فهرست مطالب

۱ **تعاریف و مفاهیم مقدماتی** ۳

۲ **عدد احاطه گر علامت دار راسی** ۸

۲-۱ قضایای مقدماتی عدد احاطه گر علامت دار ۹

۲-۲ مسیرها ودورها ۱۸

۲-۳ گرافهای داچ – ویندمیل و چرخها ۲۳

۲-۴ نردبانها و منشورها ۲۸

۳ **عدد احاطه گر علامت دار** یالی ۳۴

۳-۱ قضایای عدد احاطه گر علامت دار یالی ۳۵

۳-۲ گرافهایی که کرانی از γ'_s را دارند ۳۷

۳-۳ محاسبه γ'_s برای گرافهای G، دارای k دور ۴۲

۳-۴ معرفی کرانهایی برای γ'_s ۵۰

۳-۵ عدد احاطه گر علامت دار یالی گراف کامل دو بخشی ۵۵

۳-۶ تعیین ارزش دقیق $\psi(m)$ برای هر m صحیح مثبت ۶۸

۴ **عدد احاطه گر علامت دار یالی اجباری** ۸۵

۱-۴ **تعیین** $\gamma_s(G)$ **و** $f(G,\gamma_s)$ **برای** $K_4^{(m)}$ ، $C_n^{(m)}$ **و** $T_{2.n}$ ۸۶

۲-۴ $K_{1,n}$ **و** $P_n^{(m)}$ **برای گرافهای** $\gamma_s'(G), f(G,\gamma_s')$ **محاسبه**........................ ۹۲

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل ابتدا تعاریف و مفاهیم عمومی گراف و سپس تعاریف اساسی که برای فصلهای دیگر بکار می ایند ، ارائه می دهیم .

تعریف۱ -۱: گراف ساده G به صورت زوج $G=(V(G),E(G))$ است که در ان $V(G)$ مجموعه متناهی از عناصر به نام رئوس و $E(G)$ مجموعه ای متناهی از زوجهای از عناصر $V(G)$ است که ان را مجموعه یالهای گراف G گویند. به اختصار گراف G را به صورت $G=(V,E)$ نشان می دهند. تعداد رئوس گراف G را مرتبه G و تعداد یالهای ان را اندازه G گویند.

تعریف۱ -۲: گراف ساده $G=(V,E)$ را گراف کامل گوییم هرگاه هر دو راس این گراف مجاور باشند. هرگاه گراف کامل G دارای m راس باشد $(|V|=m)$ انگاه ان را به صورت K_m نشان می دهیم.

تبصره۱ -۳: با توجه به تعریف گراف کامل K_m، تعداد یالهای ان برابر است با:

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

تعریف۱-۴: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده باشد. به ازای دو زیر مجموعه غیر تهی V_1 و V_2 از V ، هرگاه $V=V_1\cup V_2$ $V_1\cap V_2=\Phi$ به طوری که هر یال گراف G، راسی از V_1 را به راسی از V_2 متصل نماید در این صورت گراف Gرا گراف دوبخشی گوییم.

اگر تعداد اعضای V_1، n و تعداد اعضای V_2 برابر m باشند و هر راس از V_1 با هر راس V_2 مجاور باشد، گراف G را گراف دوبخشی کامل می نامیم و به صورت $K_{n,m}$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۵: اگر $|V_1|=1$ و $|V_2|=m$ باشد در این صورت گراف $K_{1,m}$ را یک گراف ستاره گوییم.

تعریف۱ -۶: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده باشد مکمل گراف G را که با $\overline{G}$ نمایش می دهیم که گراف ا ست با همان مجموعه رئوس و یالهای گراف $\overline{G}$ به صورت زیر تعریف می شود:

هر دو راس v_i و v_j $(i \neq j)$ در گراف $\overline{G}$ مجاور هستند اگر و فقط اگر دو راس v_i و v_j در گراف G مجاور نباشند.

تعریف ۱-۷ : در گراف G به دنباله ای از رئوس مانند $x_1x_2...x_n$ که در ان x_i ها متمایز بوده و هر دو راس x_i و x_{i-1} مجاور باشند یک مسیر از راس x_1 به راس x_n است و تعداد یالهای بکار رفته در یک مسیر را طول مسیر می گوییم.گراف متشکل از تنها یک مسیر به طول m را با P_m نشان می دهیم.

تعریف ۱-۸: در یک گراف طول کوتاهترین مسیر بین دو راس v و u را فاصله دو راس گوییم و با علامت $d(u,v)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۹: گراف $G=(V,E)$ همبند است هرگاه بین هر دو راس متمایز G مسیری وجود داشته باشد.

تعریف ۱-۱۰: قطر گراف همبند G که با علامت $d(G)$ نشان داده می شود برابر است با

$$d(G)=\max\{d(u,v)|\ u,v\in V(G)\}$$

تعریف ۱-۱۱: درجه راس v از گراف G برابر است با تعداد یالهایی که از راس v می گذرد وان را با $d(v)$ یا $\deg_G(v)$ نشان می دهیم. مینیمم و ماکسیمم درجه های راسهای G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱۲: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده باشد هرگاه درجه تمام راسهای گراف G برابر باشدان را منتظم گوییم و اگر درجه هر راس برابر r باشد گراف را r- منتظم می نامیم.

تعریف ۱-۱۳: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف سادهمنتظم همبند از درجه ۲ باشد. در این صورت گراف G را یک دور می نامیم. اگر $|V|=m$ باشد گراف دور را به صورت C_m نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱۴: گراف $G_1=(V_1,E_1)$ را یک زیر گراف $G=(V,E)$ می نامیم و به صورت $G_1 \leq G$ نشان می دهیم هرگاه $\Phi \neq V_1 \subseteq V$ و $E_1 \subseteq E$ و راسهای واقع بر هر یال متعلق به E_1 به V_1 متعلق باشند.

تعریف ۱-۱۵: زیر گراف $G_1=(V_1,E_1)$ را زیر گراف القایی گراف $G=(V,E)$ گوییم هرگاه E_1 مجموعه همه یالهایی از گراف G است که هر دو انتهایش در V_1 قرار داشته باشند.

تعریف ۱-۱۶: اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد ، زیر مجموعه S از V را یک مجموعه مستقل راسی از گراف G می نامیم هرگاه هیچ دو یالی از S در گراف G مجاور نباشند.

تعریف ۱-۱۷: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و S یک زیر مجموعه از V باشد. اگر مجموعه رئوس S را از گراف G حذف کنیم در این صورت گراف حاصل را با $G-S$ نشان می دهیم .

تعریف ۱-۱۸: به هر گراف همبند بی دور درخت گوییم.

تعریف ۱-۱۹ :در گراف G به مجموعه ای از یالها که دارای راس مشترک نداشته باشند ، یک تطابق گوییم.

تعریف ۱-۲۰: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف ساده با مجموعه راسهای $V(G)$ باشد. همسایگی باز $N(v)$ را برای هر راس $v \in V(G)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N(v)=\{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$$

و همسایگی بسته $N[v]$ از راس دلخواه v را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N[v]=N(v)\cup\{v\}$$

تعریف ۱-۲۱: در گراف G هر راس از درجه ۱ را یک راس معلق گویند. در گراف G تعداد راسها ی معلق روی راس v را با $l(v)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۲۲ : فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف باشند. حاصل ضرب دکارتی $G_1\times G_2$ گرافی است که مجموعه راسهای ان ، $V(G_1\times G_2)$ ، برابر است با $V(G_1)\times V(G_2)$ و برای هر $x_1,y_1\in V(G_1)$ و $x_2,y_2\in V(G_2)$، زوج (x_1,x_2) و (y_1,y_2) مجاورند ، اگر و فقط اگر x_1 و y_1 در G_1 مجاور باشند و $x_2=y_2$ ، یا x_2 و y_2 در G_2 مجاور باشند و $x_1=y_1$.

فصل دوم

عدد احاطه گر علامت دار رأسی

در این فصل مفهوم تابع احاطه گر علامت دار را بیان کرده ، سپس مفاهیم و قضایای مقدماتی مربوط به عدد احاطه گر علامت دار را ارائه می نماییم. همچنین مفهوم عدد احاطه گر علامت دار اجباری را روی گرافها توضیح داده و برای بعضی از گرافها، عدد احاطه گر علامت دار اجباری را بدست می اوریم.

۲-۱. مفاهیم مقدماتی و قضایایی از عدد احاطه گر علامت دار

فرض کنید G یک گراف و $f:V(G)\rightarrow\{+1,-1\}$ یک تابع باشد و S یک زیر مجموعه از $V(G)$ باشد.

در این صورت تعریف می کنیم:

$$f(S)=\sum_{u\in S}f(u)$$

اگر $S=N[v]$ باشد انگاه $f(S)$ را با $f[v]$ نمایش می دهیم.

برای یک تابع $f:V(G)\rightarrow\{+1,-1\}$ وزن تابع f برابر است با:

$$w(f)=\sum_{v\in V}f(v)$$

اگر برای تابع $f:V(G)\rightarrow\{+1,-1\}$ برای هر $v\in V(G)$ ، $f[v]\geq 1$ ، انگاه تابع f را تابع احاطه گر علامت دار از G می نامیم و کمترین وزن از بین همه توابع احاطه گر علامت دار روی G را با $\gamma_s(G)$ نشان می دهیم و تابع احاطه گر علامت دار از وزن $\gamma_s(G)$ را یک $\gamma_s(G)$- تابع گوییم.

برای هر گراف G عبارت زیر همواره برقرار است:

$$\gamma_s(G)\in Z$$

هر تابع احاطه گر علامت دار روی G را می توان به صورت مجموعه ای از زوجهای مرتب به صورت زیر نمایش داد:

$$S_f=\{(v,f(v))|\ v\in V\}$$

حال فرض کنید f یک $\gamma_s(G)$- تابع باشد. زیر مجموعه T از S_f را یک زیر مجموعه اجباری از S_f گوییم هرگاه S_f بسط یکتایی از T به یک $\gamma_s(G)$- تابع باشد.

عدد احاطه گر علامت دار اجباری از S_f، $f(S_f,\gamma_s)$ ، با استفاده از مجموعه

$$f(S_f,\gamma_s)=\min\{|T| \mid \text{است } S_f \text{ یک زیر مجموعه اجباری از } T\}$$

تعریف می شود.

عدد احاطه گر علامت دار اجباری از G ، $f(G,\gamma_s)$ را بصورت

$$f(G,\gamma_s)=\min\{f(S_f,\gamma_s) \mid \text{- تابع است } \gamma_s \text{ یک } S_f\}$$

تعریف می کنیم.

برای هر گراف G همواره داریم:

$$f(G,\gamma_s)\geq 0$$

در ادامه بعضی نتایج مهم روی پارامتر $\gamma_s(G)$ را که قبلا اثبات شده اند ، بیان می کنیم.

قضیه۲-۱-۱: [4]

اگر f یک تابع احاطه گر علامت دار روی G باشد انگاه هر راس معلق و هر رأس مجاور با راس معلق از G دارای ارزش اختصاص داده شده ۱+ ، توسط تابع f است.

قضیه ۲-۱-۲ : [10]

برای هر $n\geq 2$

$$\gamma_s(P_n)=n-2\left[\frac{n-2}{3}\right]$$

قضیه ۲-۱-۳ : [10] برای هر $n \geq 3$

$$\gamma_S(C_n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

قضیه ۲-۱-۴: [7] برای هر $n \geq 2$ و $k \geq 1$

$$\gamma_s(P_2 \times P_n) = \begin{cases} n & n = 2k \\ n+1 & n = 2k+1 \end{cases}$$

قضیه ۲-۱-۵: [7] برای هر $n \geq 3$ و $k \geq 1$

$$\gamma_s(P_2 \times C_n) = \begin{cases} n & n \equiv 0 \pmod 4 \\ n+2 & n \equiv 2 \pmod 4 \\ n+1 & n = 2k+1 \end{cases}$$

قضیه ۲-۱-۶ : برای هر گراف G داریم:

$$\gamma_s(G) \geq 2\left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8|V(V)|}}{2} \right\rceil - |V(G)|$$

قضیه ۲-۱-۷ : برای هر گراف G داریم:

$$\gamma_s(G) \geq \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+40(|E(G)|+2|V(G)|)}}{10} \right\rceil - |V(G)|$$

اثبات: فرض کنید f یک $\gamma_s(G)$- تابع باشد. تعریف می کنیم:

$$A=\{v\in V(G)|\ f(v)=1\}$$

$$B=V(G)-A$$

براحتی می توانیم فرض کنیم که $|V(G)|=n$ ، $|E(G)|=m$ ، $|A|=t$ و $|E(G[A])|=s$ ، به طوری که $G[A]$ زیر گروه القا شده از G توسط A است. پس داریم:

$$|B|=n-t$$

$$|E(G[A])|=m-s-|E(A,B)|$$

$$\gamma_s(G)=|A|-|B|=2n-t$$

به طوری که $E(A,B)$ برابر است با مجموعه یالهایی که یک راس انها در A و راس دیگر انها در B باشد. برای هر $v\in V(G)$ ، $d_B(v)$ و $d_A(v)$ به ترتیب برابر با درجه v در B و درجه v در A می باشد. داریم :

$$\sum_{u\in A}|N(u)\cap B|=|E(A,B)|=\sum_{v\in B}|N(v)\cap A|$$

$$2S=2|E(G[A])|=\sum_{u\in A}|N(u)\cap A|=\sum_{u\in A}d_A(u)$$

و

$$\sum_{v\in B}d_B(v)=2|E(G[B])|=2(m-s-|E(A,B)|)$$

بنابر این f یک $\gamma_s(G)$- تابع است و برای هر $u\in A$

و برای هر $v \in B$

$$|N(v)\cap A| \geq |N(v)\cap B| + 2$$

زیرا بنابر خواص تابع احاطه گر علامت دار ، $f[v] \geq 1$ ، پس همیشه تعداد راسهای مجاور v با علامت +۱ ، دو واحد بیشتر از راسهای مجاور v با علامت ۱- است.

حال می بینیم که

$$\sum_{u\in A} d_A(u) = 2S = \sum_{u\in A} |N(u)\cap A| \geq \sum_{u\in A} |N(u)\cap B| =$$
$$\sum_{v\in B} |N(v)\cap A| \geq \sum_{v\in B} (d_B(v)+2) = \left(\sum_{v\in B} d_B(v)\right) + 2|B|$$

و از انجا

$$|E(A,B)| \geq 2(n-t)$$

اینک با استفاده از این نا مساوی می توانیم استنباط می کنیم که

$$|E(A,B)| \geq \frac{m-s}{2} + (n-t)$$

$$s \geq \frac{m+2(n-t)}{5}$$

$$t \geq \frac{1+\sqrt{1+8s}}{2}$$

و این نتیجه میدهد که:

$$t \geq \frac{1+\sqrt{1+40(m+2n)}}{10}$$

و از انجا که $\gamma_s(G)=2t-n$، داریم:

$$\gamma_s(G) \geq 2\left\lceil \frac{1+\sqrt{1+40(m+2n)}}{10} \right\rceil - n$$

حال می خواهیم ثابت کنیم که برای هر عدد صحیح مثبت n گراف G وجود دارد به طوری که $|V(G)|=n$ و $\gamma_s(G)$ برابر با کران مورد نظر است.

به طور اشکارا برای $n=1,2$ ، $\gamma_s(K_1)=1$ و $\gamma_s(K_2)=2$. پس $\gamma_s(K_n)$ برابر با کران است.

پس قرار دهید $n \geq 3$. گراف H_n را طوری می سازیم که $|V(H_n)|=n$ و

$E(H_n)=\binom{t}{2}+2(n-t)$ و $\gamma_s(H_n)$ کران پایین در قضیه قبل است. جایی که

$$t \geq \left[\frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} \right]$$

بدست می اوریم که :

$$\left\lceil \frac{1+\sqrt{1+40(|E(G)+2|V(G)||)}}{10} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8|V(G)|}}{2} \right\rceil$$

برای هر گراف G با

$$|E(G)| \geq \frac{1}{2}\left(6|V(G)-3\sqrt{1+8|V(G)|}+3|\right)$$

از انجا که

$$|E(H_n)| \geq \frac{1}{2}\left(6|V(H_n)| - 3\sqrt{1+8|V(H_n)|} + 3\right)$$

داریم:

$$\gamma_s(H_n) \geq 2\left\lceil \frac{1+\sqrt{1+40\left(|E(H_n)|+2|V(H_n)|\right)}}{10} \right\rceil - |V(H_n)|$$

و این اثبات را کامل می کند.

قضیه ۲-۱-۸ :

برای هر گراف G داریم:

$$\gamma_s(G) \geq \left\lceil |V(G)| - \frac{2}{3}|E(G)| \right\rceil_{\rho(|V(G)|)}$$

و این کران اکید است به طوری که $\rho(S)$ برابر با زوجیت S است. یعنی اگر S فرد باشد، $\rho(S) = 0$ و اگر S زوج باشد $\rho(S) = S$.

اثبات: از نماد گذاری قضیه قبل استفاده می کنیم. با توجه به اثبات قضیه قبل براحتی نتیجه می گیریم که مجموع درجات راسها در A کمتر از $|E(A,B)|$ است ، به عبارت دیگر داریم:

$$2|E(G[A])| \geq |E(A,B)|$$

و از انجایی که

$$|E(A,B)| \geq 2\left(|V(G) - t|\right)$$

داریم:

$$|E(G)| \geq |E(G[A])| + |E(A,B)| \geq 3\left(|V(G)| - t\right)$$

از این نامساوی استنباط می کنیم که

$$t \geq |V(G)| - \frac{1}{3}|E(G)|$$

از این رو داریم:

$$\gamma_s(G) = 2t - |V(G)| \geq |V(G)| - \frac{2}{3}|E(G)|$$

برای اثبات اینکه کران پایین اکید است دور C_n از طول n را بررسی می نماییم.

با استفاده از اولین عبارت داریم

$$\gamma_s(C_n) \geq \left[n - \frac{2n}{3} \right]_{\rho(n)} = \left[\frac{n}{3} \right]_{\rho(n)}$$

قرار دهید $V(C_2) = \{v_1, \ldots, v_n\}$، تعریف می کنیم $f : V \to \{-1,+1\}$ با ضابطه $f(v_i) = -1$ اگر i مضرب ۳ باشد و در غیر اینصورت $f(v) = 1$ ، پس f یک تابع احاطه گر علامت دار است و $w(f) = n - 2\left[\frac{n}{3}\right]$. از این رو $\gamma_s(C_n) \leq n - 2\left[\frac{n}{3}\right]$.

از آنجاییکه $n - 2\left[\frac{n}{3}\right] = \left[\frac{n}{3}\right]_{\rho(n)}$ می توان دید که عبارت دوم درست است و اثبات کامل می شود.

در ادامه نتایج مفید زیر بدست می اینده.

نتیجه ۲-۱-۹ : فرض کنید G یک گراف با $\Delta \leq 3$ و g هم یک تابع احاطه گر علامت دار از G باشد ، به ازای $u, v \in V(G)$ ، اگر $g(u) = g(v) = -1$ آنگاه $d(u,v) \geq 3$.

نتیجه ۲-۱-۱۰ : برای یک گراف G، $f(G, \gamma_s) = 0$ اگر و فقط اگر G تنها یک تابع γ_s داشته باشد. علاوه بر این، $f(G, \gamma_s) = 1$ اگر و فقط اگر G یک تابع γ_s واحد نداشته باشد، یعنی زوج $(v, \mp 1)$ دقیقاً به یک تابع $\gamma_s(G)$ تعلق داشته باشد.

نتایج زیر مستقیماً از **نتیجه ۲-۱-۱۰** حاصل می شود.

نتیجه ۲-۱-۱۱ : برای گراف G، $f(G,\gamma_s)\ge 1$ اگر و فقط اگر هر زوج $(v,\mp 1)$ از هر تابع $\gamma_s(G)$ به حداقل دو تابع $\gamma_s(G)$ متعلق باشد.

قضیه ۲-۱-۱۲ : برای هر گراف G از مرتبه n اگر $\gamma_s(G)=n$ انگاه $f(G,\gamma_s)=0$.

اثبات: فرض کنید $\gamma_s(G)=n$، نشان می دهیم هر رأس از G یا یک رأس انتهایی یا مجاور با یک رأس انتهایی است.

فرض کنیم v یک رأس باشد که نه یک رأس انتهایی باشد و نه مجاور با یک رأس انتهایی. پس می توان به آن ارزش ۱- داد و به بقیه رأسها ارزش ۱ می دهیم. بنابراین می توان تابع احاطه گر علامت دار روی G معرفی نماییم که دارای وزن $n-2$ است که این با فرض تناقض دارد.

نتیجه ۲-۱-۱۳ : برای $n\ge 1$ داریم $f(K_{1,n},\gamma_s)=0$.

اثبات: با استفاده از قضیه ۲-۱-۱۲ داریم $\gamma_s(K_{1,n})=n+1$. پس طبق قضیه ۲-۱-۱۲، اثبات کامل می شود.

قضیه ۲-۱-۱۴ : برای هر زوج a,b از اعداد صحیح با $a>0$ یک گراف همبند ساده G وجود دارد بطوریکه $f(G,\gamma_s)=a$ و $\gamma_s(G)=b$

اثبات: فرض کنید گراف G از گراف کامل $K_{8|b|+8}$ با مجموعه رأس $\{v_1,v_2,\dots,v_{8|b|+8}\}$، با اضافه کردن $24|b|+24$ رأس جدید $z_1,z_2,\dots,z_{8|b|+8}$ و $w_1,w_2,\dots,w_{8|b|+8}$ و $u_1,u_2,\dots,u_{8|b|+8}$ و یالهای

$v_4z_i\ ,\ v_3z_i\ ,\ v_2w_i\ ,\ v_1w_i$ و u_iv_i برای هر $1 \le i \le 8|b|+8$ بوجود امده باشد.

در اینصورت سه مورد زیر را در نظر می گیریم :

مورد۱: اگر $b=0$.

بدیهی است که $f(G,\gamma_s)=\gamma_s(G)=0$. زیرا درجه u_i ها ۱ است، پس $f(u_i)=1$ و برای رأسهای مجاور با آنها یعنی v_i نیز $f(v_i)=1$. از آنجایی که $f(w_i)=f(z_i)=-1$ پس f منحصر بفرد است.

حال فرض کنید $a>0$، فرض کنید G_1 از G با اضافه کردن $2a$ رأس جدید به نام های $m_i\ ,\ n_i\ (1 \le i \le a)$ و یالهای جدید $v_{8|b|+8}\,n_i$ و $v_{8|b|+8}\,m_i$ و $m_i\,n_i$ برای $i=1,\ldots,a$ بدست آید.

براحتی می بینیم که $\gamma_s(G_1)=0$ و $f(G_1,\gamma_s)=a$. زیرا اگر $f(m_i)=-1,\ f(n_i)=1$ و یا برعکس باز هم مجموع صفر می شود و از آنجاییکه با داشتن a رأس مثل m_i ها با n_i ها می توان به بقیه رأسها علامت داد، پس $f(G,\gamma_s)=a$.

مورد ۲ : $b>0$.

ابتدا فرض کنید $a=0$. اگر G_2 بدست آمده از G با اضافه کردن b یال معلق در $v_{8|b|+8}$ به نامهای $v_{8|b|+8}\,y_1,\ldots v_{8|b|+8}\,y_b$ باشد به راحتی مشاهده می شود که $\gamma_s(G_2)=b$ و $f(G_2,\gamma_s)=0$. حال فرض کنید $a>0$. فرض کنید G_3 بدست آمده از G_2 با اضافه کردن $2a$ رأس جدید $m_i\,,n_i\ (1 \le i \le a)$ و یالهای جدید $m_i\,n_i\ ,\ v_{8|b|+8}\,m_i\,,\ v_{8|b|+8}\,n_i$ برای $i=1,2,\ldots n$ باشد می توان دید که $\gamma_s(G_3)=b$ و $f(G_3,\gamma_s)=a$.

مورد ۳ : $b<0$.

اگر $a=0$ باشد، فرض کنید G_4 بدست آمده از G با اضافه کردن $|b|$ رأس جدید به نامهای $y_1,y_2,\ldots,y_{|b|}$ باشد و آنها را به هر یک از $v_6\,,v_6$ متصل کنید، واضح است که $f(G_4,\gamma_s)=0$ و $\gamma_s(G_4)=b$. حال اگر $a>0$ باشد، سپس G_5 بدست آمده از G_4 با اضافه کردن $2a$ رأس جدید

m_i, n_i $(1 \le i \le a)$ و یالهای جدید $m_i\, n_i\,,\, v_{8|b|+8}\, m_i\,,\, v_{8|b|+8}\, n_i$ برای $i = 1,2,\ldots n$ باشد، براحتی می توان دید که $\gamma_s(G_5) = b$ و $f(G_5, \gamma_s) = a$. این اثبات را کامل می کند.

۲-۲ . عدد احاطه گر علامت دار اجباری از مسیرها و دورها

در این بخش عدد احاطه گر علامت دار اجباری از مسیرها و دورها را تعیین می نماییم.

قضیه ۲-۲-۱: برای هر عدد صحیح و مثبت $n \ge 5$ داریم

$$f(P_n, \gamma_s) = \begin{cases} 0 & n \overset{3}{\equiv} 2 \text{ اگر} \\ 1 & n \overset{3}{\equiv} 0,1 \text{ اگر} \end{cases}$$

اثبات: فرض کنید $P_n = v_1 v_2 \ldots v_n$ یک مسیر به طول n و g یک γ_s- تابع از گراف P_n باشد. با استفاده از قضیه ۲-۱-۱ ، $1 = g(v_1) = g(v_2) = g(v_{n-1}) = g(v_n)$ و اگر $|i - j| \ge 3$ باشد، انگاه

$g(v_i) = g(v_j) = -1$

بنابراین تعداد راسهایی از P_n که می توان به انها عدد ۱- را نسبت داد برابر است با $\left[\frac{n-2}{3}\right]$. به عبارت دیگر با استفاده از قضیه ۲-۱-۲ ، g دقیقا به $\left[\frac{n-2}{3}\right]$ تا از راسهای P_n عدد ۱- را نسبت می دهد.

اگر برای هر $k \in N$ ، $n = 3k + 2$ ، به ازای هر $i = 1,2,\ldots,k$ ، $g(v_{3i}) = -1$ و g به راسهای دیگر عدد ۱- را نسبت می دهد. بنابر این $f(P_{3k+2}, \gamma_s) = 0$.

حال فرض کنید $n \not\equiv 2 \pmod 3$. تعریف می کنیم :

$$g,h : V(P_n) \rightarrow \{+1,-1\}$$

بطوری که

$$g(v_i)=\begin{cases} -1 & i=3,6,\ldots,3\left(\left[\frac{n}{3}\right]-1\right) \\ +1 & i\neq 3,6,\ldots,3\left(\left[\frac{n}{3}\right]-1\right) \end{cases}$$

$$h(v_i)=\begin{cases} -1 & i=4,7,\ldots,3\left(\left[\frac{n}{3}\right]-1\right)+1 \\ +1 & i\neq 4,7,\ldots,3\left(\left[\frac{n}{3}\right]-1\right)+1 \end{cases}$$

به راحتی می بینیم که g,h ، γ_s- تابع هستند، زیرا فاصله هر دو ۱- حداقل ۳ یال است ودر این دو تابع بیشترین ۱- های ممکن قرار می گیرد. پس با استفاده ازنتیجه۲-۱-۱۰، داریم $f(P_n,\gamma_s)\geq 1$.

حال دو مورد زیر را در نظر بگیرید:

۱- $n\equiv 0 \pmod 3$.

فرض کنید $T=\{(v_{n-2},1)\}$. ادعا می کنیم که T یک زیر مجموعه اجباری برای g است . فرض کنید f یک γ_s- تابع باشد، به طوری که $f(v_{n-2})=1$ و این سبب می شود که برای $1\leq i\leq \frac{n}{3}-1$ داشته باشیم $f(v_{3i})=-1$ و f به بقیه رئوس عدد ۱ را نسبت می دهد. بنابر این $f=g$ و $f(S_g,\gamma_s)\leq 1$.

پس $f(P_n,\gamma_s)\leq 1$.

۲- $n\equiv 1 \pmod 3$.

نشان می دهیم که $T=\{(v_{n-4},-1)\}$ یک زیر مجموعه اجباری برای g است. فرض کنید f یک γ_s- تابع باشدبه طوری که $f(v_{n-4})=-1$. در نتیجه با استفاده از قضیه ۲-۱-۱و نتیجه۲-۱-۹ داریم: