بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مراغه
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه:
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز
عنوان :

تعمیم نامساوی هایی از نوع مینکوفسکی برای انتگرال های سوگینو

استاد راهنمای اول:
دکتر بیاض دارابی

استاد راهنمای دوم:
دکتر شهرام نجف‌زاده

استاد مشاور:
دکتر اصغر رحیمی

پژوهشگر:
فاطمه قدیمی

مرداد ماه ۱۳۹۰
شماره ۱۵

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر بیاض دارابی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید، و از جناب آقای دکتر شهرام نجف زاده که زحمت مطالعه این پایان نامه را تقبل فرمودند و به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. و همچنین از استاد مشاور خود، جناب آقای دکتر اصغر رحیمی کمال تشکر و قدردانی را دارم.
در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم .

فاطمه قدیمی
مرداد ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

نام خانوادگی دانشجو: قدیمی نام: فاطمه
عنوان پایان نامه: تعمیم نامساوی هایی از نوع مینکوفسکی برای انتگرال های سوگینو
استاد راهنمای اول: دکتر بیاض دارابی استاد راهنمای دوم: دکتر شهرام نجف زاده استاد مشاور: دکتر اصغر رحیمی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز
دانشگاه: مراغه دانشکده: ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۸۰
کلمات کلیدی: نامساوی مینکوفسکی ، توابع هم یکنوا ، اندازه فازی، انتگرال سوگینو
چکیده یکی از نامساوی های مشهور ریاضی، نامساوی مینکوفسکی است. نامساوی کلاسیک مینکوفسکی توسط مینکوفسکی در سال ۱۹۱۰ منتشر شد. این نامساوی از نقطه نظر ریاضی و کابردی بسیار مهم است. در کل هر نامساوی انتگرالی می تواند یک ابزار قوی برای کاربردها باشد. به ویژه وقتی به یک عملگر انتگرالی به عنوان یک ابزار محمولی فکر می کنیم، آنگاه یک نامساوی انتگرالی در اندازه گیری و بعد سازی چنین فرایندهایی کاربردی می تواند مهم باشد. در این پایان نامه قصد داریم تعمیمی از نامساوی های مینکوفسکی را برای انتگرال های سوگینو روی فضاهای مجرد ارائه دهیم.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیشگفتار

منطق فازی[۱] در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی زاده[۲] از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی ارائه شد. در سال ۱۹۷۲ میشیو سوگینو[۳] از انستیتو تکنولوژی توکیو نظرات زاده را با ارائه مفاهیم اندازه فازی و انتگرال فازی (همچنین معروف به انتگرال سوگینو) تعقیب کرد. سوگینو اندازه فازی را مانند توابع مجموعه ای پیوسته و یکنوا با هدف ارزیابی کردن کمیت غیر جمعی[۴] در دستگاه های مهندسی معرفی کرد. اندازه های فازی متفاوت زیادی مانند اندازه های گمان[۵] و اندازه های فازی امکان[۶] و ... موجودند. به ویژه در شاخه های متفاوت ریاضی انواع زیادی از توابع مجموعه ای غیر جمعی وجود دارد.

اندازه ها و انتگرال های فازی می توانند برای مدل بندی مسائل در محیط غیر قطعی مورد استفاده واقع شوند. انتگرال های فازی یا انتگرال های سوگینو ویژگی های جالب زیادی از نقطه نظر ریاضی دارند.

بعد از معرفی اندازه وانتگرال فازی توسط سوگینو، این مفاهیم توسط بسیاری مورد بحث و بررسی قرار گرفت. رالسکو[۷] و آدامز[۸] برد اندازه های فازی را از $[0, 1]$ به $[0, \infty]$ تعمیم داده و چندین تعریف معادل از انتگرال های فازی ارائه دادند. در حالی که پاپ،[۹] وانگ[۱۰] و کلیر[۱۱] یک نظر اجمالی از نظریه اندازه های فازی ارائه دادند. رومن-فلورس[۱۲] و دیگران جنبه های

---

[۱] Fuzzy Logic

[۲] Lotfi A. Zadeh

[۳] M. Sugeno

[۴] Non-additive

[۵] Belief

[۶] Possibility

[۷] D. Ralescu

[۸] G. adams

[۹] E. Pap

[۱۰] Wang

[۱۱] Klir

[۱۲] Román-Flores

سطح-پیوستگی و H-پیوستگی انتگرال های فازی را بررسی کردند. برخی دیگر از محققان نیز انتگرال سوگینو را با استفاده از برخی عملگرهای دیگر به جای عملگر ویژه $\vee$ (سوپریمم) و $\wedge$ (اینفیمم) تعمیم دادند. و به این ترتیب سوآرز[۱۳] و ژیل[۱۴] دو خانواده از انتگرال های فازی معروف به انتگرال های نیم نرم فازی و انتگرال های نیم همنرم فازی هستند، را معرفی کردند. نامساوی های انتگرال نتایج مفیدی در زمینه های کاربردی و تئوریکال هستند. در کل هر نامساوی انتگرالی می تواند ابزاری قوی، برای کاربردها باشد. مطالعه نامساوی ها برای انتگرال سوگینو توسط رومن- فلورس و چالکو-کانو[۱۵]شروع شد و سپس توسط بسیاری از محققان ادامه یافت. رومن-فلورس و دیگران برخی کرانهای بالای اپتیمال را برای انتگرال سوگینوی توابع یکنوا ارائه دادند. و نامساوی یانگ را برای انتگرال سوگینو بدست آوردند. همچنین در ادامه یک نوع نامساوی ینسن[۱۶]، یک نامساوی پیچشی[۱۷]، یک نامساوی چی بی شف[۱۸] و یک نوع نامساوی استولارسکی[۱۹] را برای این نوع انتگرال ها بدست آوردند. در [۳] یک نوع نامساوی چی بی شف برای یک حالت ویژه بدست آمده، که توسط اویانگ[۲۰] و مسیار[۲۱] در[۶] تعمیم یافت. بررسی نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال سوگینو توسط آگاهی و یعقوبی [۲] شروع شد. و سپس آگاهی تعمیمی از نامساوی مینکوفسکی، (هدف اصلی این پایان نامه) را برای انتگرال سوگینوی توابع همنوا، نسبت به یک اندازه فازی دلخواه و برای یک عملگر شبه جمع گونه روی یک فضای اندازه فازی مجرد بدست آورد.

این پایان نامه به این ترتیب ارائه گردیده، که ابتدا در فصل اول مفهوم اندازه و انتگرال فازی را معرفی می کنیم. در فصل دوم کران های بالای انتگرال سوگینو و نامساوی تعمیم

---

[۱۳] Suárez

[۱۴] Gil

[۱۵] Y. Chalco-Cano

[۱۶] Jensen

[۱۷] Convolution

[۱۸] Chebyshev

[۱۹] Stolorsky

[۲۰] Y. Oyang

[۲۱] R. Mesiar

یافته چی بی شف را بیان می کنیم. در فصل سوم که در واقع فصل اصلی پایان‌نامه است، نامساوی مینکوفسکی را برای انتگرال سوگینو بررسی می کنیم.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

m	اندازه لبگ
μ	اندازه فازی
$⨍$	انتگرال فازی
$\mathscr{F}$	σ-جبری از زیر مجموعه های X
$\mathscr{F}_{+}(X)$	مجموعه توابع اندازه پذیر نامنفی تعریف شده روی X
$\bigvee$	سوپریمم
$\bigwedge$	اینفیمم
F_{α}	مجموعه $\{x \in X \| f(x) \geq \alpha\}$
$F_{\bar{\alpha}}$	مجموعه $\{x \in X \| f(x) > \alpha\}$
$\bigoplus$	شبه-جمع
$\chi_{_E}$	تابع مشخصه مجموعه E
$\mathscr{S}$	نیم حلقه
$\mathscr{P}(X)$	مجموعه توانی X
$\mathscr{B}$	میدان برل
$\emptyset$	مجموعه تهی
$(X, \mathscr{F})$	فضای اندازه پذیر فازی
$(X, \mathscr{F}, \mu)$	فضای اندازه فازی
$\mathscr{F}(f)$	σ-جبر تولید شده توسط f

فصل ۱

اندازه و انتگرال فازی

۱ - ۱ زمینه مورد نیاز از نظریه مجموعه ها

فرض کنیم X یک مجموعه[۱] باشد. همه مجموعه های مورد بررسی را زیر مجموعه هایی از X فرض خواهیم کرد. عناصر X نقاط آن نامیده می شوند. X ممکن است شامل تعداد متناهی، شمارای نامتناهی یا ناشمارای نامتناهی از نقاط باشد. مجموعه ای را که شامل هیچ نقطه ای نباشد با $\emptyset$ نشان می دهیم. بنابراین برای هر نقطه x از X داریم $x \in X$ و $x \notin \emptyset$.

مجموعه ای از مجموعه ها یک کلاس نامیده می شود. اگر E یک مجموعه و φ یک کلاس باشد آنگاه $E \in \varphi$ به این معنی است که مجموعه E متعلق به کلاس φ است.

تعریف ۱ - ۱ - ۱. اگر E یک مجموعه باشد تابع مشخصه مجموعه E، برای همه $x \in X$ عبارت است از:

$$\chi_{_E}(x) = \begin{cases} ۱ & x \in E \\ ۰ & x \notin E \end{cases}$$

تذکر ۱ - ۱ - ۲. *برخی از ویژگی های تابع مشخصه*

تناظر بین مجموعه ها و توابع مشخصه شان یک به یک است یعنی

$$E = F \qquad \Leftrightarrow \qquad \chi_{_E}(x) = \chi_{_F}(x) \qquad \forall x \in X$$

---

[۱] مجموعه مرجع

و همین طور

$$E \subset F \qquad \Leftrightarrow \qquad \chi_{_E}(x) \leq \chi_{_F}(x) \qquad \forall x \in X$$

و

$$\chi_{_X} \equiv ۱, \quad \chi_{_\emptyset} \equiv ۰, \quad \chi_{_{E\cup F}} = max(\chi_{_E}, \chi_{_F}), \quad \chi_{_{E\cap F}} = min(\chi_{_E}, \chi_{_F})$$

تعریف ۱-۱-۳. عملگر های روی مجموعه ها

• فرض کنیم φ یک کلاس از زیر مجموعه های X باشد. مجموعه همه نقاطی از X که متعلق به دست کم یک مجموعه از کلاس φ باشد، اتحاد مجموعه های φ نامیده می شود و آن را با $\bigcup \varphi$ نشان می دهیم.

• مجموعه همه نقاطی از X که متعلق به هر مجموعه از کلاس φ باشد، اشتراک مجموعه های φ نامیده می شود و آن را با $\bigcap \varphi$ نشان می دهیم.

• دو مجموعه E و F مجزا نامیده می شوند اگر $E \cap F = \emptyset$ باشد. به همین ترتیب کلاس φ مجزا نامیده می شود، اگر هر دو مجموعه جدای φ مجزا باشد.

• فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله ای از مجموعه ها باشد مجموعه همه نقاطی از X که متعلق به E_n، برای تعداد نامتناهی از مقادیر n باشد، حد بالایی $\{E_n\}$ نامیده می شود و آن را با $\lim\limits_n supE_n$ یا $\overline{\lim\limits_n} E_n$ نشان می دهیم.

• مجموعه همه نقاطی از X که متعلق به E_n، برای همه، جزء تعداد متناهی از مقادیر n باشد، حد پایینی $\{E_n\}$ نامیده می شود و آن را با $\lim\limits_n infE_n$ یا $\underline{\lim\limits_n} E_n$ نشان می دهیم.

گزاره ۱-۱-۴.

$$\lim_n \, sup \, E_n = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i$$

$$\lim_n \, inf \, E_n = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i$$

گزاره ۱-۱-۵.

$$\lim_n \, inf \, E_n \subseteq \lim_n \, sup \, E_n \; .$$

و اگر

$$\lim_n \, inf \, E_n = \lim_n \, sup \, E_n$$

آنگاه گوییم حد دنباله $\{E_n\}$ موجود است و آن را با $\lim\limits_{n} E_n$ نشان می دهیم.

برای تعریف اندازه فازی به مفهوم حد دنباله ای از مجموعه ها نیاز داریم

تعریف و نکته ۱-۱-۶. (*حد دنباله ای یکنوا از مجموعه ها*)

اگر $E_1 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \ldots$، آنگاه دنباله $\{E_n\}$ صعودی نامیده می شود و داریم

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

و اگر $E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq E_{n+1} \supseteq \ldots$ ، آنگاه دنباله $\{E_n\}$ نزولی نامیده می شود و داریم

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

دنباله های صعودی و نزولی، یکنوا نامیده می شوند.

تعریف ۱-۱-۷. (کلاس هایی از مجموعه ها)

- کلاس همه زیر مجموعه های X، مجموعه توانی X نامیده می شود که آن را با $\mathscr{P}(X)$ نشان می دهیم.
- کلاس ناتهی $\mathscr{R}$ حلقه نامیده می شود اگر به ازای هر $E, F \in \mathscr{R}$ داشته باشیم

$$E \cup F \in \mathscr{R}\ , \qquad E - F \in \mathscr{R}$$

- کلاس ناتهی $\mathscr{R}$ جبر نامیده می شود اگر به ازای هر $E, F \in \mathscr{R}$ داشته باشیم

$$E \cup F \in \mathscr{R}\ , \qquad \bar{E} \in \mathscr{R}$$

به عبارت دیگر، یک جبر، کلاسی ناتهی است که تحت اتحادها و مکمل گیریها بسته باشد. به وضوح در این تعریف" $\cup$ " می تواند توسط " $\cap$ " جایگزین شود.

- کلاس ناتهی $\mathscr{S}$ یک نیم حلقه نامیده می شود اگر به ازای هر $E, F \in \mathscr{S}$ داشته باشیم،

۱) $E \cap F \in \mathscr{S}$

۲) اگر $E \subset F$ باشد آنگاه کلاس متناهی $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ از مجموعه ها در $\mathscr{S}$ موجود است طوریکه،

$$E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$$

که برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ ، $D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathscr{S}$ باشد.

هر حلقه، یک نیم حلقه است و مجموعه $\emptyset$ متعلق به هر نیم حلقه است.

• کلاس ناتهی $\mathscr{F}$ یک σ-حلقه نامیده می شود اگر،

۱) به ازای هر $E, F \in \mathscr{F}$ ، $E - F \in \mathscr{F}$ باشد

۲) به ازای هر $E_i \in \mathscr{F}$ که $i = 1, 2, ...$ ، داریم

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{F}$$

یک σ -حلقه، حلقه ای است که تحت اتحاد های شمارا بسته باشد.

یک σ -حلقه تحت اشتراک های شمارا بسته است و اگر $\mathscr{F}$ یک σ -حلقه و $\{E_n\} \in \mathscr{F}$، آنگاه

$$\lim_n sup\ E_n \in \mathscr{F}\ , \quad \lim_n inf\ E_n \in \mathscr{F}$$

• یک σ-جبر (یا σ-میدان)، σ-حلقه ای است که شامل X باشد. بنابراین اگر $\mathscr{F}$ یک σ-جبر باشد، به ازای هر $E \in \mathscr{F}$ خواهیم داشت $\bar{E} = X - E \in \mathscr{F}$

برای مثال، کلاس همه مجموعه های شمارا و متمم آنها یک σ-جبر است.

• مجموعه ناتهی $\mathscr{M}$ کلاس یکنوا نامیده می شود اگر برای هر دنباله یکنوای $\{E_n\} \subset \mathscr{M}$ داشته باشیم $\lim_n E_n \in \mathscr{M}$

۱-۲ مفاهیمی از اندازه کلاسیک

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد

۱. گردایه τ از زیر مجموعه های X یک توپولوژی روی X نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

(آ) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$ ،

(ب) هر گاه به ازای $i = 1, ..., n$، $V_i \in \tau$، آنگاه $V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n \in \tau$،

(پ) هر گاه $\{V_\alpha\}$ گردایه دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارشپذیر، یا شمارش ناپذیر) باشد، آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

۲. هر گاه τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه (X, τ) را یک فضای توپولوژیک، اعضای τ مجموعه های باز X و متمم آنها مجموعه های بسته ی X نامیده می شوند.

۳. هر گاه X و Y دو فضای توپولوژیک بوده و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آنگاه گوییم f پیوسته است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ مجموعه ای باز در X باشد.

تعریف ۱-۲-۲. یک فضای اندازه پذیر دو تایی $(X, \mathscr{F})$ است که X یک مجموعه و $\mathscr{F}$ یک σ-جبر از زیر مجموعه های X است طوریکه

۱. $X \in \mathscr{F}$

۲. فرض کنیم A یک زیر مجموعه از X باشد. اگر $A \in \mathscr{F}$ آنگاه $\bar{A} \in \mathscr{F}$

۳. اگر $A_n \in \mathscr{F}$ آنگاه $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

عناصر $\mathscr{F}$ مجموعه های اندازه پذیر نامیده می شوند.

برای مثال اگر X مجموعه اعداد حقیقی باشد و $\mathscr{F}$، σ-جبری باشد که شامل مجموعه های باز X است، آنگاه $\mathscr{F}$، همان σ-جبر برل معروف است.

تعریف ۱-۲-۳. کوچکترین σ-جبر یکتای شامل $E \subseteq \mathscr{P}(X)$، σ -جبر تولید شده توسط E نامیده می شود و آن را با $\mathscr{F}(E)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۲-۴. فرض کنیم $(X, \mathscr{F})$ یک فضای اندازه پذیر باشد یک اندازه مثبت روی $\mathscr{F}$ تابع $\mu : \mathscr{F} \longrightarrow [0, \infty]$ است که در ویژگی های زیر صدق کند:

(آ) $\mu(\emptyset) = 0$

(ب) (جمعی شمارا) اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$ دنباله ای مجزا از مجموعه ها باشد، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

سه تایی $(X, \mathscr{F}, \mu)$ یک فضای اندازه نامیده می شود که μ یک اندازه روی $\mathscr{F}$ است.

تعریف ۱-۲-۵. فرض کنیم $(X, \mathscr{F}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد.

• μ متناهی نامیده می شود اگر $\mu(X) < \infty$ باشد.

• μ ، σ -متناهی نامیده می شود اگر $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ برای برخی $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$ با $\mu(E_j) < \infty$ ، به ازای هر $J \in \mathbb{N}$

- μ، σ-جمعی نامیده می شود اگر $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$ ، برای همه دنباله ی مجموعه های مجزای $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$.
- μ، اندازه احتمال نامیده می شود اگر $\mu(X) = 1$ باشد.

قضیه ۱-۲-۶. *(ویژگی های پایه ای اندازه ها) فرض کنیم $(X, \mathscr{F}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. آنگاه μ دارای ویژگی های زیر است:*

۱. *(یکنوایی) اگر $E, F \in \mathscr{F}$ و $E \subseteq F$، آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

۲. *(زیر جمعی شمارا) اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$، آنگاه $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$.*

۳. *(پیوستگی پایین) اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$ که $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$، آنگاه*
$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty}\mu(E_j)$$

۴. *(پیوستگی بالا) اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$ که $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ و $\mu(E_1) < \infty$ آنگاه*
$$\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j\to\infty}\mu(E_j) .$$

۱-۳ اندازه های فازی

مفهوم اندازه همانند مفهوم انتگرال، نسبت به یک اندازه داده شده، یکی از مهمترین مفاهیم ریاضیات است. اندازه های کلاسیک دارای ویژگی جمعی هستند. جمع پذیری همچنان که می تواند در برخی از کاربردها مؤثر و مناسب باشد، نیز می تواند برای برخی دیگر تا حدی غیر کافی باشد. برای مثال زمینه هایی مانند استدلال های تقریبی، منطق فازی، فرایندهای تصمیم گیری و غیره نیاز به تعریف اندازه هایی غیر جمعی دارند. اندازه های فازی تعمیمی از مفهوم اندازه در آنالیز ریاضی اند، که فقط ویژگی یکنوایی را دارند ودر کل به اندازه های غیر جمعی[۲] معروف اند بنابراین اندازه های فازی خیلی کلی هستند. اندازه های احتمال[۳]، اندازه

[۲] Nonadditive

[۳] Probability

های امکان[۴] زاده[۵]، و توابع گمان[۶] شافر[۷] و ... حالت های خاصی از اندازه های فازی هستند. یک اندازه فازی روی مجموعه ای مانند X، یک تابع تعریف شده روی برخی از زیر مجموعه های X است. در کل دامنه اندازه های فازی می تواند یک خانواده یکنوا (همان مفهوم یکنوایی کلاسیک) از زیر مجموعه های X باشد که شامل $\emptyset$ و X است و تحت حد گیری دنباله های یکنوا از زیر مجموعه های X بسته است. معمولاً یک کلاس یکنوا، نیم حلقه، حلقه، جبر، σ-حلقه، σ-جبر و یا مجموعه توانی را می توان به عنوان دامنه تعریف اندازه فازی در نظر گرفت.

این بخش را با ارائه مفاهیم اندازه فازی که سوگینو[۸] برای اولین بار در سال ۱۹۷۴ معرفی کرد آغاز می کنیم. [۱۸]

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. یک میدان برل روی X، زیر مجموعه ای مانند $\mathscr{B}$ از $\mathscr{P}(X)$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱. $\emptyset \in \mathscr{B}$

۲. اگر $E \in \mathscr{B}$ آنگاه $X - E \in \mathscr{B}$

۳. اگر $E_n \in \mathscr{B}$ برای $1 \leq n < \infty$، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{B}$

یک مثال برای میدان برل روی یک مجموعه ناتهی X، مجموعه توانی $\mathscr{P}(X)$ از X است.

تعریف ۱-۳-۲. اگر X یک مجموعه ناتهی و $\mathscr{B}$ یک میدان برل روی X باشد، آنگاه $(X, \mathscr{B})$ یک فضای اندازه پذیر نامیده می شود.

تعریف ۱-۳-۳. فرض کنیم $(X, \mathscr{B})$یک فضای اندازه پذیر باشد تابع مجموعه ای

[۴] Possibility

[۵] Zadeh

[۶] Belief

[۷] Shafer

[۸] Sugeno

$\mu : \mathscr{B} \longrightarrow [0,1]$ یک اندازه فازی کلی[9] روی $(X, \mathscr{B})$ نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. (شرایط مرزی) $\mu(\emptyset) = 0$، $\mu(X) = 1$

۲. (یکنوایی) اگر $E, F \in \mathscr{B}$ و $E \subseteq F$ آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$

۳. (پیوستگی) اگر $E_n \in \mathscr{B}$ برای $1 \leq n < \infty$ و $\{E_n\}$ یکنوا باشد آنگاه
$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \ .$$

تذکر ۱-۳-۴. *شرایط پیوستگی برای همه اندازه های فازی برقرار نیست*
رالسکو[10] و آدامز[11] برد اندازه های فازی را از $[0, 1]$ به $[0, \infty]$ گسترش داده و یک تعریف معادل از اندازه های فازی را ارائه دادند. [۱۴]

تعریف ۱-۳-۵ (اندازه فازی). تابع مجموعه ای $\mu : \mathscr{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ یک اندازه فازی نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\mu(\emptyset) = 0$.

۲. (یکنوایی) اگر $E, F \in \mathscr{F}$ و $E \subseteq F$ آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$.

۳. (پیوستگی پایین) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ و $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ آنگاه
$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \ .$$

۴. (پیوستگی بالا) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ و $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ و $\mu(E_1) < \infty$ آنگاه
$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \ .$$

[9] General fuzzy measure

[10] D. Ralescu

[11] G. Adams

تعریف و نکته ۱-۳-۶. *μ یک اندازه نیم پیوسته پایین (یا بالا) فازی روی $(X, \mathscr{F})$ نامیده می شود اگر در شرایط (۱)، (۲) و (۳) (یاشرایط (۱)، (۲) و (۴)) صدق کند. برای اختصار به اندازه های نیم پیوسته پایین و بالای فازی، اندازه های نیم پیوسته فازی گوییم.*

اندازه فازی یا اندازه نیم پیوسته فازی منظم[۱۲] نامیده می شود اگر $\mu(X) = ۱$ باشد.

اصطلاحات یکسانی راجع به متناهی بودن، σ-متناهی بودن و ... برای اندازه های فازی ونیم پیوسته فازی می تواند مانند اندازه های کلاسیک به کار رود.

اگر μ یک اندازه فازی (یا یک اندازه نیم پیوسته فازی) باشد آنگاه سه تایی $(X, \mathscr{F}, \mu)$ یک فضای اندازه فازی (یا یک فضای اندازه نیم پیوسته فازی) نامیده می شود.

مثال ۱-۳-۷.

۱. فرض کنیم μ اندازه دیراک[۱۳] روی $(X, \mathscr{F})$ باشد، یعنی، برای هر $E \in \mathscr{F}$،

$$\mu(E) = \begin{cases} ۱ & x_\circ \in E \\ \circ & x_\circ \notin E \end{cases}$$

که $x_\circ$ یک نقطه ثابت از X است. این تابع مجموعه ای μ، یک اندازه احتمال است. همچنین μ یک اندازه فازی منظم نیز می باشد.

۲. فرض کنیم $X_\circ = \{۱, ۲, ...\}$، $X = X_\circ \times X_\circ$ و $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$ برای هر $E \in \mathscr{P}(X)$ تعریف می کنیم:

$$\mu(E) = |Proj\ E|$$

که،

$$Proj\ E = \{x|\ (x, y) \in E\}$$

تابع مجموعه μ یک اندازه نیم پیوسته پایین فازی است زیرا در شرط های (۱)، (۲) و (۳) صدق می کند اما μ پیوسته بالا نیست. در واقع، اگر $E_n = \{۱\} \times \{n, n+۱, ...\}$، آنگاه $E_۱ \supset E_۲ \supset ...$، و $\mu(E_n) = ۱$، برای هر $n = ۱, ۲, ...$ اما $\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n = \emptyset$، و $\mu(\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n) = \circ$.

---

[۱۲] Regular

[۱۳] Dirac Measure

۳. فرض کنیم $X = (-\infty,\ \infty)$ و $(X,\ \mathscr{P}(X))$ یک فضای اندازه پذیر باشد. فرض کنیم $f : X \to [\circ,\ \backslash]$ به گونه ای تعریف شود که $\underset{x\in X}{inf} f(x) = \circ$ ، آنگاه تابع مجموعه ای μ، که با رابطه

$$\mu(E) = \underset{x\notin E}{inf}\ f(x) \qquad \forall E \in \mathscr{P}(X)$$

تعریف می شود یک اندازه فازی منظم و نیم پیوسته بالا است.

۱-۴ توابع اندازه پذیر

فرض کنیم $(X, \mathscr{F})$ یک فضای اندازه پذیر، $\mu : \mathscr{F} \longrightarrow [\circ, +\infty]$ یک اندازه فازی (یا اندازه نیم پیوسته فازی) و $\mathscr{B}$ میدان برل روی $(-\infty, +\infty)$ باشد. تعریف تابع اندازه پذیر روی یک فضای اندازه فازی $(X, \mathscr{F}, \mu)$ همانند تعریف یک تابع اندازه پذیر در نظریه اندازه کلاسیک است و ارتباطی با تابع مجموعه ای μ ندارد.

تعریف ۱-۴-۱ (تابع اندازه پذیر). تابع حقیقی مقدار $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty)$ روی X، $\mathscr{F}$-اندازه پذیر (اختصاراً اندازه پذیر) نامیده می شود، اگر برای هر مجموعه برل $B \in \mathscr{B}$ داشته باشیم:

$$f^{-\backslash}(B) = \{x | f(x) \in B\} \in \mathscr{F}\ .$$

قضیه ۱-۴-۲. *اگر $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty)$ تابعی حقیقی مقدار باشد، آنگاه عبارات زیر معادلند.*

۱. *f اندازه پذیر است.*

۲. *برای هر $\alpha \in (-\infty, +\infty)$، $\{x | f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{F}$.*

۳. *برای هر $\alpha \in (-\infty, +\infty)$، $\{x | f(x) > \alpha\} \in \mathscr{F}$.*

۴. *برای هر $\alpha \in (-\infty, +\infty)$، $\{x | f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{F}$.*

۵. *برای هر $\alpha \in (-\infty, +\infty)$، $\{x | f(x) < \alpha\} \in \mathscr{F}$.*