] Jung

تعریف ۱-۱-۳۸. کد $\phi : X \to Y$ از راست بسته نامیده می‌شود هرگاه $x \in X$، $y \in Y$ و $\phi(x)$ مجانب چپ به y باشد، آن‌گاه حداکثر یک $\bar{x} \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{x}$ مجانب چپ به x است و $\phi(\bar{x}) = y$.

تعریف ۱-۱-۳۹. کد $\phi : X \to Y$ *متناهی به یک*[۱] نامیده می‌شود اگر $M \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $y \in Y$، $\phi^{-1}(y)$ حداکثر شامل M نقطه باشد.

در [۸] کد متناهی به یک به‌صورت زیر تعریف شده است.

تعریف ۱-۱-۴۰. کد ϕ متناهی به یک است اگر برای هر نقطه‌ی $y \in Y$، $\phi^{-1}(y)$ مجموعه‌ای متناهی باشد.

در این پایان‌نامه، منظور از کد متناهی به یک، تعریف۱-۱-۴۰ است. حال مثالی ارائه می‌کنیم که متناهی به یک نیست.

مثال ۱-۱-۴۱. فرض می‌کنیم $\phi = \Phi_\infty : X_{[3]} \to X_{[2]}$ کد ۱-بلوکی باشد به‌طوری‌که

$$\Phi(w) = \begin{cases} 0, & w = 0 \\ 1, & w = 1, 2. \end{cases}$$

اگر $y \in X_{[2]}$ شامل تنها تعداد متناهی ۱ باشد، آن‌گاه $\phi^{-1}(y)$ متناهی است. در حالی‌که اگر y شامل تعداد نامتناهی ۱ باشد، آن‌گاه $\phi^{-1}(y)$ نامتناهی است. بنابراین، ϕ متناهی به یک نیست.

قضیه ۱-۱-۴۲. *فرض کنیم X شیفت سافیک تحویل‌ناپذیر باشد. در این‌صورت کد $\phi : X \to Y$ متناهی به یک است اگر و تنها اگر $h(X) = h(\phi(X))$.*

قضیه ۱-۱-۴۳. *اگر ϕ فاکتوری روی یک شیفت از نوع متناهی تحویل‌ناپذیر باشد، آن‌گاه یا ϕ متناهی به یک است یا هر نقطه‌ی از دو طرف ترایا، تعداد نامتناهی پیش‌تصویر دارد.*

تعریف ۱-۱-۴۴. یک کد متناهی به یک، *ثابت به یک*[۲] نامیده می‌شود اگر $|\phi^{-1}(y)|$ مستقل از y باشد.

لم ۱-۱-۴۵. *هر کد ثابت به یک، پوشا است.*

حال رده‌ی دیگری از فضاهای شیفت را معرفی می‌کنیم که شامل شیفت‌های از نوع متناهی است. یادآوری می‌کنیم که یک شیفت از نوع متناهی، مارکوف نیز نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۴۶. فضای شیفت X *تقریباً مارکوف*[۳] نامیده می‌شود اگر فاکتوری از دو طرف بسته از شیفتی از نوع متناهی باشد. شیفت تقریباً مارکوف تحویل‌ناپذیر را شیفت *تقریباً از نوع متناهی*[۴] یا به اختصار AFT می‌نامیم.

[۱] finite-to-one [۲] constant-to-one [۳] almost Markov [۴] almost of finite type