دانشگاه تبریز

دانشکده ریاضی و آمار

گراف بازه‌ای تصادفی روی فاصله [۰،۱]

نگارش: مهدی فرضی

استاد راهنما: دکتر ایمانی

استاد مشاور: دکتر بادامچی زاده

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در
آمار ریاضی

بهمن ماه ۱۳۸۸

چکیده

n نقطه به تصادف روی بازه‌ی $[0, 1]$ انتخاب شده و متناظر با هر نقطه‌ی انتخابی رأسی در نظر گرفته می‌شود. اگر فاصله‌ی دو نقطه کمتر از مقدار معلوم d (که معمولاً تابعی از n است) باشد، بین دو رأس متناظرشان یالی قرار می‌گیرد. گراف حاصل یک گراف بازه‌ای تصادفی نامیده می‌شود. در این پایان نامه توسیع این نوع گراف ها مورد بررسی قرار می گیرد و یک قانون صفر — یک برای چنین گراف هایی به دست می آید.

بررسی این نوع گراف ها در حالتی که n به بینهایت میل می‌کند و d به صفر میل می‌کند، جذابیت بیشتری دارد. با توجه به این که d با چه سرعتی به صفر میل می‌کند خواص گراف بازه ای تصادفی حاصل متفاوت خواهد بود. حالت های متفاوت را در نظر می‌گیریم و نشان می دهیم که چگونه با افزایش مقدار d ، گراف بازه ای تصادفی از یک گراف با رئوس منفرد به یک گراف همبند تبدیل می‌شود. در آخر طی قضیه‌ای یک قانون صفر — یک نیز برای گراف بازه ای تصادفی به دست می آوریم.

قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظه‌ی زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گستردهٔ دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید. امتنان و سپاس می‌گزارم تلاشها، زحمات و راهنمایی‌های ظریف، ارزشمند و بی‌شائبه‌ی استاد فرزانه و گرانمایه‌ام،آقای دکتر رامین ایمانی را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وامی‌داشتند.

مهدی فرضی

بهمن ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و نتایج اولیه

۱.۱ مقدمه

شاینرمن[۱] [۲۹]، مدلی از گراف های بازه ای تصادفی را مطالعه کرده است . در این مدل ، n نقطه به تصادف از بازه‌ی [۰, ۱] انتخاب شده، حول هر نقطه‌ی انتخابی بازه‌ای به مرکز آن نقطه با طولی تصادفی که به طور یکنواخت و مستقل از دیگران، از بازه‌ی $[۰, d]$، $(d \leq ۱)$ انتخاب شده، در نظر گرفته می‌شود. برای هر نقطه، رأسی متناظر انتخاب می‌کنیم. هر دو رأس که بازه های متناظرشان متقاطع باشند به کمک یالی به هم وصل می‌شوند و گراف حاصل گراف بازه ای تصادفی مورد بحث در شاینرمن [۲۹] است. گودهارت و یاوورسکی[۲] [۱۶] مدل دیگری برای گراف های بازه ای تصادفی معرفی کرده‌اند که در آن بازه های متناظر هر نقطه‌ی انتخابی، به مرکز آن نقطه ولی با طولی ثابت هستند.

---

[۱] Scheinerman

[۲] Godehardt and Jawoski

هان و ماکووسکی[1] [۲۰] یک قانون صفر – یک برای چنین گراف هایی ارائه کردند. می‌توان به جای انتخاب n نقطه از بازه [۰, ۱] ، n نقطه را از محیط دایره‌ای به محیط واحد انتخاب کرد، که در این حالت به خاطر مسأله پوشانش، بررسی خواص چنین گراف هایی مشکل تر خواهد شد. چنین گراف هایی اولین بار توسط مائه ها را[2] [۲۳] معرفی شدند و بعداً توسط هویلت [۲۰۰۳] و ایمانی [۲۰۰۸] خواص بیشتری از چنین گراف هایی مورد بررسی قرار گرفته است. اساس بحث در این پایان نامه بر مقالات گودهارت و یاوورسکی [۱٦] و هان و ماکووسکی [۲۰] بنیان نهاده شده است.

با تعدادی لم که از آنها نتایج دقیق، برای احتمال ویژگی های مربوط به همبندی $\mathcal{IG}_{n,d}$ نتیجه می شود، شروع می کنیم. توجه کنید که در این قسمت لم ۱.۲.۱ کلیدی ترین لم است، که در واقع معادل با نتایج مربوط به مسئله های پوشانش است (منبع [۳۰] را ببینید). احتمالی که می‌خواهیم نتیجه بگیریم، مساوی است با،احتمال این که، $k-1$ کمان به طور تصادفی روی محیط دایره‌ای با محیط y، طوری انتخاب شوند که کاملاً محیط دایره را بپوشانند. دو دلیل برای ارائه چنین برهانی وجود دارد: اولاً نشان می‌دهد که ایده ما روشی برای به دست آوردن نتایج دقیق برای $\mathcal{IG}_{n,d}$ می‌باشد، ثانیاً برهان سر راست می‌باشد.

۲.۱ نتایج دقیق برای گراف بازه‌ای تصادفی

---

[1] Han and Makowski

[2] Maehara

لم ۱.۲.۱ فرض کنید $[x, x+y]$ زیر بازه‌ای به طول y از بازه $[۰, ۱]$ باشد. فرض کنید دو تا از k رأس بر روی مرزهای زیر بازه قرار گرفته باشند. حال $A_{k,y,d}$ پیشامدی باشد که $k - ۲$ رأس باقیمانده که به صورت تصادفی در بازه $[۰, ۱]$ قرار خواهند گرفت همگی در داخل زیر بازه $[x, x+y]$ به طوری قرار گیرند که دو سر زیر بازه را به هم متصل کنند و در نتیجه یک زیر گراف همبند به طول y ایجاد شود. حال در نظر می‌گیریم:

$$P(k, y, d) = \Pr(A_{k,y,d})$$

در این صورت

$$P(k, y, d) = yP(k-۱, y, d) + ((k-۱)d - y)P(k-۱, y-d, d)$$

با شرایط اولیه

$$P(i, u, d) = \begin{cases} u^{i-۲} & , \quad i \geq ۲ \quad \& \quad u \leq d \\ ۰ & , \quad i \geq ۲ \quad \& \quad u \leq d \end{cases}$$

یک فرمول بسته برای احتمال پیشامد بالا عبارت است از

$$P(k, y, d) = \sum_{j=۰}^{\min\{k-۱, [y/d]\}} \begin{pmatrix} k-۱ \\ j \end{pmatrix} (-۱)^j (y - jd)^{k-۲}$$

اثبات : توجه کنید که احتمال $P(k, y, d)$ به x در بازه $[۰, ۱-y]$ و انتخاب k رأس در فضای احتمال وابسته نیست . مشخصاً خواهیم داشت :

$$P(k, y, d) = ۰ \ , \quad k = ۲, ۳, \ldots \ \& \ y > (k-۱)d$$

سپس فرض می‌کنیم که $y \leq (k-۱)d$ و B پیشامدی باشد که بعد از انتخاب مکانهای $k - ۳$ نقطه در زیر بازه به طول y از $k - ۲$ بازه ایجاد شده (فضای ایجاد شده) بوسیله $k - ۳$

نقطه و مرزها، $k-۳$ تا از فضاهای ایجاد شده کوچکتر یا مساوی d باشد و دقیقاً یکی از فضاها بزرگتر از d ولی کوچکتر یا مساوی $۲d$ باشد. حال اگر فرض کنیم که $A_{k-۱,y,d}$ تولید شده بوسیله $k-۳$ رأس (که البته ۲ تا از رأس ها در مرزها هستند و $k-۳$ رأس در داخل زیر بازه) خواهیم داشت :

$$\Pr\left(A_{k,y,d}\right)=\Pr\left(A_{k,y,d}\middle|A_{k-۱,y,d}\right)\Pr\left(A_{k-۱,y,d}\right)+\Pr\left(A_{k,y,d}\cap A^c_{k-۱,y,d}\cap B\right)$$

و بوضوح خواهیم داشت :

$$\Pr\left(A_{k,y,d}\middle|A_{k-۱,y,d}\right)=y\qquad\&\qquad A^c_{k-۱,y,d}\cap B=B$$

حال پیشامد $A_{k,y,d}\cap \mathrm{B}$ را در نظر می گیریم . توجه کنید که بعد از حذف یک بازه به طول d، $k-۳$ نقطه رأس های زیر بازه ای را به هم وصل می کند که طول زیر بازه $y-d$ است. پس ابتدا $k-۳$ نقطه را در داخل زیر بازه به طول $y-d$ طوری قرار می دهیم که در رأس به هم وصل شوند که این همان پیشامد $A_{k-۱,y-d,d}$ است. سپس یکی از $k-۲$ بازه را بزرگ می کنیم (به اندازه d) در این صورت پیشامد B را خواهیم داشت و در نهایت k امین رأس خود را در بازه ای که بزرگ کردیم قرار می دهیم و پیشامد $A_{k,y,d}$ به دست می آید. توجه کنید که $k-۳$ نقطه بازه $y-d$ را به $k-۲$ بازه ناسازگار تقسیم می کند که طول آنها عبارتند از $y_۱,y_۲,\dots,y_{k-۲}$ که $i=۱,۲,\dots,k-۲$ ، $y_i\leq d$ و نیز $y_۱+y_۲+\dots+y_{k-۲}=y-d$.
از این رو برای به دست آوردن $A_{k,y,d}\cap \mathrm{B}$، $k-۲$ حالت جدا از هم داریم. برای مثال به یکی از این حالت ها توجه می کنیم :

فرض کنید که i امین بازه به طول $y_۱$ را به اندازه d افزایش دهیم و سپس k امین رأس را در آن برای به دست آوردن $A_{k,y,d}$ در آن قرار دهیم که این کار با احتمال $d-y_i$ انجام پذیر است.

با توجه به توزیع یکنواخت روی بازه $[\circ, \text{۱}]$ ، احتمال قرار گرفتن آخرین رأس در بازه x برابر است با $d - y_i$ با توجه به قانون جمع احتمالات ناسازگار می توانیم بنویسیم:

$$\sum_{i=\text{۱}}^{k-\text{۲}} (d - y_i) = (k - \text{۱})\, d - y$$

بنابراین

$$\Pr\left(A_{k,y,d} \cap B\right) = \left((k - \text{۱})\, d - y\right) P\left(k - \text{۱}, y - d, d\right)$$

و در نتیجه حالت بازگشتی، تساوی های زیر را داریم :

$$\Pr\left(A_{k,y,d} \middle| A_{k-\text{۱},y,d}\right) = y \qquad \& \qquad A^c_{k-\text{۱},y,d} \cap B = B$$

$$P\left(k, y, d\right) = yP\left(k - \text{۱}, y, d\right) + \left((k - \text{۱})\, d - y\right) P\left(k - \text{۱}, y - d, d\right) \quad , \quad y \leq (k - \text{۱})\, d$$

حال برای ادامه برهان داریم (پیوست (الف) را ملاحظه کنید):

$$\sum_{j=\circ}^{k-\text{۱}} \left(\begin{array}{c} k - \text{۱} \\ j \end{array}\right) (-\text{۱})^j \left(y - jd\right)^{k-\text{۲}} = d^{k-\text{۲}} A_{k-\text{۱}}\left(-\frac{y}{d}, \frac{y}{d} - k + \text{۱}; \circ, -\text{۱}\right)$$

چون

$$A_N\left(a, b; r, s\right) = \sum_{i=\circ}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ i \end{array}\right) \left(i + a\right)^{i+r} \left(N - i + b\right)^{N-i+s}$$

و

$$A_N\left(a, b; \circ, -\text{۱}\right) = b^{-\text{۱}} \left(a + b + N\right)^N$$

و خواهیم داشت

$$\sum_{j=\circ}^{k-\text{۱}} \left(\begin{array}{c} k - \text{۱} \\ j \end{array}\right) (-\text{۱})^j \left(y - jd\right)^{k-\text{۲}} = \circ \quad , \qquad k = \text{۲}, \text{۳}, \ldots \quad \& \quad y > (k - \text{۱})\, d$$

بنابراین فرمول برای $P(k,y,d)$ و همچنین برای $y > (k-۱)d$ معتبر است.

حال پیشامدی را بررسی می‌کنیم که در آن k رأس داده شده از یک زیر گراف همبند $\mathcal{IG}_{n,d}$ با ویژگی اضافی، بین نقطه‌های روی خط، رأس های دیگری در گراف بازه‌ای وجود ندارد. یک زیر گراف همبند با این ویژگی یک زیر گراف همبند کامل نامیده می‌شود.

لم ۲.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{CS}_k(u)$ پیشامدی باشد که k رأس یک زیر گراف کامل همبند به طول کمتر یا مساوی u بسازد $(u > ۰)$ در این صورت داریم:

$$\Pr\left(\mathcal{CS}_k\left(u\right)\right) = \frac{n-k+۱}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}} \sum_{j=۰}^{\min\{k-۱,[u/d]\}} \begin{pmatrix} k-۱ \\ j \end{pmatrix} \left(-۱\right)^j \sum_{t=k-۱}^{n} \begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix} \left(۱-u\right)^{n-t} \left(u-jd\right)^t$$

و خصوصاً فرض کنید که $\mathcal{CS}_k$ پیشامدی باشد که k رأس یک زیر گراف کامل همبند بسازد در واقع حالت برابر $\mathcal{CS}_k(u)$ زمانی که $u \geq (k-۱)\,d$:

$$\Pr\left(\mathcal{CS}_k\right) = \frac{n-k+۱}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}} \sum_{j=۰}^{\min\{k-۱,[۱/d]\}} \begin{pmatrix} k-۱ \\ j \end{pmatrix} \left(-۱\right)^j \left(۱-jd\right)^n$$

اثبات : طبق تعریف داریم $\Pr\left(\mathcal{CS}_۱\left(u\right)\right) = \Pr\left(\mathcal{CS}_۱\right) = ۱$ یعنی برای $k = ۱$ احتمالات پیشامدهای بالا برابر یک است و از این رو می توانیم فرض کنیم که $k \geq ۲$. می توان لم را به وسیله انتگرال گیری از لم ۱.۲.۱ ثابت کرد.

$$\Pr\left(\mathcal{CS}_k\left(u\right)\right) = \int_{۰}^{u} \int_{۰}^{۱-y} k\left(k-۱\right) P\left(k,y,d\right) \left(۱-y\right)^{n-k} dx\, dy$$

توجه کنید عبارت داخل انتگرال همان احتمال حالت های مساعد می باشد، $P\left(k,y,d\right) \times k\left(k-۱\right)$ احتمال k رأس است که می تواند هر زیر گراف کامل همبند بسازد و

$(1-y)^{n-k}$ احتمال بقیه‌ی رئوس است که در بیرون از زیر گراف همبند قرار می گیرند.

ابتدا قسمت دوم لم را برهان می کنیم. بنابراین باید کران بالای انتگرال را برای متغیر یک قرار دهیم.

$$\Pr\left(\mathcal{CS}_k\left(u\right)\right)=k\left(k-1\right)\int_0^u\int_0^{1-y}dxP\left(k,y,d\right)\left(1-y\right)^{n-k}dy$$

$$=k\left(k-1\right)\int_0^u P\left(k,y,d\right)\left(1-y\right)^{n-k+1}$$

حال داریم

$$\Pr\left(\mathcal{CS}_k\left(u\right)\right)=k\left(k-1\right)\int_0^1\sum_{j=0}^{\min\{k-1,[1/d]\}}\left(\begin{array}{c}k-1\\j\end{array}\right)\left(-1\right)^j\left(y-jd\right)^{k-2}\left(1-y\right)^{n-k+1}dy$$

حال بازه $[0,1]$ را به زیر بازه های مشخص تقسیم می کنیم :

$$\Pr\left(\mathcal{CS}_k\right)=k\left(k-1\right)\sum_{t=0}^{[1/d]-1}\int_{td}^{(t+1)d}\sum_{j=0}^{M}\left(\begin{array}{c}k-1\\j\end{array}\right)\left(-1\right)^j\left(y-jd\right)^{k-2}\left(1-y\right)^{n-k+1}dy$$

$$+k\left(k-1\right)\int_{[1/d]d}^{1}\sum_{j=0}^{M}\left(\begin{array}{c}k-1\\j\end{array}\right)\left(-1\right)^j\left(y-jd\right)^{k-2}\left(1-y\right)^{n-k+1}dy$$

که در آن $M=min\left\{t,k-1\right\}$.

حال با توجه به رابطه فوق می توانیم مجموع درونی را به بیرون از انتگرال انتقال دهیم، سپس خواهیم داشت:

$$\Pr\left(\mathcal{C}\,\mathcal{S}_k\right) = k\,(k-۱)\sum_{j=\circ}^{M^*}\binom{k-۱}{j}(-۱)^j\int_{jd}^{۱}(y-jd)^{k-۲}\,(۱-y)^{n-k+۱}\,dy$$

$$= k\,(k-۱)\sum_{j=\circ}^{M^*}\binom{k-۱}{j}(-۱)^j\,(۱-jd)^n\int_{\circ}^{۱} z^{k-۲}\,(۱-z)^{n-k+۱}\,dz$$

$$= k\,(k-۱)\sum_{j=\circ}^{M^*}\binom{k-۱}{j}(-۱)^j\,(۱-jd)^n\,\frac{\Gamma(k-۱)\Gamma(n-k+۲)}{\Gamma(n+۱)}$$

$$= \frac{n-k+۱}{\binom{n}{k}}\sum_{j=\circ}^{M^*}\binom{k-۱}{j}(-۱)^j\,(۱-jd)^n$$

که در آن $M^* = \min\{k-۱,[۱/d]\}$. برهان برای $u > (k-۱)\,d$ کامل است. به طریق مشابه می توانیم به دست آوریم:

$$\Pr\left(\mathcal{C}\,\mathcal{S}_k\right) = k\,(k-۱)\sum_{j=\circ}^{\min\{k-۱,[u/d]\}}\binom{k-۱}{j}(-۱)^j$$

$$\times\sum_{i=\circ}^{n-k+۱}\binom{n-k+۱}{i}(۱-u)^{n-k+۱-i}\,(u-jd)^{k+i-۱}\,\frac{\Gamma(k-۱)\Gamma(i+۱)}{\Gamma(k+i)}$$

$$= \frac{n-k+۱}{\binom{n}{k}}\sum_{j=\circ}^{\min\{k-۱,[u/d]\}}\binom{k-۱}{j}(-۱)^j\sum_{t=k-۱}^{n}\binom{n}{t}(۱-u)^{n-t}\,(u-jd)^t$$

برای مطالعات مجانبی به لم بعد نیاز داریم.

لم ۳.۲.۱ برای اعداد صحیح $k = ۲, ۳, \ldots, n$ و $r = ۰, \ldots, k - ۲$ فرض کنید $\mathcal{CS}_k^r$ پیشامدی باشد که k رأس یک زیر گراف کامل همبند به طول l تشکیل دهد به طوری که $l \in [rd; (r + ۱) d]$ و

$$\Pr\left(\mathcal{CS}_k^r\right) = \frac{n-k+۱}{\binom{n}{k}} \sum_{j=۰}^{r} \binom{k-۱}{j} (-۱)^j \sum_{t=k-۱}^{n} \binom{n}{t} \left(۱ - (r+۱)\, d\right)^{n-t} (r + ۱ - j)^t d^t$$

$$-\frac{n-k+۱}{\binom{n}{k}} \sum_{j=۰}^{r} \binom{k-۱}{j} (-۱)^j \sum_{t=k-۱}^{n} \binom{n}{t} (۱ - rd)^{n-t} (r - j)^t d^t$$

یا به طور معادل

$$\Pr\left(\mathcal{CS}_k^r\right) = \frac{n-k+۱}{\binom{n}{k}} \sum_{j=۰}^{r} \binom{k-۱}{j} (-۱)^j \sum_{t=۰}^{k-۲} \binom{n}{t} (۱ - rd)^{n-t} (r - j)^t d^t$$

$$-\frac{n-k+۱}{\binom{n}{k}} \sum_{j=۰}^{r} \binom{k-۱}{j} (-۱)^j \sum_{t=۰}^{k-۲} \binom{n}{t} \left(۱ - (r+۱)\, d\right)^{n-t} (r + ۱ - j)^t d^t.$$

به سادگی قابل اثبات است.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید که k رأس یک زیر گراف کامل همبند را طوری بسازند که چپ ترین رأس در داخل بازه d از صفر قرار بگیرد و هیچ رأس قبل از آن قرار نگیرد. چنین زیر گرافی را زیرگراف مرزی همبند کامل گویند.

لم ۴.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{CBS}_k$ پیشامدی باشد که k رأس یک زیر گراف مرزی همبند کامل را تشکیل دهد. در این صورت

$$\Pr\left(\mathcal{CBS}_k\right) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=0}^{\min\{k,[1/d]\}} \binom{k}{j} (-1)^j \left(1 - jd\right)^n$$

اثبات : در این برهان ما یک رأس اضافی در نقطه صفر قرار می دهیم. پس در این صورت پیشامد $\mathcal{CBS}_k$ با رأس اضافی که قرار دادیم یک زیر گراف مرزی همبند کامل تشکیل می‌دهد. بنابراین با استفاده از لم ۱.۲.۱ و مشابه برهان لم ۲.۲.۱ خواهیم داشت:

$$\Pr\left(\mathcal{CBS}_k\right) = k \int_0^1 P\left(k+1, y, d\right) \left(1-y\right)^{n-k} dy$$

$$= k \sum_{j=0}^{\min\{k,[1/d]\}} \binom{k}{j} (-1)^j \int_0^{1-jd} y^{k-1} \left(1 - jd - y\right)^{n-k} dy$$

$$= k \sum_{j=0}^{\min\{k,[1/d]\}} \binom{k}{j} (-1)^j \left(1 - jd\right)^n \frac{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+1)}$$

لم ۵.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{CC}_k$ پیشامدی باشد که k رأس یک مؤلفه‌ی همبند تشکیل دهد. در این صورت برای $k < n$ احتمال پیشامد عبارت است از:

$$\Pr\left(\mathcal{CC}_k\right) = \frac{2}{\binom{n}{k}} \sum_{j=0}^{\min\{k,[1/d]-1\}} \binom{k}{j} (-1)^j \left(1 - \left(j+1\right) d\right)^n$$
$$+ \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=0}^{\min\{k-1,[1/d]-2\}} \binom{k-1}{j} (-1)^j \left(1 - \left(j+2\right) d\right)^n$$

و

$$\Pr\left(\mathcal{C}\,\mathcal{C}_n\right) = \Pr\left(\mathcal{C}\,\mathcal{S}_n\right)$$

اثبات : براساس لم ۲.۲.۱ احتمال این که همه‌ی n رأس از یک زیر بازه به طول $۲d - ۱$ انتخاب شود و نیز k رأس از n رأس یک زیر گراف همبند کامل تشکیل دهد عبارت است از:

$$\frac{n-k+۱}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}} \sum_{j=۰}^{\min\{k-۱,[۱/d-۲]\}} \begin{pmatrix} k-۱ \\ j \end{pmatrix} (-۱)^j \left(۱-۲d-jd\right)^n$$

تحت فرض بالا با یک گراف بازه‌ای $\mathcal{I}\,\mathcal{G}_{n,d^*}$ سر و کار داریم که $d^* = d/\left(۱-۲d\right)$. حال بازه به طول $۲d - ۱$ را به اندازه $۲d$ بزرگ می‌کنیم تا اندازه‌اش به طول یک باشد، و این کار را با افزودن دو بازه به طول d یکی قبل ازچپ ترین نقطه‌ی زیر گراف و یکی بعد از راست ترین نقطه‌ی زیر گراف، پس در این صورت زیر گراف همبند یک مؤلفه‌ی $\mathcal{I}\,\mathcal{G}_{n,d}$ می باشد. بنابراین فرمول احتمال بالا احتمال دلخواه را دریک حالت خاص ارائه می دهد. دقت کنید که این حالت خاص، عبارت بود از این که در این حالت هر دو نقطه‌ی انتهائی یعنی در راست ترین و چپ ترین نقطه‌ی مؤلفه در داخل بازه به طول d از رئوس بازه واحد قرار نداشتند.

حال برای احتمال مورد علاقه علاوه بر حالت فوق دو حالت دیگر نیز وجود دارد که قرینه هم هستند و احتمال هایشان برابر است و این حالتی است که یکی از دو تا نقطه آخر مؤلفه در داخل بازه به طول d از رئوس بازه واحد قرار بگیرد. در این حالت با توجه به این که اندازه‌ی مؤلفه $۲d - ۱$ است نتیجه می‌شود که نقطه‌ی دیگر ما در بازه بیشتر از d از یکی از رئوس بازه واحد قرار می گیرد. برای به دست آوردن احتمال در حالت متقارن أخیر از لم ۴.۲.۱ به صورت زیر استفاده می کنیم.

با همان روشی که برای اولی انجام دادیم برای این حالت نیز فرض می کنیم n رأس زیر بازه

ای به طول $d - ۱$ انتخاب می شود. پس در این صورت با توجه به لم ۴.۲.۱ احتمال این که از همه n رأس انتخاب شده از زیر بازه‌ای به طول $d - ۱$، k رأس یک زیر گراف کامل همبند مرزی ایجاد کند عبارتند از:

$$\frac{۱}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}} \sum_{j=۰}^{\min\{k,[۱/d-۱]\}} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (-۱)^j \left(۱ - d - jd\right)^n$$

حال در این حالت بازه $d - ۱$ را با افزودن بازه d به آخرین نقطه مؤلفه که بازه بیشتر از d از نقطه مرزی داشت، مسئله کامل می شود.

حال با جمع احتمال این سه حالت به احتمال مورد نظر دست خواهیم یافت.

توجه کنید در حالتی که $k = n$ باشد تنها یک مؤلفه خواهیم داشت و بوسیله لم ۲.۲.۱ احتمال مورد نظر به سادگی به دست می آید.

لم ۶.۲.۱ فرض کنید $P_۲$ پیشامدی باشد که دو رأس داده شده به وسیله یک مسیر به هم متصل باشند در این صورت

$$\Pr\left(P_۲\right) = ۲ \sum_{k=۰}^{n-۲} \begin{pmatrix} n-۲ \\ k \end{pmatrix} \frac{۱}{(k+۱)\,(k+۲)} \Pr\left(\mathcal{C}\,\mathcal{S}_{k+۲}\right)$$

که به وسیله لم ۲.۲.۱ خواهیم داشت:

$$\Pr\left(P_۲\right) = ۲ \sum_{k=۰}^{n-۲} \begin{pmatrix} n-۲ \\ k \end{pmatrix} \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)} \times \frac{n-k-۱}{\begin{pmatrix} n \\ k+۲ \end{pmatrix}} \sum_{j=۰}^{\min\{k+۱,[۱/d]\}} \begin{pmatrix} k+۱ \\ j \end{pmatrix} (-۱)^j \left(۱ - jd\right)^n$$

$$= ۲ \sum_{k=۰}^{n-۲} \frac{n-k-۱}{n(n-۱)} \sum_{j=۰}^{\min\{k+۱,[۱/d]\}} \begin{pmatrix} k+۱ \\ j \end{pmatrix} (-۱)^j \left(۱ - jd\right)^n$$

توجه کنید فرمول بالا از این واقعیت که " برای این که دو رأس به وسیله یک مسیر به هم متصل شوند بایددر یک مؤلفه قرار گیرند " نشأت گرفته است.

لم ۷.۲.۱ فرض کنید $P_{۳}$ پیشامدی باشد که سه رأس داده شده روی یک جزء یا مؤلفه باشد

$$\Pr\left(P_{۳}\right) = ۳ \sum_{k=۰}^{n-۳} \left(\begin{array}{c} n-۳ \\ k \end{array} \right) \frac{۱}{\left(k+۱\right)\left(k+۲\right)\left(k+۳\right)} P\left(\mathcal{CS}_{k+۳}\right)$$

حال آماده هستیم که نتایجی را در مورد توزیع چند متغیر تصادفی بیان کنیم، که این متغیرهای تصادفی عبارتند از:

- C_n تعداد مؤلفه ها
- K_n اندازه یک مؤلفه که شامل رأس به خصوصی است
- C_n^k تعداد مؤلفه های به اندازه k رأس
- $C_n^{۱}$ تعداد رأس های منفرد

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنید C_n تعداد مؤلفه ها در یک گراف بازه ای تصادفی $\mathcal{IG}_{n,d}$ باشد. در این صورت توزیع احتمالی C_n عبارت است از:

$$\Pr\left(C_n = r\right) = \sum_{j=r-۱}^{\min\{n-۱,[۱/d]\}} \left(\begin{array}{c} n-۱ \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ r-۱ \end{array} \right) \left(-۱\right)^{j+r-۱} \left(۱-jd\right)^n$$

$$, r = ۱, ۲, \ldots, \min\left\{n-۱, [۱/d]+۱\right\}$$

و t امین گشتاور فاکتوریل تعداد مؤلفه ها با بعد یک برابر است با

$$E_t\left(C_n-1\right)=\begin{cases}(n-1)_t\left(1-td\right)^n & , \quad 1-td>0\\ \text{موجود نیست} & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

اثبات : توجه کنید که n نقطه قسمتی از بازه واحد را یعنی بین کوچکترین نقطه و بزرگترین نقطه را به $n-1$ بازه که فضا نامیده می شود تقسیم می کند. حال، $n-1$ متغیر تصادفی $1-0$ ، $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ تعریف می کنیم به طوری که

$$I_i=\begin{cases}1 & , \quad \text{اگر i امین فضا بزرگتر از d باشد}\\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

به سادگی می توان نشان داد که $C_{n-1}=I_1+I_2+\ldots+I_{n-1}$

به پیشامدی که j فضای ایجاد شده $i_1, i_2, \ldots, i_j$ بزرگتر از d باشند توجه کنید، در مدل ها احتمال این پیشامد نمی تواند به انتخاب $i_1, i_2, \ldots, i_j$ وابسته باشد. می توانیم n نقطه را به صورت مستقل و یکنواخت روی زیر بازه به طول $(1-jd)$ با احتمال $(1-jd)^n$ انتخاب کنیم. سپس فضاهای $i_1, i_2, \ldots, i_j$ را به اندازه d بزرگ می کنیم و به حالت مساعد دست می یابیم. پس

$$\Pr\left(I_{i_1}=1, I_{i_2}=1, \ldots, I_{i_i}=1\right)=\left(1-jd\right)^n$$

برهان قضیه با به کار بردن فرمول شمول و طرد کامل می‌شود(منبع [3] را ببینید).

نتیجه 1.2.1 احتمال این که گراف بازه‌ایی تصادفی $\mathcal{IG}_{n,d}$، همبند باشد عبارت است از:

$$\Pr\left(\text{همبند باشد } \mathcal{IG}_{n,d}\right)=\Pr\left(C_n=1\right)=\sum_{j=1}^{\min\{n-1,[1/d]\}}\begin{pmatrix} n-1\\ j\end{pmatrix}\left(-1\right)^j\left(1-jd\right)^n$$

و برای $d<1/\left(n-1\right)$ نتیجه می شود که

$$\Pr\left(\text{همبند باشد } \mathcal{IG}_{n,d}\right)=n!\,d^{n-1}\left(1-\frac{1}{2}\left(n-1\right)d\right)$$

اثبات : چون

$$\Pr\left(C_n = ۱\right) = \Pr\left(\text{همبند باشد } \mathcal{I}\mathcal{G}_{n,d}\right)$$

قسمت اول نتیجه، یک نتیجه مستقیم قضیه یک است، که از لم ۲.۲.۱ به آسانی نتیجه می‌شود.

برهان قسمت دوم: برای $d < ۱/(n-۱)$ خواهیم داشت

$$P\left(C_n = ۱\right) = d^n \sum_{j=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{j} (-۱)^j \left(\tfrac{۱}{d} - j\right)^n$$

$$= -d^n \sum_{j=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{j} \left(j - \tfrac{۱}{d}\right)^{j+۱} \left(\tfrac{۱}{d} - n + ۱ + n - ۱ - j\right)^{n-۱-j}$$

با استفاده از مجموع آبل که در پیوست (الف) آمده است، داریم:

$$\Pr\left(C_n = ۱\right) = -d^n A_{n-۱}\left(-\tfrac{۱}{d}, \tfrac{۱}{d} - n + ۱; ۱, ۰\right) = -d^n \left(\alpha + \beta\left(-\tfrac{۱}{d}\right)\right)^{n-۱}$$

$$= -d^n \sum_{i=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{i} i!\,(n-۱-i)!\left(n-۱-i-\tfrac{۱}{d}\right)$$

$$= d^n (n-۱)!\left(\tfrac{n}{d} - \sum_{i=۰}^{n-۱} i\right) = n!d^{n-۱}\left(۱ - \tfrac{۱}{۲}(n-۱)\,d\right)$$

که در آن از روابط زیر استفاده شده است :

$$\alpha^i = \alpha_i = i!$$

$$\left(\beta(x)\right)^i = \beta_i(x) = i!\,(x+i)$$