شماره پایان‌نامه: ۹۲۳۹۳۰۵


دانشگاه شهید چمران اهواز
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر


**پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض**

**گرایش جبر**

**عنوان**

# شبه $MV-$جبرهای موضعی

استاد راهنما:

**دکتر حبیب حریزاوی**

استاد مشاور:

**دکتر منیره پیمان**

نگارنده:

**فرزانه پرهیزان**

مهر ماه سال ۱۳۹۲

نام خانوادگی: پرهیزان نام: فرزانه شماره دانشجویی: ۹۰۳۹۳۰۱

عنوان پایان‌نامه: شبه $MV-$جبرهای موضعی

استاد راهنما: دکتر حبیب حریزاوی
استاد مشاور: دکتر منیره پیمان

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر گروه: ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲/۰۷/۲۸ تعداد صفحات: ۷۶

واژگان کلیدی: شبه $MV-$جبر، $\ell-$گروه، شبه $MV-$جبر موضعی، شبه $MV-$جبر کامل


**چکیده**

شبه $MV-$جبرها، توسیعی از جبر ناجابجایی $MV-$جبر است. در این پایان‌نامه، شبه $MV-$جبرهای موضعی را بررسی کرده و همچنین یک رده‌بندی برای این ساختار ارائه داده و زیرکلاس‌های شبه $MV-$جبر کامل را به طور عمیق مورد بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه ما ثابت می‌کنیم که رسته‌ی $\ell-$گروه‌ها با زیررسته‌هایی از شبه $MV-$جبرهای کامل معادل هستند.

تقدیم به ساحت مقدس

امام زمان (عج)

# خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آن‌چنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

**اگر تنهاترین تنهاها شوم، باز خدا هست**

**او جانشین همه نداشتن‌هاست...**

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

# سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حبیب حریزاوی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از سرکار خانم دکتر منیره پیمان که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
همچنین بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، وجود مقدسشان را ستایش می‌کنم، زیرا هر چه دارم از مساعدت و یاری بی‌دریغ ایشان دارم. همچنین لازم می‌دانم از همسر عزیزم صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در تمامی طول تحصیل مرا مورد حمایت خود قرار دادند و در پایان از فرزندان مهربانم فرنوش و محمد سپاس‌گزاری می‌کنم که با وجود پاکشان به زندگی من گرمی و برکت بخشیدند.

فرزانه پرهیزان
مهرماه سال ۱۳۹۲

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

در تئوری مجموعه‌ها، یک راه برای ساختن یک مجموعه‌ی جدید از مجموعه‌های داده شده، استفاده از برخی عمل‌ها می‌باشد. در بین اعمال مختلف سه عمل مقدماتی وجود دارد که عبارتند از: عمل‌های دوتایی "$+$" و "$\cdot$" و عمل یکانی "$-$" با در نظر گرفتن سه عمل فوق و شناخت خواص آن‌ها می‌توان سیستمی به نام $MV-$جبر را معرفی نمود. سپس ریاضیدانانی مانند دای نولا [۲] و بلیوس [۳]، $MV-$جبرها را به حالت ناجابجایی توسیع داده و شبه $MV-$جبرهای موضعی را معرفی کردند. همچنین این ریاضیدانان نتایج مهمی از هم ارزی کتگوری از $\ell-$گروه‌ها با زیرکتگوری از شبه $MV-$جبرهای تام را منتشر کردند که به واسطه‌ی این نتایج، شبه $MV-$جبرهای تام و شبه $MV-$جبرهای منفرد معرفی شدند.

---
[۲] Di-Nola
[۳] Belluce

# فصل ۱
# کاتگوری و $MV$−جبرها

## مقدمه

در این فصل، به دلیل ارتباط مباحث بعدی با موضوع کاتگوری و $MV$−جبرها به بیان مفاهیمی از کاتگوری و $MV$−جبرها می‌پردازیم. در این‌جا با تعریف کاتگوری و برخی مثال‌های آن آشنا می‌شویم و سپس به مفاهیمی مانند زیرکاتگوری و در ادامه به بیان یکریختی و هم ارزی در کاتگوری می‌پردازیم. همچنین $MV$−جبرها یا همان جبرهای چند ارزشی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

## ۱.۱ کاتگوری

**تعریف ۱.۱.۱.** یک کاتگوری عبارت است از کلاس $C$ از اشیا که

۱) به ازای هر جفت از اشیا مانند $X$ و $Y$ از کلاس $C$، مجموعه‌ی $Mor_C(X,Y)$ (که مجموعه مورفیسم‌های از $X$ به توی $Y$ نامیده می‌شود) وجود داشته باشد که $Mor_C(X,Y)$ و $Mor_C(X',Y')$ مجزا هستند مگر این که $X=X'$ و $Y=Y'$؛

۲) برای هر سه شی $X$، $Y$ و $Z$ از $C$ نگاشت

$$Mor_C(X,Y)\times Mor_C(Y,Z)\to Mor_C(X,Z)$$

با ضابطه‌ی $(g,f)\to f\circ g$ وجود داشته باشد که دارای ویژگی‌های زیر است:

$(\alpha)$ برای هر شی $X$، مورفیسم $id_x\in Mor(X,X)$ وجود دارد که یک همانی راست تحت "$o$" برای تمام اعضای $Mor_C(X,Y)$ و یک همانی چپ برای تمام اعضای $Mor_C(X,Y)$ است.

$(\beta)$ "$o$" شرکت‌پذیر است در حالتی که $h\circ(g\circ f)$ و $(h\circ g)\circ f$ تعریف شده باشند و در این صورت $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

**نکته ۲.۱.۱.** *علیرغم این که در تعریف ۱.۱.۱، نماد "$o$" به کار رفته شده است، مجموعه‌ی مورفیسم‌های $Mor_C(X,Y)$ لزومی ندارد مجموعه‌ای از توابع باشد. با این وجود، عناصر $Mor_C(X,Y)$ را به شکل $f:X\to Y$ نمایش می‌دهیم، به این دلیل، مورفیسم‌ها را پیکان می‌نامیم.*

**تعریف ۳.۱.۱.** مورفیسم $id_x:X\to X$ را مورفیسم همانی روی شی $X$ می‌گوییم. پس با توجه به خاصیت $(\alpha)$، $id_x$ منحصر به فرد است، $(id_x)$ همانی راست و $(id_x)'$ همانی چپ هستند؛ یعنی، $(id_x)'=(id_x)'\circ(id_x)=id_x$.

**نتیجه ۴.۱.۱.** *از تعریف ۳.۱.۱، نتیجه می‌گیریم که می‌توان یک کاتگوری را به صورت اساسی با تعیین سه چیز تعریف کرد:*

۱) *کلاس اشیا؛*

۲) *مجموعه‌های مورفیسم؛*

۳) *چگونگی ترکیب مورفیسم‌ها.*

**مثال ۵.۱.۱** (کاتگوری Set از مجموعه‌ها)**.** در این‌جا کلاس اشیا شامل تمام مجموعه‌ها است، مورفیسم‌ها نگاشت‌های معمولی بین مجموعه‌ها هستند و "$o$" ترکیب معمولی توابع می‌باشد. مورفیسم همانی عبارت است از تابع همانی معمولی $i : X \to X$ که $i(x) = x$.
به همین صورت کاتگوری FSet از مجموعه‌های متناهی را می‌توانیم تشکیل دهیم.

**مثال ۶.۱.۱** (کاتگوری Grp از گروه‌ها)**.** کلاس اشیا شامل تمام گروه‌ها است، مورفیسم‌ها، همومورفیسم‌های گروه و "$o$" ترکیب معمولی توابع می‌باشند. به همین صورت می‌توان کاتگوری FGrp از گروه‌های متناهی را تشکیل داد.

**مثال ۷.۱.۱** (کاتگوری Ord از مجموعه‌های مرتب)**.** اشیا مجموعه‌هایی هستند که ترتیب "$\leq$" روی آن‌ها وجود دارد (به عبارت دیگر، رابطه دارای خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدی باشد). مورفیسم‌ها، نگاشت‌های همنوا (حافظ ترتیب) $f : A \to B$ هستند؛ یعنی، اگر $x \leq y$ در $A$ برقرار باشد، آن‌گاه $f(x) \leq f(y)$ در $B$ برقرار است.

**تعریف ۸.۱.۱.** کاتگوری $A$، زیرکاتگوری از کاتگوری $B$ نامیده می‌شود، هرگاه

۱) هر شی $A$، یک شی $B$ باشد؛

۲) به ازای تمام اشیا $X$ و $Y$ از $A$، $Mor_A(X,Y) \subseteq Mor_B(X,Y)$؛

۳) ترکیب دو مورفیسم در $A$، همان ترکیب آن‌ها در $B$ باشد؛

۴) به ازای تمام اشیا $A$ از $A$ مورفیسم همانی $id_A$ در $B$، همان مورفیسمی است که در $A$

است.

به علاوه، اگر به ازای هر $X$ و $Y$ از $A$، $Mor_A(X,Y) = Mor_B(X,Y)$، آن‌گاه $A$ را زیرکاتگوری تام $B$ گوییم.

**مثال ۹.۱.۱.** کاتگوری FSet یک زیرکاتگوری تام Set است.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** شی $U$ از کاتگوری $C$، شی آغازی (به طور کلی دافع) گفته می‌شود، هرگاه برای هر شی $X$ از $C$، مجموعه‌ی $Mor_C(U,X)$ تک عضوی باشد و $U$ شی انتهایی (به طور کلی جاذب) نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر شی $X$ از $C$، مجموعه‌ی $Mor_C(X,U)$ تک عضوی باشد.

**تذکر ۱۱.۱.۱.** *معمولاً عبارت شی عمومی را به معنای شی‌ای به کار می‌بریم که یا آغازی یا انتهایی باشد.*

**تذکر ۱۲.۱.۱.** *اشیا $X$ و $Y$ از کاتگوری $C$ را یکریخت می‌نامیم، هرگاه $Mor_C(X,Y)$ شامل یک یکریختی باشد. معمولاً در این حالت می‌نویسیم $X \simeq Y$.*

**گزاره ۱۳.۱.۱.** *اشیا عمومی هم‌نوع، یکریخت هستند.*

***برهان.*** باید نشان دهیم که اگر $U_1$ و $U_2$ اشیا عمومی از یک نوع باشند، آن‌گاه $Mor_C(U_1,U_2)$ شامل (در حقیقت تشکیل شده از) یک ایزومورفیسم است. برهان حالت $U_1$ و $U_2$ آغازی، همانند برهان حالت $U_1$ و $U_2$ انتهایی می‌باشد. فرض کنیم $Mor_C(U_1,U_2) = \{\alpha\}$ و $Mor_C(U_2,U_1) = \{\beta\}$. در این صورت $\alpha \circ \beta \in id_{U_2}$. به طور مشابه داریم $\alpha \circ \beta \in id_{U_1}$ و این دلالت می‌کند که $\alpha$ با $\beta = \alpha^{-1}$ ایزومورفیسم است. $\square$

**مثال ۱۴.۱.۱.** $\emptyset$ در Set آغازی است و $\{\emptyset\}$ (در واقع هر مجموعه‌ی تک عضوی) انتهایی است.

**مثال ۱۵.۱.۱.** $\{1\}$ در Grp آغازی و انتهایی است.

## ۲.۱ عملگر

در این قسمت، ایده‌ی "هومومورفیسم از یک کاتگوری به دیگری" را آغاز می‌کنیم. برای سادگی مورفیسم همانی را به جای $I_X$ با نماد $\text{۱}_X$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۱.۲.۱.** عملگر کوواریانت از $C$ به $D$ عبارت است از یک دستورالعمل که به هر شی $A$ از $C$، یک $FA$ از $D$ و به هر مورفیسم $\alpha : A \to B$ از $C$، مورفیسم $F_\alpha : FA \to FB$ از $D$ تخصیص می‌دهد که

۱) $F_{\text{۱}A} = \text{۱}_{FA}$؛

۲) اگر $\beta \circ \alpha$ در $C$ تعریف شده باشد، آن‌گاه $F_\beta \circ F_\alpha$ در $D$ تعریف شده و $F(\beta \circ \alpha) = F_\beta \circ F_\alpha$.

**تعریف ۲.۲.۱.** عملگر کنترا واریانت از $C$ به $D$ یک عملگر کوواریانت از $C$ به $D^d$ است. برای چنین عملگری تنها تغییر در تعریف ۱.۲.۱، این است که در این حالت داریم $F(\beta \circ \alpha) = F_\alpha \circ F_\beta$.

وقتی صحبت از عملگر می‌کنیم منظور، عملگر کوواریانت است و آن را با $F : C \to D$ نمایش می‌دهیم.

**مثال ۳.۲.۱.** اگر $C$ یک کاتگوری مفروض با تخصیص $\text{۱}_C : C \to C$ معین شده به وسیله‌ی قرار دادن $\text{۱}_C(X) = X$، به ازای هر شی $X$ از $C$ و $\text{۱}_C f = f$، به ازای هر مورفیسم از $C$ باشد، آن‌گاه این یک عملگر همانی روی $C$ تعریف می‌کند:

$$F_{\text{۱}A} = \text{۱}_A \quad , \quad A = FA = \text{۱}_{FA'} \quad , \quad F(\beta \circ \alpha) = \beta \circ \alpha = F_\beta \circ F_\alpha.$$

**مثال ۴.۲.۱.** اگر $C$ یک زیرکاتگوری از $D$ باشد، تخصیص $I : C \to D$ تعیین شده با قرار دادن $IX = X$، به ازای هر $X \in C$ و $If = f$، به ازای هر مورفیسم $C$، یک عملگر به نام عملگر شمول تعریف می‌کند. در مطالعه‌ی هر ساختمان جبری مهم است که بدانیم چه

هنگام دو ساختمان یکریخت هستند. پس در این‌جا تعریف طبیعی از یکریختی طبیعی بین کاتگوری‌ها را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۵.۲.۱.** کاتگوری‌های $C$ و $D$ را یکریخت گوییم و می‌نویسیم $C \simeq D$، هرگاه عملگرهای $F : C \to D$ و $G : D \to C$ موجود باشند که $F \circ G = 1_D$ و $G \circ F = 1_C$.

## ۳.۱ اصول موضوعه‌ی $MV$–جبرها و برخی نتایج اولیه

**تعریف ۱.۳.۱.** یک $MV$–جبر، یک سیستم $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$ است که $A$ مجموعه‌ی ناتهی از عناصر می‌باشد، ۰ و ۱ عناصر مجزای $A$ هستند. "+" و "." عمل‌های دوتایی روی اعضای $A$ و "–" عمل یکتایی روی عناصر $A$ می‌باشند که از اصول موضوعه‌ی زیر پیروی می‌کنند (البته در این‌جا فرض می‌کنیم که $A$ تحت عمل‌های "+"، "." و "–" بسته است):

$$Ax \cdot 1 - \quad x + y = y + x \qquad\qquad Ax \cdot 1' - \quad x \cdot y = y \cdot x;$$

$$Ax \cdot 2 - \quad x + (y + z) = (x + y) + z \qquad\qquad Ax \cdot 2' - \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

$$Ax \cdot 3 - \quad x + \bar{x} = 1 \qquad\qquad Ax \cdot 3' - \quad x \cdot \bar{x} = 0;$$

$$Ax \cdot 4 - \quad x + 1 = 1 \qquad\qquad Ax \cdot 4' - \quad x \cdot 0 = 0;$$

$$Ax \cdot 5 - \quad x + 0 = x \qquad\qquad Ax \cdot 5' - \quad x \cdot 1 = x;$$

$$Ax \cdot 6 - \quad [x + y]^- = \bar{x} \cdot \bar{y} \qquad\qquad Ax \cdot 6' - \quad [x \cdot y]^- = \bar{x} + \bar{y};$$

$$Ax \cdot 7 - \quad x = [x^-]^- \qquad\qquad Ax \cdot 8 - \quad \bar{0} = 1;$$

$$x \vee y = (x \cdot \bar{y}) + y \qquad\qquad x \wedge y = (x + \bar{y}) \cdot y;$$

$$Ax \cdot 9 - \quad x \vee y = y \vee x \qquad\qquad Ax \cdot 9' - \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

$$Ax \cdot 10 - \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad\qquad Ax \cdot 10' - \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$$

$Ax\cdot ۱۱-\ \ x+(y\wedge z)=(x+y)\wedge(x+z)$ $\qquad$ $Ax\cdot ۱۱'-\ \ x\cdot(y\vee z)=(x\cdot y)\vee(x\cdot z).$

**گزاره ۲.۳.۱.** *در هر $MV$-جبر $A$، برای هر $x,y\in A$ شرایط زیر برقرارند:*

$i)\ x\vee ۰=x=x\wedge ۱ \quad , \quad x\wedge ۰=۰ \quad , \quad x\vee ۱=۱;$

$ii)\ x\vee x=x=x\wedge x$

$iii)\ [x\vee y]^{-}=\bar{x}\wedge\bar{y} \quad , \quad [x\wedge y]^{-}=\bar{x}\vee\bar{y};$

$iv)\ x\wedge(x\vee y)=x=x\vee(x\wedge y);$

$v)\ x+y=۰\Rightarrow x=y=۰;$

$vi)\ x\cdot y=۱\Rightarrow x=y=۱;$

$vii)\ x\vee y=۰\Rightarrow x=y=۰;$

$viii)\ x\wedge y=۱\Rightarrow x=y=۱.$

***برهان.*** قسمت‌های $(i)$ تا $(iii)$ با توجه به اصول موضوعه، بدیهی هستند. برای اثبات قسمت $(iv)$، داریم:

$$x\wedge(x\vee y)=(y\vee x)\wedge x=(y\cdot\bar{x}+x)\wedge x=(y\cdot\bar{x}+x+\bar{x})\cdot x=(y\cdot\bar{x}+۱)\cdot x=۱\cdot x=x$$

تساوی دیگر قسمت $(iv)$ از دوگانی پیروی می‌کند.

اگر $x+y=۰$، آن‌گاه $x=x+۰=x+(۰\wedge y)=(x+y)\wedge(y+۰)=x\wedge(x\vee y)=۰$

و در نتیجه $y=۰$ که این، قسمت $(v)$ را ثابت می‌کند.

بنا بر دوگان قسمت $(v)$، $(vi)$ به دست می‌آید. همچنین اگر $x\vee y=۰$، آن‌گاه $(x+\bar{y})+y=۰$. بنابراین با توجه به قسمت $(v)$، $y=۰$ و همچنین $x=۰$ که این، قسمت $(vii)$ را ثابت می‌کند.

قسمت $(viii)$ دوباره بنا بر دوگان $(vii)$ به دست می‌آید. $\square$

در این‌جا رابطه‌ی "$\leq$" را بین اعضای $MV$−جبر تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۳.۳.۱.** $x \leq y$، اگر و تنها اگر $x \vee y = y$. به طور معمول، علامت $x < y$ به معنی $x \leq y$ و $x \neq y$ است.

**گزاره ۴.۳.۱.** در هر $MV$−جبر $A$، *برای هر* $x, y, z \in A$ *شرایط زیر برقرارند:*

$i)\ \circ \leq x \leq ۱$ $\qquad$ $ii)\ x < x;$

$iii)\ x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ $\qquad$ $iv)\ x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y;$

$v)\ x < y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ $\qquad$ $vi)\ x \leq y \Leftrightarrow \bar{y} \leq \bar{x}.$

***برهان.*** قسمت‌های $(i)$ تا $(iv)$ با توجه به تعریف ۱.۳.۱، گزاره‌ی ۲.۳.۱، تعریف ۳.۳.۱ و اصول موضوعه بدیهی هستند.

قسمت $(v)$ از گزاره‌ی ۲.۳.۱ مورد $(iv)$، نتیجه می‌شود و قسمت $(vi)$ از مورد $(v)$ به دست می‌آید. $\square$

**گزاره ۵.۳.۱** (یکنواختی $\vee$ و $\wedge$)**.** در هر $MV$−جبر $A$، *برای هر* $x, y, z \in A$، *هرگاه* $x \leq y$، *آن‌گاه* $x \vee z \leq y \vee z$ *و* $x \wedge z \leq y \wedge z$.

***برهان.*** اگر $x \leq y$، آن‌گاه $x \vee y = y$ و $x \wedge y = x$. بنابراین

$$(x \vee z) \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z \vee z = y \vee z \ , \ (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \wedge z \wedge z = x \wedge z$$

قسمت $(v)$، نتیجه می‌دهد $x \vee z \leq y \vee z$ و $x \wedge z \leq y \wedge z$. $\square$

**گزاره ۶.۳.۱.** در هر $MV$−جبر $A$، *برای هر* $x, y \in A$، *رابطه‌ی* $x \wedge y \leq x \leq x \vee y$ *برقرار است.*

***برهان.*** با توجه به گزاره‌ی ۲.۳.۱ قسمت $(i)$، گزاره‌ی ۴.۳.۱ قسمت $(i)$ و گزاره‌ی ۵.۳.۱، حکم به دست می‌آید. $\square$

**گزاره ۷.۳.۱.** *در هر $MV$−جبر $A$، برای هر $x, y, x', y' \in A$، هرگاه $x \leq y$ و $x' \leq y'$، آن‌گاه $x \vee x' \leq y \vee y'$ و $x \wedge x' \leq y \wedge y'$.*

**برهان.** می‌دانیم که $x \vee x' \leq x \vee y' \leq y \vee y'$ و به طور مشابه $x \wedge x' \leq x \wedge y' \leq y \wedge y'$. □

**گزاره ۸.۳.۱** (یکنواختی + و ·). *در هر $MV$−جبر $A$، برای هر $x, y, z \in A$، هرگاه $x \leq y$، آن‌گاه $x + z \leq y + z$ و $x \cdot z \leq y \cdot z$.*

**برهان.** نشان می‌دهیم که اگر $x \leq y$، آن‌گاه $x \wedge y = x$ و $x \vee y = y$. بنا بر ۱۱ $Ax \cdot$، $x + z = (x \wedge y) + z = (x + z) \wedge (y + z)$. بنابراین $x + z \leq y + z$. به طور مشابه با توجه به $Ax \cdot 11'$، داریم $x \cdot z \leq y \cdot z$. □

**گزاره ۹.۳.۱.** *در هر $MV$−جبر $A$، برای هر $x, y \in A$، رابطه‌ی $x \cdot y \leq x \leq x + y$ برقرار است.*

**برهان.** با کمک ۵ $Ax \cdot$، $Ax \cdot 5'$، گزاره‌ی ۴.۳.۱ قسمت $(i)$ و گزاره‌ی ۸.۳.۱، حکم به دست می‌آید. □

**گزاره ۱۰.۳.۱.** *برای هر $x, y, x', y'$ از $MV$−جبر $A$، اگر $x \leq y$ و $x' \leq y'$، آن‌گاه $x + x' \leq y + y'$ و $x \cdot x' \leq y \cdot y'$.*

**برهان.** با توجه به گزاره‌ی ۸.۳.۱، حکم برقرار است. □

**گزاره ۱۱.۳.۱.** *رابطه‌ی "$\leq$"، یک رابطه‌ی جزئاً مرتب بین اعضای $A$ است. عناصر $x \vee y$ و $x \wedge y$ به ترتیب کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین از عناصر $x$ و $y$، با توجه به ترتیب "$\leq$" هستند.*

**برهان.** با توجه به گزاره‌های ۴.۳.۱، ۶.۳.۱ و ۷.۳.۱، حکم ثابت می‌شود. □

**گزاره ۱۲.۳.۱.** *در هر $MV$–جبر $A$، برای هر $x, y \in A$، داریم*

$$x \cdot y \leq x \wedge y \leq x \leq x \vee y \leq x + y.$$

***برهان.*** با توجه به گزاره‌های ۶.۳.۱، ۹.۳.۱ و ۱۱.۳.۱، رابطه بدیهی است. □

گزاره‌ی زیر بسیار مفید است.

**گزاره ۱۳.۳.۱.** *در هر $MV$–جبر $A$، برای هر $x, y \in A$، احکام زیر با هم معادل‌اند:*

i) $x \leq y$؛

ii) $y + \bar{x} = ۱$؛

iii) $x \cdot \bar{y} = ۰$.

***برهان.*** اگر $x \cdot \bar{y} = ۰$، آن‌گاه با توجه به تعریف ۱.۳.۱، $x \vee y = x \cdot \bar{y} + y = ۰ + y = y$ و بنابراین $x \leq y$. اگر $x \leq y$، آن‌گاه بنا بر گزاره‌ی ۱۰.۳.۱، $۱ = x + \bar{x} \leq y + \bar{x}$. اما $y + \bar{x} \leq ۱$ و در نتیجه $y + \bar{x} = ۱$. پس قسمت $(i)$ معادل با قسمت $(iii)$ است. قسمت‌های $(ii)$ و $(iii)$ نیز به وضوح با یکدیگر معادل‌اند. □

در ادامه، قانون حذف را مورد توجه قرار می‌دهیم.

**گزاره ۱۴.۳.۱.** *در هر $MV$–جبر $A$، برای هر $x, y, z \in A$، اگر $x + z = y + z$، $x \leq \bar{z}$ و $y \leq \bar{z}$، آن‌گاه $x = y$.*

***برهان.*** با توجه به $Ax \cdot ۹'$، داریم

$$x = x \cdot ۱ = x \cdot (\bar{x} + \bar{z}) = \bar{z} \cdot (x + z) = \bar{z} \cdot (y + z) = y \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = y \cdot ۱ = y.$$

□

**گزاره ۱۵.۳.۱.** *در هر $MV$–جبر $A$، برای هر $x, y \in A$، احکام زیر با هم معادل‌اند:*

i) $x + y = y$؛

$x \cdot y = x$ (ii؛

$y \vee \bar{x} = ۱$ (iii؛

$x \wedge \bar{y} = ۰$ (iv.

***برهان.*** ابتدا باید معادل بودن قسمت‌های $(ii)$ و $(iii)$ را نشان دهیم. معادل بودن قسمت‌های $(i)$ و $(iv)$، بنا بر دوگان، به دست می‌آید و به وضوح قسمت‌های $(iii)$ و $(iv)$ با هم معادل‌اند. اگر $x \cdot y = x$، آن‌گاه $\bar{x} \vee y = \bar{x} + (x \cdot y) = \bar{x} + x = ۱$. اگر $\bar{x} \vee y = ۱$، آن‌گاه با توجه به $Ax \cdot ۱۱'$، داریم $x = x \cdot ۱ = x \cdot (\bar{x} \vee y) = x \cdot \bar{x} \vee x \cdot y = ۰ \vee x \cdot y = x \cdot y$. □

**گزاره ۱۶.۳.۱.** *در هر $MV$−جبر $A$، برای هر $x \in A$، شرایط زیر معادل‌اند:*

$$i)\ x + x = x \qquad ii)\ x \cdot x = x \qquad iii)\ \bar{x} + \bar{x} = \bar{x}$$

$$iv)\ \bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x} \qquad v)\ x \vee \bar{x} = ۱ \qquad vi)\ x \wedge \bar{x} = ۰.$$

***برهان.*** با توجه به گزاره‌ی ۱۵.۳.۱، احکام به دست می‌آیند. □

**یادآوری.** این مطلب را یادآوری می‌کنیم که در یک $MV$−جبر، مجموعه‌ی عناصر $B$ که خودتوان هستند، نسبت به اعمال + و · دقیقاً آن عناصری هستند که در قانون عدم شمول میانی نسبت به اعمال $\vee$ و $\wedge$ صدق می‌کنند. بنابراین گزاره‌ی ۱۶.۳.۱ منجر به ادامه‌ی بحث در زیر می‌شود.

**گزاره ۱۷.۳.۱.** *اگر $B$ مجموعه‌ی عناصر $x$ از $A$ باشد که $x+x = x$، آن‌گاه $B$ تحت اعمال +، · و − بسته است که $x + y = x \vee y$ و $x \cdot y = x \wedge y$ برای $x, y \in B$. بنابراین سیستم $(B, +, \cdot, -, ۰, ۱)$ نه تنها یک زیرجبر از $A$ می‌باشد، بلکه بزرگترین زیرجبر از $A$ است که هم‌زمان یک جبر بولی نسبت به اعمال +، · و − می‌باشد.*

***برهان.*** این که $B$ تحت سه عمل مذکور بسته است از گزاره‌ی ۱۶.۳.۱ به دست می‌آید. همچنین $B$ تحت $\vee$ و $\wedge$ بسته می‌باشد. حال برای این که ثابت کنیم $B$ یک جبر بولی است، نشان می‌دهیم که اگر $x, y \in B$، آن‌گاه چون $x \leq x \vee y \in B$ و $y \leq x \vee y \in B$، داریم $x \vee y = (x \vee y) + (x \vee y) \geq x + y$. اما با توجه به گزاره‌ی ۱۲.۳.۱، $x \vee y \leq x + y$. بنابراین $x + y = x \vee y$ و به طور مشابه $x \cdot y = x \wedge y$. در نتیجه برای عناصر $B$، $Ax \cdot ۱۱$ و $Ax \cdot ۱۱'$ با جایگذاری $\vee$ و $\wedge$ به ترتیب به جای $+$ و $\cdot$ به دست می‌آیند. پس $B$ یک جبر بولی می‌شود. اگر $C$ یک زیرجبر از $A$ نیز، یک جبر بولی نسبت به اعمال $+$، $\cdot$ و $-$ باشد، آن‌گاه هر عضو از $C$ باید در معادله‌ی $x + x = x$ صدق کند. لذا $C \subseteq B$ و گزاره ثابت می‌شود. $\square$

**تذکر ۱۸.۳.۱.** *شرط تمایز بین یک $MV$-جبر $(A, +, \cdot, -, \circ, ۱)$ و جبر بولی، نداشتن قانون خودتوانی $x + x = x$ است. در حالی که نسبت به اعمال $\vee$، $\wedge$ و $-$، تفاوت بین سیستم $(A, \vee, \wedge, -, \circ, ۱)$ و یک جبر بولی، نداشتن قانون "طرد شق وسط" $x \vee \bar{x} = ۱$ می‌باشد. در این‌جا باید اشاره کنیم در حالی که تعمیم‌های مختلفی از جبر بولی که قانون طرد شق وسط صدق نمی‌کند، شناخته شده هستند (مانند همه‌ی انواع شبکه‌ها)، تعداد خیلی کمی از تعمیم‌های جبر بولی وجود دارند که قانون خودتوانی روی آن‌ها برقرار نیست.*

برای پایان دادن به این بخش، برخی از دستورالعمل‌های کلی را برای به دست آوردن $MV$-جبرهای جدید از آن‌هایی که تاکنون شناخته‌ایم، معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۱۹.۳.۱.** $MV$-جبر $(A, +, \cdot, -, \circ, ۱)$ داده شده است. گوییم $B$ زیرجبر $A$ است، اگر $B \subseteq A$، $\circ, ۱ \in B$ و $B$ تحت اعمال $+$، $\cdot$ و $-$ بسته باشد. یک سیستم $(B, +, \cdot, -, \circ, ۱)$ تصویر همریختی از $A$ است (یا $A$ همریختی به $B$ می‌باشد)، هرگاه نگاشت $f$ از $A$ بر روی $B$ وجود داشته باشد که $f(\circ) = \circ$ و $f(۱) = ۱$ و $f$ سه عمل $+$، $\cdot$ و $-$ را حفظ کند و

گوییم $f$ یک همریختی از $A$ به $B$ است. اگر $f$ یک به یک باشد، $f$ یک یکریختی از $A$ به $B$ است. در این حالت گوییم که سیستم‌های $(A, +, \cdot, -, \circ, \text{۱})$ و $(B, +, \cdot, -, \circ, \text{۱})$ یکریخت هستند.

برای گردایه‌ای از $MV$–جبرهای $A_i$، $i \in I$، ضرب دکارتی (مستقیم) مجموعه‌های $A_i$ را با $P_{i\in I}A$ نشان می‌دهیم و ضرب دکارتی (مستقیم) جبرهای $A_i$، $i \in I$ را با $(P_{i\in I}A, +, \cdot, -, \circ, \text{۱})$ نشان می‌دهیم که عنصر $\circ$ تابع $f$ای است که به ازای هر $i \in I$، $f(i) = \circ$، عنصر ۱ تابع $f$ای است که برای هر $i \in I$، $f(i) = \text{۱}$. مجموع دو تابع $f$ و $g$ تابع $h$ می‌باشد که $h(i) = f(i) + g(i)$ به ازای هر $i \in I$. ضرب و معکوس تابع $f$ به طور مشابه تعریف می‌شوند. با توجه به اصول $Ax \cdot \text{۱}$ تا $Ax \cdot \text{۱۱}$، درستی مطلب بعدی به دست می‌آید.

**گزاره ۲۰.۳.۱.** *یک زیرجبر از $MV$–جبرها، $MV$–جبر می‌باشد. تصویر همریخت از $MV$–جبرها، $MV$–جبر است و ضرب مستقیم از $MV$–جبرها، $MV$–جبر می‌باشد.*

***برهان.*** به مرجع [۶] مراجعه شود. □

**مثال ۲۱.۳.۱.** فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی بین $\circ$ و ۱ باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$i)\ \circ \in S, \text{۱} \in S \qquad ii)\ x, y \in S \Rightarrow \min(\text{۱}, x+y) \in S;$$

$$iii)\ x, y \in S \Rightarrow \max(\circ, x+y-\text{۱}) \in S \qquad iv)\ x \in S \Rightarrow \text{۱} - x \in S.$$

حال اگر برای اعضای $x, y \in S$ تعریف کنیم

$$\bar{x} = \text{۱} - x x \cdot y = \max(\circ, x+y-\text{۱}) \qquad , \qquad x + y = \min(\text{۱}, x+y)$$

مشکلی در بررسی این که سیستم $(S, +, \cdot, -, \circ, \text{۱})$ یک $MV$–جبر است، نخواهیم داشت. اعمال $\vee$ و $\wedge$ روی $S$ به صورت زیر هستند:

$$x \vee y = \max(x, y) \qquad , \qquad x \wedge y = \min(x, y)$$