بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه ملایر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان پایان نامه:

گراف غیردوری گروه‌های موضعاً غیردوری

استاد راهنما:

دکتر رشید رضائی

استاد مشاور:

دکتر سعید باقری

نام دانشجو:

فروغ قطره سامانی

بهمن ۹۱

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

تقدیم به پدرم :

کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

تقدیم به مادرم :

سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

تقدیم به همسرم :

که مسیح وار با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه بود.

تشکر و قدردانی

سپاس بی پایان از جناب آقای دکتر رشید رضائی که با دقت نظر و حوصله‌ی بی‌حد، راهنمای دلسوز برایم بودند و از خداوند متعال برای این بزرگوار توفیق و سلامتی را خواهانم.

از جناب آقای دکتر سعید باقری که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

و از داوران محترم آقای دکتر کریم سامعی و آقای دکتر مسیب زهره‌وند سپاس گذاری می‌نمایم.

نام خانوادگی دانشجو: قطره سامانی	نام: فروغ
عنوان پایان نامه: گراف غیردوری گروه‌های موضعاً غیردوری	
استاد راهنما: دکتر رشید رضائی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه ملایر—گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۱	
کلمات کلیدی: گروه موضعاً غیردوری، گروه غیردوری، گراف غیردوری، گروه متناهی.	

چکیده

مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از ویژگی‌های گراف موضوعی است که در سال‌های اخیر مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفته و نتایج شگفت انگیزی به وجود آورده است. مقالات زیادی ارائه شده که در آنها به یک گروه یا حلقه گرافی نسبت داده شده و برخی ویژگی‌های جبری آن حلقه و یا گروه با استفاده از این گراف مورد بررسی قرار گرفته است.

گراف Γ_G را به این شکل به گروه موضعاً غیردوری G نسبت می‌دهیم که رئوس آن مجموعه $G \backslash Cyc(G)$ می‌باشد که در آن

$$Cyc(G) = \{y \in G : \text{برای هر } x \in G\text{، } \langle x, y\rangle \text{ دوری باشد}\}$$

و دو رأس این گراف مجاورند، هرگاه زیرگروه تولید شده توسط آن دو عنصر غیردوری باشد. این گراف را گراف غیردوری می‌نامیم و ویژگی‌های این گراف را بررسی خواهیم کرد. همچنین برخی از خواص نظری گراف از جمله منظم بودن را برای این گراف در نظر گرفته و ویژگی‌های گروه متناظر آن را بررسی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم عدد خوشه‌ای گراف Γ_G متناهی است، اگر و تنها اگر Γ_G خوشه‌ی نامتناهی نداشته باشد. نشان می‌دهیم اگر G یک گروه پوچ‌توان متناهی و H یک گروه باشد که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ و $|Cyc(G)| = |Cyc(H)| = ۱$ در

این صورت، H یک گروه متناهی پوچ‌توان است.

مثال‌هایی از گروه‌هایی مثل G ارایه می‌دهیم که گراف غیردوری آن ها منحصر به فرد است. یعنی اگر برای گروه H داشته باشیم $\Gamma_G \cong \Gamma_H$، آنگاه $G \cong H$ است. در ادامه این حدس را بررسی خواهیم کرد که هر گروه ساده غیرآبلی متناهی دارای گراف غیردوری منحصر به فردی باشد. همچنین مثال‌هایی از گروه‌های متناهی غیردوری مثل G ارایه می‌دهیم که اگر برای گروه دلخواه H، $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ آنگاه $|G| \cong |H|$.

فهرست مطالب

مقدمه

در بیست سال اخیر مطالعه ساختارهای جبری از طریق خواص گراف‌ها موضوعی است که مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفته است. نظریه گراف‌های جبری رابطه‌ی بسیار نزدیکی با نظریه‌ی گروه‌ها دارد و گاهی اوقات روش جبری در مورد مسائل گراف‌ها به کار برده می‌شود. مقالات زیادی درباره‌ی مربوط کردن گرافی به یک حلقه یا گروه موجود است. به عنوان مثال برترام[۱] و همکارانش در [۲]، مقدم فر و همکارانش در [۱۱] و نیومن [۲] در [۱۲]. در این پایان‌نامه به مطالعه و بررسی مقاله‌ی

Abdollahi, A. and Mohammadi Hassanabadi, M., Non-cyclic graph of a groups, Communications in Algebra, 35:7 (2007) 2057-2081.

می‌پردازیم که به یک گروه موضعاً غیردوری مثل G گرافی را نسبت می‌دهند به طوری که مجموعه رئوس آن مجموعه $G\backslash Cyc(G)$ می‌باشد که در آن

$$Cyc(G) = \{\ y \in G|\ \text{برای هر } x \in G \text{ ، } \langle x, y\rangle \text{ دوری باشد}\ \}.$$

دو رأس آن مجاورند، هرگاه زیرگروه تولید شده توسط آن دو عنصر غیردوری باشد. این گراف را گراف غیردوری می‌نامند و آن را با نماد Γ_G نشان می‌دهند. این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول مقدمات مورد نیاز در فصل‌های بعد را ارائه خواهیم کرد. در فصل ۲، برخی از ویژگی‌های گراف غیردوری Γ_G را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مشاهده می‌کنیم که گراف غیردوری Γ_G همواره همبند است و قطر آن کوچکتر مساوی ۳ می‌باشد. و نشان می‌دهیم $diam(\Gamma_G) = ۱$ ، اگر و تنها اگر G یک ۲− گروه آبلی مقدماتی باشد.

[۱] Bertram

[۲] Neumann

در فصل سوم به بررسی گروه‌هایی می‌پردازیم که گراف غیردوری آن‌ها دارای ویژگی‌های خاصی هستند. به عنوان مثال نشان می‌دهیم عدد خوشه‌ای Γ_G متناهی است، اگر و تنها اگر Γ_G خوشه‌ی نامتناهی نداشته باشد. و همچنین نشان می‌دهیم در گراف غیردوری عدد خوشه‌ای و عدد استقلال برابر هستند. و گروه‌هایی را مشخص می‌کنیم که گراف غیردوری آن‌ها منظم می‌باشند. در فصل چهار بررسی می‌کنیم که اگر ρ یک خاصیت گروهی باشد و G, H دو گروه موضعاً غیردوری باشند به طوری که $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ و G دارای خاصیت ρ باشد، آیا H نیز دارای خاصیت ρ است؟ خواص گروهی متفاوتی از جمله متناهی بودن، پوچ‌توان بودن و یکریختی با یک گروه ثابت را در نظر گرفته و بررسی می‌کنیم تحت یکریختی گراف این خواص گروهی ثابت می‌مانند یا نه. همچنین نشان می‌دهیم گروه‌هایی وجود دارند که گراف غیردوری آنها یکسان است ولی خودشان یکریخت نیستند. و گروه‌هایی را معرفی می‌کنیم که گراف غیردوری آن‌ها یکتاست.

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل به مفاهیمی خواهیم پرداخت که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. چون این پایان‌نامه ترکیبی از نظریه گروه‌ها و نظریه گراف‌ها است نیازمند مقدماتی براساس این دو دیدگاه است.

۱.۱ مفاهیم اولیه در نظریه‌ی گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف ساده Γ را به صورت زوج مرتب $(V(\Gamma), E(\Gamma))$ تعریف می‌کنیم، که در آن $V(\Gamma)$ یک مجموعه ناتهی از عناصری به نام رأس و $E(\Gamma)$ خانواده‌ای از زوج‌های نامرتب از عناصر $V(\Gamma)$ موسوم به یال است. توجه می‌کنیم که گراف ساده، طوقه و یال چندگانه ندارد. در گراف ساده‌ی Γ دو رأس v و w را مجاور گوییم هرگاه یک یال بین آن‌ها وجود داشته باشد و با vw یا $v-w$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ درجه‌ی رأس v در گراف Γ که آن را با $deg_\Gamma(v)$ نمایش می‌دهیم، برابر با تعداد یال‌های واقع بر v می‌باشد. اگر گراف شناخته شده باشد، برای سادگی $deg_\Gamma(v)$ را با $deg(v)$ نشان می‌دهیم. گوییم گراف Γ از نوع m درجه است هرگاه اندازه مجموعه درجه‌های رئوس آن برابر با m باشد.

تعریف ۳.۱.۱ گراف تهی، گرافی است که هیچ یالی ندارد و گراف پوچ گرافی است که هیچ رأس و هیچ یالی ندارد.

تعریف ۴.۱.۱ گراف ساده‌ای را که درآن هر جفت از رئوس متمایز به وسیله‌ی یک یال به هم متصل باشند، گراف کامل می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ گراف $k-$ بخشی، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن را بتوان به k زیرمجموعه به طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه قرار نگیرد.

تعریف ۶.۱.۱ گراف $k-$ بخشی کامل، یک گراف ساده‌ی $k-$ بخشی است که در آن هر رأس با تمام رئوسی که در زیرمجموعه‌ای غیریکسان با آن قرار دارند، مجاور است.

تعریف ۷.۱.۱ گراف Γ، $n-$ منظم است، هرگاه درجه‌ی تمام رئوس آن برابر n باشد. گراف منظم گرافی است که به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، یک گراف $n-$ منظم باشد.

تعریف ۸.۱.۱ گراف Γ' را زیرگراف Γ می‌گوییم، هرگاه مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ی $V(\Gamma)$ و مجموعه‌ی یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از $E(\Gamma)$ باشد.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای ناتهی از $V(\Gamma)$ باشد. در این صورت زیرگرافی از Γ که مجموعه‌ی رئوس آن X و مجموعه‌ی یال‌های آن برابر مجموعه‌ی یال‌هایی از Γ باشد که هر دو رأس آن در X واقع است، زیرگراف القایی Γ روی X می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ زیرمجموعه‌ی X از رئوس گراف را خوشه‌ای برای گراف می‌نامیم، هرگاه زیرگراف القایی Γ روی X، گرافی کامل باشد. عدد خوشه‌ای Γ برابر با اندازه‌ی بزرگترین خوشه‌ی گراف Γ است و با $\omega(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.
خوشه یکی از مفاهیم نظریه‌ی گراف است که در مسائل زیادی از جمله در ریاضیات و علوم کامپیوتر کاربرد دارد. بررسی این که خوشه‌ای به اندازه معین در یک گراف موجود است یا نه (مسأله‌ی خوشه) آسان نیست. با وجود سخت بودن این مسأله الگوریتم‌های زیادی برای یافتن خوشه مورد مطالعه قرار گرفته است. اصطلاح خوشه به لوث و پری[۱] در سال ۱۹۴۹ برمی‌گردد که گراف‌های کامل را برای شبکه‌های اجتماعی جهت مدل دادن خوشه‌ی افراد «گروه‌هایی از اشخاص که همه‌ی آن‌ها همدیگر را می‌شناسند» استفاده می‌کردند.

تعریف ۱۱.۱.۱ زیرمجموعه‌ی X از رئوس گراف Γ را مجموعه‌ی مستقل گوییم، هرگاه زیرگراف القایی روی X گرافی تهی باشد. اندازه بزرگترین مجموعه‌ی مستقل گراف Γ، عدد استقلال Γ می‌نامیم و آن را با $\alpha(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

[۱] Luc and perry

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنیم k یک عدد صحیح مثبت باشد. $k-$ رنگ آمیزی رأسی برای گراف Γ نسبت دادن k رنگ به رئوس گراف Γ است به طوری که دو رأس مجاور همرنگ نباشند. کمترین مقدار kای که به ازای آن Γ، یک $k-$ رنگ آمیزی رأسی داشته باشد را عدد رنگی رأسی Γ می‌نامیم و آن را با $\chi(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

در نظریه‌ی گراف‌ها، رنگ آمیزی گراف حالت خاصی از برچسب گذاری گراف است، بر چسب‌ها که به‌طور سنتی رنگ‌ها هستند به اعضای یک گراف نسبت داده می‌شوند، آسان‌ترین شکل آن رنگ آمیزی رئوس است به طوری که دو رأس مجاور یک رنگ نباشند. رنگ آمیزی یالی و حتی رنگ آمیزی وجهی به طریقی مشابه تعریف می‌شود. در ریاضیات و علوم کامپیوتر معمول است که چند عدد صحیح مثبت را به عنوان رنگ‌ها به کار ببریم. رنگ آمیزی گراف‌ها همانطور که به صورت نظری کاربرد دارد استفاده‌های عملی زیادی نیز دارد. از اولین نتایج رنگ آمیزی گراف می‌توان به رنگ آمیزی گراف‌های مسطح به شکل رنگ آمیزی نقشه‌ها اشاره کرد. زمانی که سعی می‌کردند نقشه‌های شهرستان‌های انگلستان را رنگ کنند، فرنسیس گاتری[۲] حدس چهار رنگ را مطرح کرد، چهار رنگ برای رنگ کردن نقشه کافی است به طوری که مناطقی که مرز مشترک دارند رنگ یکسانی نداشته باشند.

تعریف ۱۳.۱.۱ یک مسیر از Γ عبارت است از دنباله‌ی متناهی $v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$ به طوری که جملات آن یک در میان رئوس و یال‌های متمایز Γ بوده و برای هر $1 \leq i \leq k$، v_{i-1} و v_i دو سر e_i می‌باشند. دنباله‌ی فوق، مسیر بین v_k, v_o است و k را طول این مسیر می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ گراف Γ همبند است هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. درغیر این صورت Γ ناهمبند می‌باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم u و v رئوس گراف Γ باشند. در این صورت فاصله‌ی بین u و v که آن را با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم، عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v.

[۲] Francis Guthrie

بیشترین فاصله‌ی بین رئوس گراف Γ قطر Γ نام دارد و با $diam(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ دو گراف H و G را یکریخت گوییم هرگاه نگاشت‌های دوسویی $\theta : V(G) \to V(H)$ و $\psi : E(G) \to E(H)$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $u, v \in V(G)$ داشته باشیم $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.
دو گراف را مساوی گوییم، هرگاه مجموعه‌ی رئوس و مجموعه یال‌های یکسانی داشته باشند.
در این پایان‌نامه گراف‌ها را ساده در نظر می‌گیریم.

۲.۱ مفاهیم و قضایای مورد نیاز گروه‌ها

دراین بخش برخی از تعاریف نظریه‌ی گروه‌ها، قضایا و لم‌هایی که در ادامه مورد نیازند را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ گروه $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, ba = a^{-1}b \rangle$ که در آن $n \geqslant 3$ را گروه دووجهی از درجه n گوییم.

لم ۲.۲.۱ گروه دووجهی D_{2n} را در نظر بگیرید. در این صورت اگر n فرد باشد، آنگاه مرکز گروه بدیهی است و اگر n زوج باشد، آنگاه مرکز گروه دوری از مرتبه‌ی ۲ است.
برهان: می‌دانیم که $D_{2n} =< a, b|a^n = b^2 = 1, ba = a^{-1}b >$. واضح است که b غیرمرکزی است، زیرا $[a, b] \neq 1$. حال فرض کنید برای یک i، $1 \leq i \leq n$، a^i مرکزی باشد. در این صورت داریم

$$a^i b = ba^i \to a^i b = a^{-i} b \to a^i = a^{-i} \to a^{2i} = 1 = a^n$$

از این رو در حالتی که n زوج باشد، $a^{n/2}$ مرکزی است. اکنون اگر برای یک i، $1 \leq i \leq n$، $a^i b$ مرکزی باشد آنگاه

$$(a^ib)a = a(a^ib) \quad \rightarrow \quad a^{i-1}b = a^{i+1}b \rightarrow a^{i-1} = a^{i+1}$$
$$\rightarrow \quad a^2 = 1 \rightarrow n = 2$$

اگر $n = 2$، آنگاه D_{2n} آبلی است. بنابراین در حالتی که n فرد باشد، مرکز گروه بدیهی و اگر $2\big|n$، آنگاه مرکز گروه برابر با $Z_2 \cong \langle a^{n/2} \rangle$ می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱ گروه $Q_{4n} =< a, b \mid a^n = b^2, a^{2n} = 1, ba = a^{-1}b >$ را گروه چهارگان تعمیم یافته گوییم.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنیم $Q_{4n} =< a, b \mid a^n = b^2, a^{2n} = 1, ba = a^{-1}b >$. در این صورت $Z(Q_{4n}) = \langle a^n \rangle = \langle b^2 \rangle$.

برهان: با توجه با رابطه $b^{-1}ab = a^{-1}$ هر عنصر Q_{4n} به فرم a^ib^j می‌باشد که در آن $0 \leqslant i \leqslant 2n$ و $0 \leqslant j \leqslant 4$. همچنین با توجه به رابطه‌ی $a^n = b^2$، $a^ib^2 = a^{n+i}$ و $a^ib^3 = a^{n+i}b$ بنابراین هر عنصر Q_{4n} به فرم a^ib^j می‌باشد که $0 \leqslant i \leqslant 2n$ و $j = 0, 1$. فرض کنیم $a^ib^j \in Z(G)$. دراین صورت

$$1 = [a^ib^j, b] = b^{-j}a^{-i}b^{-1}a^ib^jb = b^{-j}a^{-i}a^{-i}b^{-1}b^jb = b^{-j}a^{-2i}b^j = a^{2i}.$$

بنابراین $i = n$. چون $a^nb^j \in Z(Q_{4n})$، لذا $[a^nb^j, a] = 1$. از طرفی چون $a^n = b^2$، لذا

$$1 = [a^nb^j, a] = [b^{j+2}, a] = a^2,$$

که تناقض است بنابراین $j = 0$. لذا $Z(Q_{4n}) = \langle a^n \rangle = \langle b^2 \rangle$.

تعریف ۵.۲.۱ گروهی که مرتبه هر عنصر آن متناهی باشد، گروه تابدار گوییم. در صورتی که مرتبه هر عنصر غیربدیهی آن نامتناهی باشد، آن را گروه بدون‌تاب می‌نامیم.

مثال ۶.۲.۱ گروه $\mathbb{Z}_۴$ یک گروه تابدار و گروه $\mathbb{Z}$ یک گروه بدون‌تاب است.

لم ۷.۲.۱ هر گروه آبلی متناهیاً تولید شده تابدار، متناهی است.
برهان : به مرجع [۱۵]، قضیه ۹.۲.۴ مراجعه کنید.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنیم π مجموعه‌ای از اعداد اوّل باشد. عدد صحیح n را یک $\pi-$ عدد می‌نامیم، هرگاه تمام مقسوم‌علیه‌های اوّل n متعلق به π باشد.

تعریف ۹.۲.۱ گروه G را یک $\pi-$ گروه می‌نامیم، هرگاه مرتبه هر عنصر آن یک $\pi-$ عدد باشد.

مثال ۱۰.۲.۱ فرض کنیم $\pi = \{۲,۳,۵\}$. در این صورت $S_۳$ یک $\pi-$ گروه است.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنیم π مجموعه‌ای از اعداد اوّل باشد. زیرگروه H از گروه متناهی G را یک $\pi-$ زیرگروه هال می‌نامیم، هرگاه H یک $\pi-$ زیرگروه و $|G:H|$ یک $\pi'-$ عدد باشد.

مثال ۱۲.۲.۱ در گروه متقارن $S_۳$، زیرگروه $H = \langle(۱\ ۳\ ۲)\rangle$ یک $\{۳,۵\}-$ زیرگروه هال از $S_۳$ است زیرا یک $\{۳,۵\}-$ زیرگروه است و $|S_۳:H| = ۲$ که یک $\{۳,۵\}'-$ عدد است.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه H از گروه G را یک زیرگروه هال می‌نامیم، اگر زیرمجموعه‌ای از اعداد اوّل مانند π وجود داشته باشد به طوری که H یک $\pi-$ زیرگروه هال باشد. توجه داریم که اگر G متناهی باشد، آنگاه $(|H|,|G:H|) = ۱$.

تعریف ۱۴.۲.۱ گروه G را یک $p-$ گروه آبلی مقدماتی گوییم، هرگاه G یک گروه آبلی باشد که مرتبه هر عنصر غیربدیهی آن p است.

مثال ۱۵.۲.۱ ۴- گروه کلاین، یک ۲- گروه آبلی مقدماتی است.

قضیه ۱۶.۲.۱ یک $p-$ گروه متناهی دقیقاً یک زیرگروه از مرتبه p دارد، اگر و تنها اگر یک گروه دوری و یا یک گروه چهارگان تعمیم یافته باشد.
برهان : به مرجع [۱۶]، قضیه ۶.۳.۵ مراجعه کنید.

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنیم G گروهی متناهی و $|G| = p^k m$ که $p \nmid m$، $k \geq ۱$ و p عددی اوّل است. در این صورت هر زیرگروه G از مرتبه p^k را یک $p-$ زیرگروه سیلوی G می‌نامیم. مجموعه تمام $p-$ زیرگروه‌های سیلوی G را با نماد $SYS_p(G)$ نشان می‌دهیم .

مثال ۱۸.۲.۱ در گروه متقارن $S_۳$، زیرگروه $\langle(۱ ۲ ۳)\rangle$ یک ۳- زیرگروه سیلوی $S_۳$ است.

قضیه ۱۹.۲.۱ (قضایای سیلو[۱]) فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه $p^k m$ باشد که در آن $k \geq ۱$ و $p \nmid m$. در این صورت
الف) G حداقل یک $p-$ زیرگروه سیلو دارد.
ب) هر $p-$ زیرگروه در یک $p-$ زیرگروه سیلو قرار دارد.
ج) هر دو $p-$ زیرگروه سیلوی G با هم مزدوج هستند.
د) اگر $n_p(G)$ تعداد $p-$ زیرگروه‌های سیلوی G باشد، آنگاه $n_p(G) \equiv ۱ (mod p)$.
برهان : به مرجع [۱۶]، قضیه ۱۶.۶.۱ مراجعه کنید.

[۱] Sylow

تعریف ۲۰.۲.۱ سری $G_\circ \subseteq G_۱ \subseteq G_۲ \subseteq ... \subseteq G_{n-۱} \subseteq G_n$ از زیرگروه‌های نرمال گروه G را یک سری مرکزی گوییم، هرگاه

$$\frac{G_{i+۱}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i}). \qquad \forall i = \circ, ۱, ۲, ..., n-۱$$

تعریف ۲۱.۲.۱ گروه G را پوچ‌توان گوییم هرگاه G دارای یک سری مرکزی به صورت زیر باشد

$$G_\circ \subseteq G_۱ \subseteq G_۲ \subseteq ... \subseteq G_{n-۱} \subseteq G_n$$

به طوری که $G_\circ = \{e\}$ و $G_n = G$.

مثال ۲۲.۲.۱ هر گروه آبلی پوچ‌توان است. زیرا اگر G آبلی باشد، آنگاه $\{e\} \subseteq G$ یک سری مرکزی از زیرگروه‌های نرمال G است.

مثال ۲۳.۲.۱ گروه $D_۸$ پوچ‌توان است. زیرا $\{e\} \subseteq \langle a^۲ \rangle \subseteq D_۸$ یک سری مرکزی از زیرگروه‌های نرمال $D_۸$ است.

قضیه ۲۴.۲.۱ کلاس گروه‌های پوچ‌توان تحت آرایش زیرگروه‌ها، تصویر هم ریخت و حاصل ضرب مستقیم متناهی بسته است.
برهان : به مرجع [۱۶]، قضیه ۴.۱.۵ مراجعه کنید.

قضیه ۲۵.۲.۱ هر $p-$ گروه متناهی پوچ‌توان است.
برهان : به مرجع [۱۶]، قضیه ۳.۱.۵ مراجعه کنید.

قضیه ۲۶.۲.۱ فرض کنیم G گروهی متناهی باشد. دراین صورت شرایط زیر معادلند:
الف) G پوچ توان است.

ب) هر زیرگروه ماکسیمال G یک زیرگروه نرمال G است.

ج) هر زیرگروه سیلوی G یک زیرگروه نرمال G است.

د) اگر H زیرگروه سره G باشد، آنگاه $H \subsetneqq N_G(H)$.

ه) G با حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش یکریخت است.

برهان : به مرجع [۱۶]، قضیه ۴.۲.۵ مراجعه کنید.

قضیه ۲۷.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد به طوری که به ازای هر دو عدد اوّل q, p، هر $p-$ عنصرش با هر $q-$ عنصرش جابجا شود. در این صورت G پوچ توان است.

برهان : بنا به قضیه قبل کافی است نشان دهیم هر زیرگروه سیلوی G نرمال است. فرض کنیم $|G| = {p_1}^{t_1}{p_2}^{t_2}\dots{p_r}^{t_r}$ تجزیه $|G|$ به عوامل اوّل باشد وبه ازای هر $1 \leqslant i \leqslant r$، S_i یک p_i- زیرگروه سیلوی G باشد، اکنون به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant r$ اگر $a \in S_i \cap S_1S_2\dots S_{i-1}S_{i+1}\dots S_r$، آنگاه $a = a_i \in S_i$ و نیز

$$a = a_1a_2\dots a_{i-1}a_{i+1}\dots a_r \in S_1S_2\dots S_{i-1}S_{i+1}\dots S_r.$$

لذا $o(a)|{p_i}^{t_i}$ و از طرف دیگر بنابه فرض به ازای هر $1 \leqslant i, j \leqslant r$، $a_ia_j = a_ja_i$. در نتیجه $o(a) = o(a_1)\dots o(a_{i-1})o(a_{i+1})\dots o(a_r)$ یعنی $o(a)|{p_1}^{t_1}{p_2}^{t_2}\dots{p_{i-1}}^{t_{i-1}}{p_{i+1}}^{t_{i+1}}\dots{p_r}^{t_r}$، پس $o(a) = 1$ و لذا $a = e$. در نتیجه به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant r$،

$$S_i \cap S_1S_2\dots S_{i-1}S_{i+1}\dots S_r = \{e\}$$

بنابراین $|G| = |S_1\dots S_r|$ و در نتیجه $G = S_1\dots S_r$. اکنون فرض کنیم به ازای $1 \leqslant i \leqslant r$، $a_i \in S_i$ و $g \in G$ عناصر دلخواه باشند. در این صورت عناصر g_i در G_i وجود دارند که $g = g_1\dots g_r$ در نتیجه $g^{-1}a_ig = {g_r}^{-1}\dots{g_1}^{-1}a_ig_1\dots g_r$ و چون به ازای هر $i \neq j$، $g_ja_i = a_ig_j$، لذا $g^{-1}a_ig = {g_i}^{-1}a_ig_i \in S_i$. بنابراین $S_i \lhd G$ و لذا $G = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_r$.

تعریف ۲۸.۲.۱ گروه آبلی D را بخش‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر $y \in D$ و هر عدد صحیح مخالف صفر مانند n، عنصری مانند $x \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $nx = y$.