وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی (گرایش محض)

خواص اساسی حساب بازه ای و کاربرد های آن؛ محاسبه ی جواب های دستگاه معادلات چند جمله ای بازه ای

توسط:
محسن علی شیخی

استاد راهنما:
دکتر عبدالعلی بصیری

استاد مشاور:
دکتر سجاد رحمانی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

خواص اساسی حساب بازه ای و کاربرد های آن؛ محاسبه ی جواب های دستگاه معادلات چند جمله ای بازه ای

توسط:

محسن علی شیخی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی (گرایش محض)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر عبدالعلی بصیری استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر سجاد رحمانی استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر رحمان بهمنی سنگسری استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان (داور اول)

دکتر سید هاشم طبسی استادیار علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر محمد ابری استادیار ریاضی محض گرایش توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان(نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پیشگاه مقدس حضرت ثامن الائمه (ع)

و

پدر و مادرعزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر، توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند، آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه های جاودانی زندگانی ام است. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستان پر مهرشان بوسه می‌زنم. و همسر عزیزم که با آمدنش امید را به زندگی ام بخشید. سرو وجودشان همواره سر سبز و استوار باد.

سپاسگزاری

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که هستی ام بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونم شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرم نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیم ساخت، شاید که شکرگذار باشیم... اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی حد پروردگار بر خود لازم می دانم سپاسگزار تمام عزیزانی باشم که در برابر سختی ها و ناملایمات یاری ام نمودند مخصوصاً استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر عبدالعلی بصیری که انجام این طرح مدیون رهنمون های ایشان می‌باشد و استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر سجاد رحمانی که در تمام مراحل تهیه و تدوین دلسوزانه و با اختصاص وقت گرانقدرشان مرا یاری نمودند. همچنین مراتب تشکر و سپاس خود را از جناب آقای دکتر رحمان بهمنی سنگسری و جناب آقای دکتر سید هاشم طبسی که زحمت بازخوانی و داوری این طرح را بر عهده گرفته اند، اعلام می دارم.

در پایان، تشکر می‌کنم ازخداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر و همسر عزیزم ، و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و از خواهران و برادرانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، پشتیبان من بودند، کمال امتنان را دارم.

چکیده

خواص اساسی حساب بازه ای و کاربرد های آن؛ محاسبه ی جواب های دستگاه معادلات چند جمله ای بازه ای

به وسیله‌ی:
محسن علی شیخی

دستگاههای معادلات جبری که ضرایب آنها بازه ها هستند در علوم مهندسی کاربرد های زیادی دارند . محاسبه جواب های چنین دستگاههایی یک مسئله اساسی برای محققینی است که به دنبال رده بندی متغیر های مربوط به چنین دستگاههایی هستند می باشد.در این پایان نامه ابتدا معرفی کوتاهی از آنالیز بازه ها و کاربردهای آن ارائه خواهیم کرد . سپس الگوریتم ها و برنامه های موجود در محاسبات بازه ای را بررسی می کنیم . در ادامه به بررسی جواب های دستگاههای معادلات جبری که ضرایب آنها بازه ها هستند خواهیم پرداخت .

واژگان کلیدی: چند جمله ای های بازه ای، حساب بازه ای، چندجمله‌ای‌های حدی، نیوتون بازه‌ای.

فهرست مطالب

و

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

در علوم مختلف مهندسی معادلاتی وجود دارند که نسبت به متغیر های مفروض با عبارات جبری که ضرایب آنها به صورت مختص داده نشده اند قابل بیان است. بدین صورت که ضرایب را در یک بازه ی حقیقی در نظر می گیریم [۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۰]. رده بندی کردن اینگونه متغیر ها بر حل دستگاه معادلات جبری با ضرایب بازه ای بنا نهاده شده است. برای مثال این معادلات در تئوری کنترل مکانیک [۱۰] ، سیستم های دینامیکی [۱۳] و فیزیک نجومی [۱۱] کاربرد دارند. که در این حالت برای رده بندی کردن متغیر های مورد نظر، بایستی به حل یک دستگاه معادلات از چند جمله ای های بازه ای بپردازیم. یاد آوری می کنیم که محاسبه ی ریشه های چند جمله ای های بازه ای با استفاده از شکل خاص چند جمله ای ها در مرجع [۱۰] آورده شده است. و در مرجع [۴] این معادلات با استفاده از حساب بازه ای حل می شوند. توجه کنید که در برخی از معادلات بازه ای، روش آخر منجر به حل دستگاه و در نتیجه یافتن ریشه های خواسته شده با تقریب مناسب نمی شود [۹] . در مرجع [۱۲] روش جدیدی معرفی شده است، که برای هر چند جمله ای بازه ای بکار می رود. در این پایان نامه ما روش معرفی شده در مرجع [۱۲] را برای محاسبه ی جوابهای دستگاه معادلات چند جمله ای بازه ای بکار می گیریم. و با استفاده از این روش مجموعه جواب های این دستگاه معادلات را بدست می آوریم.

توجه کنید که برای بدست آوردن جواب های دستگاه معادلات چند جمله ای بازه ای باید جواب های هر معادله را بدست آوریم. این پایان نامه برگرفته از [۱۸] و [۴] می‌باشد. در فصل اول این پایان نامه ابتدا به معرفی کوتاهی از حساب بازه ای و خواص جبری آن می پردازیم و سپس به بحث درباره ی برد یک تابع روی یک بازه ی خاص می پردازیم. در فصل دوم یکی از کاربرد های حساب بازه ای تحت عنوان حل دستگاه معادلات حقیقی با استفاده از روش نیوتون بازه ای را ارائه می دهیم. در فصل سوم این پایان نامه ابتدا معادلات چند جمله ای بازه ای را معرفی می کنیم. و سپس جواب های دستگاه

معادلات چند جمله ای های بازه ای را پیدا می کنیم. و در فصل چهارم برنامه های مربوط به فصل دوم اجرا می شوند.

فصل ۱

حساب روی بازه‌ها

در این فصل ابتدا اعمال روی بازه‌ها از جمله جمع، ضرب، تفریق و تقسیم را انجام می دهیم و سپس به بررسی خواص بازه ها می پردازیم و در آخر برد یک تابع را همراه با خواص آن بررسی می کنیم.

۱-۱ اعمال روی بازه‌ها و خواص آنها

در این پایان نامه مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش داده و عناصر $a, b, c, d, \ldots$ را عضو مجموعه‌ی این اعداد در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱.۱. یک بازه در اعداد حقیقی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a] := [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \in \mathbb{R} \ | \ \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$$

مجموعه‌ی تمام بازه‌ها را با $I\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۲.۱.۱. هر عدد حقیقی a را می‌توان به صورت بازه‌ی $[a, a]$ نوشت.

تعریف ۳.۱.۱. اگر $[a], [b]$ دو بازه باشند و $*$ یکی از چهار عمل $\{+, -, \times, /\}$ باشد آنگاه $[a] * [b]$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$[a] * [b] = \{a * b \ | \ a \in [a], b \in [b]\}$$

ملاحظه ۴.۱.۱. در حالت $[a]/[b]$ باید شرط $\circ \notin [b]$ برقرار باشد.

نکته: چون تابع $*$ یک تابع پیوسته است و $[a],[b]\in I\mathbb{R}$ می‌باشند بنابراین:

$$[a]*[b]\in I\mathbb{R}$$

قضیه ۵.۱.۱. *با توجه به تعریف ۳.۱.۱ چهار عمل اصلی روی بازه‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:*

$$
\begin{aligned}
&۱)[a]+[b]=[\underline{a}+\underline{b},\bar{a}+\bar{b}]\\
&۲)[a]-[b]=[\underline{a}-\bar{b},\bar{a}-\underline{b}]\\
&۳)[a]\times[b]=[min\{\bar{a}\bar{b},\underline{a}\underline{b},\bar{a}\underline{b},\underline{a}\bar{b}\},max\{\bar{a}\bar{b},\underline{a}\underline{b},\bar{a}\underline{b},\underline{a}\bar{b}\}]\\
&۴)[a]/[b]=[\underline{a},\bar{a}]\times[\tfrac{۱}{\bar{b}},\tfrac{۱}{\underline{b}}]
\end{aligned}
$$

اثبات: *ابتدا عمل دو تایی را دوباره تعریف می‌کنیم:*

$$
\begin{aligned}
&[a]*[b]=\{a*b\ \mid\ a\in[a],b\in[b]\}\\
&۱)[a]+[b]=[\underline{a},\bar{a}]+[\underline{b},\bar{b}]=\{a+b|a\in[a],b\in[b]\}=\\
&\{\underline{a}+\underline{b},...,\underline{a}+\bar{b},\bar{a}+\underline{b},...,\bar{a}+\bar{b}\}=A
\end{aligned}
$$

چون کوچکترین نقطه‌ی مجموعه‌ی A، $\underline{a}+\underline{b}$ و بزرگترین نقطه‌ی آن $\bar{a}+\bar{b}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$[a]+[b]=[\underline{a}+\underline{b},\bar{a}+\bar{b}]$$

$$
\begin{aligned}
&۲)[a]-[b]=[\underline{a},\bar{a}]-[\underline{b},\bar{b}]=\{a-b|a\in[a],b\in[b]\}=\\
&\{\underline{a}-\underline{b},...,\underline{a}-\bar{b},\bar{a}-\underline{b},...,\bar{a}-\bar{b}\}=B
\end{aligned}
$$

چون کوچکترین نقطه‌ی مجموعه‌ی B، $\underline{a}-\bar{b}$ و بزرگترین نقطه‌ی آن $\bar{a}-\underline{b}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$[a]-[b]=[\underline{a}-\bar{b},\bar{a}-\underline{b}]$$

$$۳)[a]\times[b]=[\underline{a},\bar{a}]\times[\underline{b},\bar{b}]=\{a\times b|a\in[a],b\in[b]\}=\{\underline{a}\underline{b},...,\underline{a}\bar{b},\bar{a}\underline{b},...,\bar{a}\bar{b}\}=C$$

چون در بازه‌ی $[a]$، $\underline{a}$ کوچکترین و $\bar{a}$ بزرگترین نقطه‌ی است و در بازه‌ی $[b]$، $\underline{b}$ کوچکترین و $\bar{b}$ بزرگترین نقطه‌ی است، بنابراین کوچکترین نقطه‌ی مجموعه‌ی C یکی از نقاط $\underline{a}\underline{b}$ ، $\underline{a}\bar{b}$ ، $\bar{a}\underline{b}$ و $\bar{a}\bar{b}$ می‌بلشد و بزرگترین نقطه هم یکی از نقاط چهار گانه ذکر شده می‌باشد بنابراین داریم:

$$[a] \times [b] = [min\{\bar{a}\bar{b}, \underline{a}\underline{b}, \bar{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}\}, max\{\bar{a}\bar{b}, \underline{a}\underline{b}, \bar{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}\}]$$

$$۴)[a]/[b] = [\underline{a}, \bar{a}]/[\underline{b}, \bar{b}] = \{a/b | a \in [a], b \in [b]\} = \{\underline{a}/\underline{b}, ..., \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, ..., \bar{a}/\bar{b}\} = D$$

چون کوچکترین نقطه مجموعه ی D یکی از نقاط $\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}$ و بزرگترین نقطه‌ی مجموعه‌ی D نیز یکی از همین نقاط می‌باشد، و چون عکس بازه‌ی $[b]$ بازه‌ی $[۱/\bar{b}, ۱/\underline{b}]$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$[a]/[b] = [\underline{a}, \bar{a}] \times [\frac{۱}{\bar{b}}, \frac{۱}{\underline{b}}]$$

مثال ۶.۱.۱. اگر $[a] = [۵, ۸]$ و $[b] = [-۱, ۲]$ باشد، آنگاه $[a] + [b]$، $[a] - [b]$، $[a] \times [b]$ و $[a]/[b]$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[a] + [b] = [-۱ + ۵, ۲ + ۸] = [۴, ۱۰]$$
$$[a] - [b] = [-۱ - ۸, ۲ - ۵] = [-۹, -۳]$$
$$[a] \times [b] = [min\{-۵, ۱۰, -۸, ۱۶\}, max\{-۵, ۱۰, -۸, ۱۶\}] = [-۸, ۱۶]$$
$$[a]/[b] = [۵, ۸] \times [۱/۲, -۱] = [-۸, ۴]$$

نکته: اگر به طور همزمان $۰ \notin [a]$ و $۰ \notin [b]$ آنگاه ضرب دو بازه می‌تواند به دو ضرب حقیقی ابتدای بازه‌ها در یکدیگر و انتهای بازه‌ها در یکدیگر کاهش یابد که ابتدای بازه حاصلضرب کمترین مقدار این دو ضرب و انتهای بازه حاصلضرب بیشترین مقدار این دو ضرب می‌باشد، در غیر این صورت طبق قسمت سوم قضیه قبل چهار ضرب حقیقی باید انجام گیرد.

مثال ۷.۱.۱. حاصل ضرب دو بازه‌ی $[۲, ۸]$ و $[۵, ۹]$ را به دست می‌آوریم:
چون $۰ \notin [۵, ۹]$ و $۰ \notin [۲, ۸]$ بنابراین طبق نکته‌ی بالا داریم:

$$[۲, ۸] \times [۵, ۹] = [۲ \times ۵, ۸ \times ۹] = [۱۰, ۷۲]$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید r یک تابع حقیقی پیوسته تعریف شده روی $\mathbb{R}$ (یا زیر مجموعه‌ی $\mathbb{R}$)باشد، آنگاه برای $[a] \in D_r$ داریم:

$$r([a]) = \{r(a) \ | \ a \in [a]\} \in I\mathbb{R}$$

تابع r می‌تواند یکی از توابع ابتدایی شبیه sin، cos، tan و ... باشد.

حال می توانیم با کمک قضیه‌ی ۵.۱.۱ و تعریف ۸.۱.۱ برای تابع حقیقی مقدار $f(a, b, ..., u, v)$

مقدار تابع f روی بازه‌های $[a]$ تا $[v]$ ، $(f([a],[b],...,[u],[v]))$ را تعریف کنیم که به آن مقدار حساب بازه‌ای تابع f می‌گوییم. این مقدار با استفاده از جایگذاری بازه های $[a]$ تا $[v]$ در تابع f بدست می آید.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید f یک تابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ (یا یک زیر مجموعه ی $\mathbb{R}$) باشد. و فرض کنید $[a]$ و $[b]$ و ...و$[u]$ و $[v]$ بازه باشند. در این صورت داریم:

$$f([a],[b],...,[u],[v]) = \{f(a,b,...,u,v)|\ a\in[a], b\in[b],...,u\in[u], v\in[v]\}$$

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید $[a]$ ،...، $[v]$ و $[\tilde{a}]$ ،...، $[\tilde{v}]$ بازه باشند:*
۱-اگر $[a]\subseteq[\tilde{a}]$ ، ...و $[v]\subseteq[\tilde{v}]$ آنگاه:

$$f([a],[b],...,[u],[v]) \subseteq f([\tilde{a}],[\tilde{b}],...,[\tilde{u}],[\tilde{v}])$$

۲-اگر $a\in[a]$ و $b\in[b]$ و...و $v\in[v]$ باشد، آنگاه:

$$f(a,b,...,u,v) \in f([a],[b],...,[u],[v])$$

قسمت دوم حالت خاصی از قسمت اول است.

اثبات. ۱)برای اثبات ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$f([a],[b],...,[u],[v]) = \{f(a,b,...,u,v)|\ a\in[a], b\in[b],...,u\in[u], v\in[v]\}$$

و

$$f([\tilde{a}],[\tilde{b}],...,[\tilde{u}],[\tilde{v}]) = \{f(\tilde{a},\tilde{b},...,\tilde{u},\tilde{v})|\ \tilde{a}\in[\tilde{a}], \tilde{b}\in[\tilde{b}],...,\tilde{u}\in[\tilde{u}], \tilde{v}\in[\tilde{v}]\}$$

حال یک نقطه‌ی $x\in f([a],[b],...,[u],[v])$ در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که $x\in f([\tilde{a}],[\tilde{b}],...,[\tilde{u}],[\tilde{v}])$

$$x\in f([a],[b],...,[u],[v]) \Longrightarrow \exists a\in[a],...,v\in[v]:\quad x=f(a,...,v) \Longrightarrow a\in [\tilde{a}],...,v\in[\tilde{v}] \Longrightarrow x=f(a,...,v)\in f([\tilde{a}],...,[\tilde{v}]) \Longrightarrow \quad x\in f([\tilde{a}],...,[\tilde{v}])$$

۲)بنابر تعریف برد یک تابع و باتوجه به فرض($a \in [a], ..., v \in [v]$) داریم:

$$f(a, ..., v) \in f([a], [b], ..., [u], [v]) = \{f(a, b, ..., u, v) |\ a \in [a], b \in [b], ..., u \in [u], v \in [v]\} = f([a], ..., [v])$$

$\square$

مثال ۱.۱.۱۱. فرض کنید $f = ۳x - ۲$ و $[a] = [۲, ۸]$ و $[b] = [۱, ۹]$ باشد، در این صورت داریم:

$$f([۲, ۸]) = [۳, ۳] \times [۲, ۸] - [۲, ۲] = [۴, ۲۲]$$
$$f([۱, ۹]) = [۳, ۳] \times [۱, ۹] - [۲, ۲] = [۱, ۲۵]$$

که با توجه به قسمت اول قضیه‌ی قبل چون $[۲, ۸] \subset [۱, ۹]$ بنابراین داریم:

$$f([۲, ۸]) = [۴, ۲۲] \subset f([۱, ۹]) = [۱, ۲۵]$$

در ادامه با توجه به قسمت دوم قضیه‌ی قبل داریم:

$$۵ \in [۲, ۸] \Longrightarrow f(۵) = ۱۳ \in [۴, ۲۲] = f([۲, ۸])$$

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنیم f یک تابع پیوسته روی بازه‌های $[a]$ و...و $[v]$ باشد در این صورت برد تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(f; [a], [b], ..., [u], [v]) = \{f(a, b, ..., u, v)\ \ |\ \ a \in [a], b \in [b], ..., u \in [u], v \in [v]\}$$

برای بدست آوردن برد یک تابع روی یک بازه باید مقدار تک تک نقاط بازه را در f بدست بیاوریم.

نتیجه ۱.۱.۱۳. *با استفاده از قسمت دوم قضیه‌ی ۱.۱.۱۰ و تعریف برد تابع نتیجه زیر به دست می‌آید:*

$$R(f, [a]) \subseteq f([a])$$

و در حالت چندمتغیره داریم:

$$R(f, [a], [b], ..., [u], [v]) \subseteq f([a], [b], ..., [u], [v])$$

اثبات: *با استفاده از چهار عمل اصلی روی بازه‌ها و تعریف ۱.۱.۸ به دست می‌آید.*

همانطور که در قسمت دوم مثال قبل دیدیم که:

$$۵ \in [۲,۸] \Longrightarrow f(۵) = ۱۳ \in [۴,۲۲] = f([۲,۸])$$

با توجه به قضیه‌ی ۱۰.۱.۱ این رابطه برای تمام نقاط بازه‌ی $[a]$ برقرار است، یعنی مقدار تمام نقاط بازه‌ی $[a]$ عضوی از مقدار تابع f روی بازه‌ی a می‌باشد و چون مقدار تمام نقاط بازه‌ی $[a]$ همان $R(f,[a])$ می‌باشد، بنابراین:

$$R(f,[a]) \subseteq f([a])$$

مثال ۱۴.۱.۱. فرض کنید $f(x,y) = x + y$ و $[a] = [۲,۳]$،$[\tilde{a}] = [۱,۴]$ ، $[b] = [۳,۵]$ و $[\tilde{b}] = [۲,۶]$ باشد،با یک محاسبه‌ی ساده داریم:

$$f([a],[b]) = [۵,۸] \qquad , \qquad f([\tilde{a}],[\tilde{b}]) = [۳,۱۰]$$

در نتیجه:

$$f([a],[b]) = [۵,۸] \subseteq f([\tilde{a}],[\tilde{b}]) = [۳,۱۰]$$

مثال ۱۵.۱.۱. فرض کنید $[a] = [۲,۳]$ و $x \neq ۱ \quad f(x) = \frac{x}{۱-x}$ باشد:

الف)

$$R(f,[a]) = [\frac{۲}{۱-۲}, \frac{۳}{۱-۳}] = [-۲, -۳/۲]$$

(برای به دست آوردن برد یک تابع در یک بازه باید تمام نقاط بازه‌ی $[a]$ را در تابع $f(x)$ قرار دهیم.)

$$f([a]) = \frac{[۲,۳]}{۱-[۲,۳]} = \frac{[۲,۳]}{[-۲,-۱]} = [۲,۳] \times [-۱, -۱/۲] =$$
$$[min\{-۲,-۳,-۱,-۳/۲\}, max\{-۲,-۳,-۱,-۳/۲\}] = [-۳,-۱]$$

بنابراین:

$$[-۲,-۳/۲] \subseteq [-۳,-۱] \Rightarrow R(f;[a]) \subseteq f([a])$$

ب)اکنون $f(x)$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$f(x) = \frac{x}{۱-x} = \frac{۱}{۱/x-۱} = \tilde{f}(x) \qquad x \neq ۰$
$\tilde{f}([a]) = \tilde{f}([۲,۳]) = \frac{۱}{\frac{۱}{[۲,۳]}-۱} = \frac{۱}{۱\times[۱/۳,۱/۲]-۱} = \frac{۱}{[-۲/۳,-۱/۲]} = [-۲,-۳/۲] =$
$R(f;[a]) = \tilde{f}([a])$

قسمت اول این مثال نشان می‌دهد که حداکثر برد یک تابع روی یک بازه وابستگی شدیدی به مقدار آن تابع روی آن بازه دارد، یعنی اینکه برد یک تابع روی یک بازه با مقدار آن تابع روی همان بازه برابر نمی باشند و برد تابع زیرمجموعه ی مقدار تابع می باشد(در اعداد حقیقی با هم برابرند). دلیل این مطلب این است که همه‌ی قوانینی که برای اعداد حقیقی برقرار می‌باشند برای بازه‌ها برقرار نمی‌باشند. در زیر به سه مورد از این قوانین اشاره می‌کنیم:

$۱)\forall [x],[y],[z] \in I\mathbb{R} \ : \ [x]([y]+[z]) \subseteq [x][y]+[x][z]$

اگر چه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $x([y]+[z]) = x[y]+x[z]$.

۲)بازه‌ای مثل $[x] \in I\mathbb{R}$ وجود دارد که $[x]-[x] \neq ۰$.

۳)بازه‌ای مثل $[x] \in I\mathbb{R}$ با شرط $۰ \notin [x]$ وجود دارد که $\frac{[x]}{[x]} \neq ۱$.

مثال ۱۶.۱.۱. برای بازه‌ی $[z] = [۲,۳]$ و $[y] = [-۷,-۴]$ و $[x] = [-۴,-۲]$ قوانین سه گانه را بررسی می‌کنیم:

$۱)[x]([y]+[z]) = [۲,۲۰] \subset [-۴,۲۴] = [x][y]+[x][z]$
$۲)[z]-[z] = [-۱,۱] \neq [۰,۰] = ۰$
$۳)[z]/[z] = [۲/۳,۳/۲] \neq [۱,۱] = ۱$

تعریف ۱۷.۱.۱. (فاصله دو بازه) فرض کنید $[x] = [\underline{x},\bar{x}]$ و $[y] = [\underline{y},\bar{y}]$ دو بازه‌ی دلخواه باشند، آنگاه فاصله دو بازه را که با نماد $q([x],[y])$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q([x],[y]) = max\{|\underline{x}-\underline{y}|,|\bar{x}-\bar{y}|\}$$

تعریف ۱۸.۱.۱. (قدر مطلق یک بازه) فرض کنید $[x] = [\underline{x},\bar{x}]$ یک بازه‌ی دلخواه باشد، آنگاه قدر مطلق بازه $[x]$ را که با نماد $|[x]|$ نشان می‌دهیم به صورت فاصله‌ی $[x]$ تا صفر تعریف می‌شود:

$$|[x]| = q([x],۰) = max\{|\underline{x}|,|\bar{x}|\}$$

ملاحظه ۱.۱.۱۹. قوانین زیر برای بازه‌ها همواره برقرار می‌باشند:

$$۱)|[x]| = max\{|x| \quad | \quad x \in [x]\}$$
$$۲)q([x]+[y],[x]+[z]) = q([y],[z])$$
$$۳)q(x[y],x[z]) = |x|q([y],[z])$$
$$۴)q([x][y],[x][z]) \leq |[x]|q([y],[z])$$
$$۵)|[x] \pm [y]| \leq |[x]| + |[y]|$$
$$۶)|[x][y]| = |[x]||[y]|$$

تعریف ۱.۱.۲۰. (قطر یک بازه) فرض کنید $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ یک بازه‌ی دلخواه باشد، آنگاه قطر بازه $[x]$ را که با نماد $w([x])$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w([x]) = \bar{x} - \underline{x}$$

ملاحظه ۱.۱.۲۱. قوانین زیر برای قطر بازه‌ها همواره برقرار می‌باشند:

$$۱)w([x] \pm [y]) = w([x]) + w([y])$$
$$۲)w(x[y]) = |x|w([y])$$
$$۳)w([x][y]) \leq w([x])|y| + |x|w([y])$$
$$۴)w([x][y]) \geq max\{|[x]|w([y]), |[y]|w([x])\}$$

تعریف ۱.۱.۲۲. (برابری دو بازه) دو بازه ی $[a]$ و$[b]$ را برابر گوییم اگر $\bar{a} = \bar{b}$ و $\underline{a} = \underline{b}$.

تعریف ۱.۱.۲۳. (اشتراک و اجتماع دو بازه) فرض کنید $[a]$ و $[b]$ دو بازه باشند آنگاه داریم :

$$[a] \cap [b] = \{c : c \in [a], c \in [b]\} = [max\{\underline{a}, \underline{b}\}, min\{\bar{a}, \bar{b}\}]$$

نکته : در بدست آوردن اشتراک دو بازه، ممکن است بازه ای بدست بیاوریم که نقطه ابتدایی بزرگتر از نقطه انتهایی باشد. در این صورت این بازه را تهی می نامیم یعنی دو بازه $[a]$ و $[b]$ دارای اشتراک تهی هستند.