دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
وزارت علوم و تحقیقات و فناوری
دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض
گرایش آنالیز

عنوان:

یک مساله‌ی تعادل تعمیم یافته و ارتباط آن با نقاط ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی روی فضاهای هیلبرت

استاد راهنما:
دکتر علی آبکار

استاد مشاور:
دکتر عبدالرحمان رازانی

توسط:
زویا متولی

بهمن

ای بس که نباشیم و جهان خواهد بود
نی نام ز ما و نی نشان خواهد بود
زین پیش نبودیم و نبد هیچ خلل
زین پس چو نباشیم همان خواهد بود

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

زویا متولی

چکیده

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت حقیقی، C زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از آن و $A : C \to H$ عملگری غیرخطی باشد. یک مساله‌ی تغییراتی برای A، عبارت است از یافتن عضوی از C مانند z، به طوری که برای هر $y \in C$، نامساوی $\langle Az, y - z\rangle \geq 0$ برقرار باشد. به طور مشابه، یک مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته عبارت است از یافتن همه zهایی از C، به گونه‌ای که برای هر $y \in C$ داشته باشیم:

$$F(z, y) + \langle Az, y - z\rangle \geq 0,$$

که در آن $F : C \times C \to \mathbb{R}$ تابعی دوگانه است که در شرایط خاصی صدق می‌کند. هدف اصلی این پایان‌نامه، تقریب جواب مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته‌ی بالا است؛ به صورت یافتن دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ که به یک جواب مساله همگرا باشد. معلوم خواهد شد که تقریب جواب مساله‌های تعادل، ارتباط بسیار نزدیکی با تقریب نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی دارد که اخیراً توسط ریاضی‌دانان مورد مطالعه قرار گرفته و شرح مفصل آنها توسط دانشجویان قبلی به صورت پایان‌نامه ارائه شده است.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

ضرب داخلی x, y	$\langle x, y\rangle$
فضای هیلبرت حقیقی	H
تصویر متریک روی C	P_C
میدان حقیقی به انضمام $\{+\infty\}$	$\bar{\mathbb{R}}$
همگرایی قوی	$\rightarrow$
همگرایی ضعیف	$\rightharpoonup$
دامنه‌ی نگاشت T	$Dom\ T$
دامنه‌ی مؤثر نگاشت T	$D(T)$
نمودار نگاشت T	$G(T)$
مخروط قائم به C در نقطه‌ی v	$N_C v$
مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت S	$Fix(S)$
مجموعه جواب‌های نامعادله‌ی تغییراتی	$VI(C, A)$
مجموعه جواب‌های مساله‌ی تعادل	$EP(F)$
مجموعه جواب‌های مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته	EP

فصل ۱

مقدمه

حل یک مساله‌ی تعادل[1]، یافتن جواب یک نامعادله‌ی تغییراتی[2] و تقریب نقطه‌ی ثابت نگاشتی غیرانبساطی[3] از مسائل کاربردی و حائز اهمیتی در ریاضیات هستند.
ریاضی‌دانان به طور مجزا و وسیع، به مطالعه‌ی هر یک از مسائل بالا پرداخته و روش‌هایی برای تقریب جوابی از آنها ارائه کرده‌اند. اهمیت این مسائل و ارتباط ظریف آنها با هم، ریاضی‌دانان را بر آن داشته است که این مسائل را به شکل‌های مختلف ترکیب کرده و به روش‌های گوناگون، به تقریب جوابی از آنها بپردازند.
حال برای آن که بدانیم « در کجای این جهان ایستاده‌ایم!»، به شرح مختصری از تاریخچه‌ی مقالات بالا می‌پردازیم.
برای سادگی کار، تاریخچه را به پنج عنوان تقسیم کرده و به توضیحی مختصر در هر مورد می‌پردازیم.
در تمامی موارد با فرض ناتهی بودن مجموعه‌ی جواب‌ها، روش‌هایی برای تقریب نقطه‌ای از آنها ارائه

[1] Equilibrium problem
[2] Variational inequality
[3] Nonexpansive mapping

شده است. در تمامی تعاریف و قضایا، H یک فضای هیلبرت [۴] حقیقی، C زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از H و P_C تصویر متریک [۵] از H به‌روی C می‌باشد.

ب) نامعادلات تغییراتی

یک مساله‌ی نامعادله‌ی تغییراتی، عبارت است از یافتن عضوی در C مانند z، به طوری که برای هر $y \in C$ داشته باشیم

$$\langle Az, y - z \rangle \geq 0,$$

که در آن $A : C \to H$ نگاشتی دلخواه است. مجموعه جواب‌های نامعادله‌ی تغییراتی را با $VI(C, A)$ نمایش می دهیم.

در سال ۱۹۷۶، خانم کارپلویچ [۶] [۱۲] روش اکستراگرادیانت [۷] را در فضای متناهی البعد اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، برای تقریب نقطه‌ای از $VI(C, A)$ ارائه کرد. او نشان داد دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تولید شده توسط

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \qquad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

به نقطه‌ای از $VI(C, A)$ همگرا هستند. این روش به فضاهای هیلبرت و باناخ هم گسترش یافت.

در سال ۲۰۰۴، لیدُکا، تاکاهاشی و تویودا [۸] [۲۶] ثابت کردند دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده به صورت

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ x_{n+1} = P_C(\, \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)\, P_C(x_n - \lambda_n A x_n)), \qquad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

تحت فرض‌های مناسب روی دنباله‌های $\{\lambda_n\}$ و $\{\alpha_n\}$، به طور ضعیف به عنصری از $VI(C, A)$ همگراست. در الگوریتم بالا $A : C \to H$ نگاشتی α ـ قویاً یکنوای معکوس [۹] است.

پ) تقریب عنصر مشترکی از جواب‌های یک نامعادله‌ی تغییراتی و نقاط ثابت نگاشت‌های

[۴] Hilbert space
[۵] Metric projection
[۶] Korpelevich
[۷] Extragradient method
[۸] Liduka,Takahashi,Toyoda
[۹] inverse strongly monotone

غیرانبساطی

در سال ۲۰۰۳، تاکاهاشی و تویودا [۲۹] دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\ SP_C(x_n - \lambda_n A x_n), \qquad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

را معرفی کردند که در آن $A : C \to H$ نگاشتی قویاً یکنوای معکوس و S خودنگاشتی غیرانبساطی روی C است. اگر $\{\lambda_n\} \in (0, 2\alpha)$ و $\{\alpha_n\} \in (0, 1)$ باشند، آن‌گاه دنباله‌ی مذکور به طور ضعیف به $z = \lim_{n\to\infty} P_{Fix(S)\cap VI(C,A)} x_n$ همگراست.

در همان سال، تاکاهاشی و لیدُکا [۱۳] با اضافه کردن چهار شرط روی دنباله‌های $\{\alpha_n\}$ و $\{\lambda_n\}$ مقاله‌ی [۲۹]، با اثبات یک قضیه‌ی همگرایی قوی، نتایج قضیه‌ی مذکور را به دست آوردند.

در سال ۲۰۰۶، تاکاهاشی و نادژکینا[10] [۱۷] و یااو و زِنگ[11] [۳۸] به روش اکستراگرادیانت، الگوریتم‌هایی تکراری برای یافتن عنصری از $Fix(S) \cap VI(C, A)$ ارائه کردند که در آنها، A نگاشتی یکنوا و k ـ لیپ‌شیتز بود و قضایای همگرایی ضعیفی را در فضای H به اثبات رساندند.

در همان سال، یااو [۳۶] بر پایه‌ی روش اکستراگرادیانت و با فرض این که $A : C \to H$ نگاشتی قویاً یکنوای معکوس باشد، دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده به صورت

$$\begin{cases} x_1 = u \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n\ SP_C(y_n - \lambda_n A y_n), \end{cases}$$

را معرفی کرد که به طور قوی به عنصری از $Fix(S) \cap VI(C, A)$ همگرا می‌باشد.

ت) مساله‌ی تعادل

فرض کنیم $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی حقیقی باشد.این سوال را می‌توان مطرح کرد که:

« آیا مقدار حقیقی مانند z موجود است که به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی y، $F(z, y) \geq 0$ باشد؟»

حال فرض کنیم که C زیرمجموعه‌ای محدب از یک فضای برداری ــ توپولوژیک باشد و تابع $F : C \times C \to \mathbb{R}$ برای هر $x \in C$ در شرط $F(x, x) \geq 0$ صدق کند. بلوم و اُتیل[12] [۱] در سال ۱۹۹۴

[10] Nadezhkina
[11] Zeng
[12] Blum,Oettli

با فرض‌های بالا مساله‌ای را تحت عنوان مساله‌ی تعادل به صورت زیر مطرح کردند:

« $z \in C$ را به گونه‌ای بیابید که به ازای هر $y \in C$، $F(z,y) \geq 0$ باشد.»

مجموعه‌ی zهایی از C که واجد خاصیت بالا باشند، یعنی نقاط تعادل را با $EP(F)$ نمایش می دهیم.
مساله تعادل در سال ۱۹۹۷، توسط فلم و آنتی‌پین[۱۳] [۱۰] روی فضای هیلبرت حقیقی H مطرح شد که در آن C زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب در H و $F : C \times C \to \mathbb{R}$ یک تابع دوگانه[۱۴] با شرط $F(x,x) = 0$، برای هر $x \in C$ است.
مساله‌ی تعادل به عنوان الگویی برای حل و متحد کردن مسائل بسیاری در علوم کاربردی، جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است. تا آنجا که حل بسیاری از مسائل در علوم اقتصاد، فیزیک و مهندسی، مسائل بهینه سازی[۱۵]، مسائل نقطه ثابت[۱۶]، مساله‌ی تعادل نش در نظریه بازی[۱۷]، مساله‌ی تعادل برداری[۱۸]، مسائل مینیماکس[۱۹]، مسائل مینیمم سازی[۲۰]، مساله‌ی شمول یکنوا[۲۱]، مساله‌ی نقطه‌ی زینی[۲۲] و مساله‌ی متمم[۲۳] منوط به یافتن جوابی از مساله‌ی تعادل می باشد.
یکی از بهترین مقالات در زمینه‌ی تقریب نقطه‌ای از $EP(F)$، توسط کامبتس و هیرستوگا[۲۴] [۹] در سال ۲۰۰۵ ارائه شده است. آنها چندین روش تکرار برای حل یک سیستم تعادل (خانواده‌ای از توابع دوگانه) معرفی کرده و همگرایی آنها را به نقطه‌ای از مجموعه جواب این سیستم ثابت کرده‌اند.
ریاضی‌دانان در طول دو دهه‌ی اخیر، مساله‌ی تعادل را به شکل‌های مختلفی بررسی کرده‌اند.
آنها به تقریب عنصر مشترکی از جواب‌های $EP(F)$ و نقاط ثابت نگاشتی غیرانبساطی، تقریب عنصر مشترکی از جواب‌های $EP(F)$ و جواب یک نامعادله‌ی تغییراتی خاص و یافتن عنصر مشترکی از مجموعه جواب‌های هر سه مساله پرداخته‌اند. در برخی مقالات، مساله‌ی یافتن عنصر مشترکی از

[۱۳] Flam, Antipin
[۱۴] Bifunction
[۱۵] Optimization problems
[۱۶] Fixed point problems
[۱۷] Nash equilibrium problem in game theory
[۱۸] Vector equilibrium problem
[۱۹] Minimax problems
[۲۰] Minimization problems
[۲۱] Monotone inclusion problem
[۲۲] Saddle point problem
[۲۳] Complementarity problem
[۲۴] Combettes, Hirstoaga

جواب‌های $EP(F)$ و نقاط ثابت یک نگاشت غیرانبساطی را به مساله‌ی یافتن عنصر مشترکی از جواب‌های $EP(F)$ و نقطه‌ی ثابت مشترکی از خانواده‌ای متناهی یا نامتناهی ولی شمارا، از نگاشت‌های غیرانبساطی وسعت داده‌اند.

اخیراً نیز، نشان داده‌اند که جواب‌های $EP(F)$، نقاط ثابت نگاشتی اکیداً شبه‌انقباضی[۲۵] نیز می‌باشد.

بعدها، مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته[۲۶] و مساله‌ی تعادل آمیخته[۲۷] مطرح شد و و پژوهش‌هایی در زمینه‌ی تقریب جوابی از آنها، به طور مستقل و یا در ترکیب با مسائل دیگر انجام شد.

یک مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته، عبارت است از یافتن همه‌ی zهایی از C، به طوری که برای هر $y \in C$ داشته باشیم

$$F(z, y) + \langle Az, y - z \rangle \geq 0,$$

که در آن $A : C \to H$ نگاشتی غیرخطی است. مجموعه جواب های مساله‌ی بالا را با EP نمایش می دهیم.

همچنین مساله‌ی تعادل آمیخته که اولین بار توسط یااو و سِنگ[۲۸] [۴] در سال ۲۰۰۸ ارائه شد، عبارت است از یافتن همه‌ی $z \in C$هایی، به طوری که برای هر $y \in C$ داشته باشیم

$$F(z, y) + \phi(y) \geq \phi(z).$$

در رابطه‌ی بالا $\phi : C \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابعی سره[۲۹] است.

کلیه‌ی مقالات، در سطح وسیعی در فضاهای هیلبرت یا باناخ[۳۰] با دنباله‌هایی که به طور ضعیف یا قوی به عناصر مورد نظر میل می‌کردند، ارائه شده‌اند. در ادامه، در جریان جزئیات بیشتری از مقالات مذکور قرار خواهیم گرفت.

تقریب عنصر مشترکی از جواب‌های مساله‌ی تعادل و نقاط ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی

زمانی که مساله‌ی تعادل را برای هر $y \in C$ حل می‌کنیم، خواهیم دید نقطه‌ی تعادل، نقطه‌ی ثابت یک

[۲۵] Strictly pseudo-contractive
[۲۶] Generalized equilibrium problem
[۲۷] Miexed equilibrium problem
[۲۸] Yao,Ceng
[۲۹] Proper function
[۳۰] Banach

نگاشت غیرانبساطی نیز می‌باشد. به این جهت بسیاری توجه خود را به یافتن روش‌هایی برای دستیابی به عضو مشترکی از مجموعه نقاط ثابت یک نگاشت غیرانبساطی و مجموعه جواب‌های مساله‌ی تعادل معطوف کرده‌اند.

لازم به ذکر است که مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت غیرانبساطی S را با $Fix(S)$ نمایش می دهیم.

در سال ۲۰۰۷، تاکاهاشی‌ها [۲۸] به انگیزه‌ی مقالات [۹, ۳۰] فرآیند تکراری زیر را با استفاده از روش تقریب چسبندگی مودافی، در فضای هیلبرت ارائه کردند:

فرض کنیم $S : C \to H$ نگاشتی غیرانبساطی و f یک انقباض روی H باشد. اگر $x_1 \in H$ نقطه‌ی آغازین دلخواهی فرض شود، دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, & \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)\ Su_n, & \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

با اعمال شرایط مناسب روی دنباله‌های $\{\alpha_n\}$ و $\{r_n\}$، به طور قوی به $z = P_{Fix(S)\cap EP(F)}f(z)$ همگراست.

این مقاله، انگیزه‌ی قوی‌ای برای نوشتن مقالاتی شد که به ارائه‌ی روش‌های جدید با کاربردهای وسیع‌تر می‌پرداختند. یکی از این مقالات، مقاله‌ای بود که در همان سال توسط پلابتینگ و پانپنگ[۳۱] [۱۹] ارائه شد. دنباله‌ی مورد نظر آنها به طور قوی به $x^* \in Fix(S) \cap EP(F)$ که جواب یکتای نامعادله‌ی تغییراتی (۱) با شرط $x \in Fix(S) \cap EP(F)$ است، همگرا بود.

از طرفی، تادا[۳۲] و تاکاهاشی [۲۵] به روشی ترکیبی[۳۳]، دو الگوریتم تکراری برای تقریب نقطه‌ای از $Fix(S) \cap EP(F)$ ارائه کردند و دو قضیه همگرایی ضعیف و قوی را به اثبات رساندند.

قضیه همگرایی قوی به صورت زیر است:

[۳۱] Plubtieng,Punpaeng
[۳۲] Tada
[۳۳] Hybrid method

فرض کنیم $x_1 = x \in H$ باشد. برای هر $n \in N$ داریم

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, & \forall y \in C, \\ w_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n \, Su_n, \\ C_n = \{z \in H : \ \|w_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ D_n = \{z \in H : \ \langle x_n - z, x - x_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_N \cap D_n} x. \end{cases}$$

دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم بالا تحت شرایط مناسب روی دنباله‌های $\{\alpha_n\}$ و $\{r_n\}$، به $P_{Fix(S)\cap EP(F)}x$ همگرا است.

در سال ۲۰۰۸، کولااو[۳۴]، مارینو[۳۵] و خی [۸] به انگیزه‌ی مقاله‌ی [۱۹] ولی تحت فرض‌های ضعیف‌تر، با در نظر گرفتن $\{S_i\}_{i=1}^{N}$ به عنوان خانواده‌ای متناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی، دنباله‌ای معرفی کردند که به طور قوی به $x^* \in \cap_{i=1}^{N} Fix(S_i) \cap EP(F)$ که جواب یکتای نامعادله‌ی تغییراتی (۱) با شرط $x \in \cap_{i=1}^{N} Fix(S_i) \cap EP(F)$ است، همگرا می‌باشد.

در همان سال، یااو و لیو [۳۵] بر پایه‌ی مقالات [۲۸, ۹] به تقریب نقطه‌ای از $\cap_{i=1}^{\infty} Fix(S_i) \cap EP(F)$ پرداختند و یک قضیه‌ی همگرایی قوی را در فضای H به اثبات رساندند.

تقریب عنصر مشترکی از جواب‌های مساله‌ی تعادل، یک نامعادله‌ی تغییراتی و نقاط ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی

در سال ۲۰۰۷، سو، شانگ و کواین[۳۶] [۲۳] بر مبنای مقالات [۱۳, ۲۸]، به روش تقریب چسبندگی مودافی و همچنین در سال ۲۰۰۸، پلابتینگ و پانپنگ [۲۰] بر پایه‌ی مقالات [۳۶, ۲۸] و به روش اکستراگرادیانت، دنباله‌هایی معرفی کردند که به طور قوی به عنصری از $Fix(S) \cap EP(F) \cap VI(C, A)$ همگرا بودند.

---
[۳۴] Colao
[۳۵] Marino
[۳۶] Su,Shang,Qin

در سال ۲۰۰۸، چانگ، لی و چان[۳۷] [۵] به روش اکستراگرادیانت، دنباله‌ی جدیدی تولید شده توسط

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \qquad \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n w_n k_n, \\ k_n = P_C(y_n - \lambda_n A y_n), \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n A u_n), \end{cases}$$

را معرفی کردند که تحت فرض‌های مناسب، به طور قوی به $z \in F \cap EP(F) \cap VI(C, A)$ همگرا است.

در این الگوریتم، $w_n : C \to C$ یک W ـ نگاشت تولید شده توسط خانواده‌ای نامتناهی و شمارا از نگاشت‌های غیرانبساطی $S_1, S_2, ...$ و ضرایب حقیقی $\lambda_1, \lambda_2, ...$ و $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} Fix(S_i)$ ناتهی فرض شده است. همچنین همانند دو روش قبل، $A : C \to H$ نگاشتی قویاً یکنوای معکوس و f یک انقباض روی H می‌باشد.

ث) مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته

یک مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته، از مجموع یک مساله‌ی تعادل و یک نامعادله‌ی تغییراتی به‌دست می‌آید. اهمیت این مساله، با توجه به شرح مختصری که از کاربردهای مساله‌ی تعادل و نامعادله‌ی تغییراتی ذکر شد، کاملاً آشکار است.

در سال ۲۰۰۸، مودافی [۱۵] روش تکراری برای تقریب نقطه‌ای از $Fix(S) \cap EP$ ارائه کرد و یک قضیه‌ی همگرایی ضعیف را در فضای H به اثبات رساند. در همان سال واتارا تاکاهاشی و ساتورا تاکاهاشی [۲۷] بر پایه‌ی روش مودافی، روش تکرار دیگری برای تقریب نقطه‌ای از $Fix(S) \cap EP$ ارائه کردند. در الگوریتم آنها، با فرض این که $A : C \to H$ نگاشتی قویاً یکنوای معکوس و $u, x_1 \in C$ باشند، دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط

$$\begin{cases} F(z_n, y) + \langle Ax_n, y - z_n\rangle + \frac{1}{\lambda_n}\langle y - z_n, z_n - x_n\rangle \geq 0, \qquad \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n)\, S(\alpha_n u + (1 - \alpha_n) z_n), \qquad \forall n \in N, \end{cases}$$

با اعمال شرایطی که شرح کامل جزئیات آن در فصل سوم پایان‌نامه ارائه خواهد شد، به طور قوی به $z = P_{Fix(S) \cap EP} u$ همگراست. قضیه‌ی بالا نتایج بسیاری از مسائل نقطه ثابت، نامعادلات تغییراتی و

[۳۷] Chang, Lee, Chan

مساله‌ی تعادل را گسترش داده و بهبود می‌بخشد.

در سال ۲۰۰۹، چو[۳۸]، کواین و کانگ[۳۹] [٦] به روش تصویر ترکیبی[۴۰]، ثابت کردند اگر برای هر $x \in C$، نگاشت $S_k : C \to C$ را با ضابطه‌ی $S_k x = kx + (1-k)Sx$ تعریف کنیم که در آن S یک خودنگاشت kـ اکیداً شبه‌انقباضی روی C با $Fix(S) \neq \emptyset$ باشد، با فرض این که A و B دو نگاشت قویاً یکنوای معکوس هستند، دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط

$$\begin{cases} x_1 \in C, \quad C_1 = C, \\ F(u_n, y) + \langle Ax_n, y - u_n \rangle + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \qquad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(u_n - \lambda_n Bu_n), \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_k z_n, \\ C_{n+1} = \{w \in C_n : \|y_n - w\| \leq \|x_n - w\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_1, \end{cases}$$

تحت فرض‌های مناسب روی $\{\lambda_n\}$، $\{\alpha_n\}$ و $\{r_n\}$ به طور قوی به $P_F x_1$ همگراست که در آن $F = Fix(s) \cap EP \cap VI(C, B)$ می‌باشد.

ما در فصل چهارم پایان‌نامه، جزئیات برهان قضیه‌ی بالا را به طور کامل شرح خواهیم داد.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است :

در فصل دوم، ابتدا به بیان تعاریف مقدماتی و لم‌های پیش‌نیاز می‌پردازیم. نامعادله‌ی تغییراتی، مساله‌ی تعادل و مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته را تعریف کرده و چگونگی ارتباط آنها را با هم بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم، با یک روش تکرار، به تقریب عنصری از جواب‌های یک مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته و نقاط ثابت نگاشتی غیرانبساطی می‌پردازیم. در ادامه سه کاربرد برای این قضیه بیان می‌کنیم.

در فصل پایانی، به روش ترکیب تصویری، دنباله‌ای معرفی می‌کنیم که به طور قوی به عنصر مشترکی از جواب‌های یک مساله‌ی تعادل تعمیم‌یافته، یک نامعادله‌ی تغییراتی برای نگاشتی قویاً یکنوای معکوس و نقاط ثابت نگاشتی اکیداً شبه‌انقباضی همگراست. در انتهای فصل، چهار قضیه‌ی همگرایی قوی آورده شده است که تحت عنوان نتایج، کاربردی از قضیه‌ی اصلی فصل خواهند بود.

[۳۸] Cho
[۳۹] Kang
[۴۰] Hybrid projection method

این پایان‌نامه براساس مقاله‌های زیر تهیه و تنظیم شده است:

[1] Y.J.Cho, X.Qin, J.L.Kang, **Convergence theorems based on hybrid methods for generalized equilibrium problems and fixed point problems**, Nonlinear Anal.71 (2009)4203-4214.

[2] S.Takahashi, W.Takahashi, **Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and a nonexpansive mapping in a Hilbert space**, Nonlinear Anal.69(2008)1025-1033.

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۲ پیش‌نیازها

در سراسر این پایان‌نامه فرض می‌کنیم H یک فضای هیلبرت حقیقی با ضرب داخلی $\langle \cdot,\cdot \rangle$ و نرم القایی $\|\cdot\|$ است. همچنین C زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از H می‌باشد.

۱.۱.۲ گزاره. برای هر $x, y \in H$ داریم

$$\|x+y\|^{۲} \leq \|x\|^{۲} + ۲\langle y, x+y \rangle.$$

برهان. رابطه‌ی بالا به سادگی از تعریف ضرب داخلی نتیجه می‌شود. □

۲.۱.۲ گزاره. برای هر $x, y, z, u \in H$ داریم

$$\langle x-y, z-u \rangle = \frac{۱}{۲}\{\|x-y\|^{۲} + \|z-u\|^{۲} - \|(x-y)-(z-u)\|^{۲}\}.$$

برهان. در هر فضای هیلبرت حقیقی H، تساوی زیر برقرار است

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle, \qquad \forall a, b \in H.$$

با توجه به رابطه‌ی بالا، برهان این گزاره بدیهی است. □

۳.۱.۲ گزاره. برای هر $x, y \in H$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داریم

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

برهان.

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 &= \lambda^2\|x\|^2 + (1-\lambda)^2\|y\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle \\ &= \lambda\|x\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|y\|^2 \\ &\quad + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, y\rangle \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)[\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle] \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

□

۴.۱.۲ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک و $F : X \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$D(F) = \{x \in X : \ F(x) < +\infty\},$$

را دامنه‌ی مؤثر[1] تابع F می‌نامیم. اگر $D(F) \neq \emptyset$، آن‌گاه گوییم F یک تابع سره است.

۵.۱.۲ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. تابع $F : X \to \bar{\mathbb{R}}$ را محدب نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y).$$

بدیهی است که دامنه‌ی تابع محدب F، مجموعه‌ای محدب است.

[1] Effective-domain

۶.۱.۲ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. گوییم تابع $F : X \to \bar{\mathbb{R}}$ در $x_\circ \in X$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی [۲] است اگر

$$\liminf_{x \to x_\circ} F(x) = \sup_{V \in \Lambda_{x_\circ}} \inf_{x \in V} F(x) = F(x_\circ).$$

در رابطه‌ی بالا، $\Lambda_{x_\circ}$ مجموعه‌ی تمام همسایگی های نقطه‌ی $x_\circ$ می‌باشد.
F را روی X نیم‌پیوسته‌ی پایینی نامیم، هرگاه در هر $x \in X$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی باشد.

۷.۱.۲ تعریف. فرض کنیم N زیر مجموعه‌ای دلخواه از فضای برداری توپولوژیکی X باشد. N را یک مخروط گوییم، هرگاه

(i) اگر $x, y \in N$ باشند، آنگاه $x + y \in N$.

(ii) اگر $x \in N$ باشد، آنگاه برای هر $\lambda > \circ$، $\lambda x \in N$.

۸.۱.۲ تعریف. نگاشت $A : C \to H$ را k ـ لیپ‌شیتز نامیم، هرگاه عدد حقیقی و مثبتی چون k موجود باشد به گونه‌ای که برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$\|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|.$$

۹.۱.۲ تعریف. خودنگاشت S بر C را غیرانبساطی نامیم، هرگاه برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|.$$

مجموعه‌ی نقاط ثابت نگاشت غیرانبساطی S را با $Fix(S)$ نمایش می دهیم؛ یعنی

$$Fix(S) = \{x \in C : \ Sx = x \}.$$

در سراسر این پایان‌نامه، فرض بر این است که $Fix(S) \neq \emptyset$.

۱۰.۱.۲ گزاره. اگر C زیرمجموعه‌ای بسته، محدب و کران‌دار از فضای هیلبرت H و S خودنگاشتی غیرانبساطی روی C باشد، در این صورت $Fix(S) \neq \emptyset$ است.

[۲] Lower semicontinuous