دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف جبر فوریه

نگارش:

شهلا جوادی

استاد راهنما: **دکتر حبیب امیری**

استاد مشاور: **دکتر سعید مقصودی**

مهر ۱۳۸۹

چکیده

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و E یک $\mathcal{A}-$ مدول باناخ دو طرفه باشد. نگاشت خطی $D:\mathcal{A}\to\mathcal{E}$ را یک مشتق می نامیم هرگاه $D(ab)=D(a)b+aD(b)$. مشتق D را داخلی نامیم هرگاه وجود داشته باشد $x\in E$ که $D(a)=ax-xa$ برای هر $a\in\mathcal{A}$. جبرباناخ $\mathcal{A}$ را میانگین پذیر گوئیم هرگاه هر مشتق $D:\mathcal{A}\to\mathcal{E}^*$ داخلی باشد که در آن E^* دوگان $\mathcal{A}-$مدول باناخ دوطرفهٔ E می باشد. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را میانگین پذیر ضعیف گوئیم هرگاه هر مشتق $D:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^*$ داخلی باشد. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. نشان می‌دهیم که جبر فوریهٔ آن یعنی $A(G)$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر G یک زیر گروه آبلی با شاخص متناهی داشته باشد و جبر فوریه— اشتلیس آن یعنی $B(G)$ میانگین پذیر است اگر و تنها اگر G یک زیر گروه آبلی فشرده با شاخص متناهی داشته باشد. سپس نشان می‌دهیم که $A(G)$ میانگین پذیر ضعیف است اگر مولفهٔ عضو همانی G آبلی باشد. مفهوم میانگین پذیری ضعیف موروثی را بیان کرده و نشان می‌دهیم در مورد $SIN-$گروه‌ها حکم اخیر در حالت میانگین پذیری ضعیف موروثی دو طرفه است.

کلمات کلیدی : جبر فوریه، جبر فوریه— اشتلیس، جبر فون نویمان، میانگین پذیری، میانگین پذیری ضعیف، میانگین پذیری ضعیف موروثی، زیر گروه با شاخص متناهی، همانی تقریبی کراندار

فهرست مندرجات

پیش گفتار

این پایان نامه متشکل از ۴ فصل می باشد که در فصل اول به معرفی برخی مفاهیم و بیان قضایا اثبات برخی از آنها که در بخش‌های بعدی به آنها رجوع خواهیم کرد می‌پردازیم.

در فصل دوم به معرفی دستهٔ مهمی از نگاشتها به نام نگاشت‌های آفین قطعه وار پرداخته و چند قضیه و لم مهم را که در اثبات قضایای اصلی از آنها استفاده خواهیم کرد بیان می‌کنیم.

در فصل سوم وارد بخش اصلی کار شده و دو قضیهٔ مهم در ارتباط با میانگین پذیری جبر فوریه و جبر فوریه— اشتلیس را به طریق غیر مستقیم ثابت می‌کنیم.

در فصل چهارم نیز به بیان و اثبات قضایا و نتایجی در ارتباط با میانگین پذیری ضعیف و میانگین پذیری ضعیف موروثی می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مورد نیاز

در این بخش تعاریف و قضایایی که در بخش‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند را ارائه خواهیم کرد. اکثر قضایا را بدون اثبات بیان می‌کنیم و تنها در برخی موارد به اثبات می‌پردازیم.

۱.۱ گروههای موضعاً فشرده و جبرها

تعریف ۱.۱ فرض کنید G یک گروه باشد. همچنین فرض کنید G یک فضای توپولوژیک هاسدورف نیز باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

i) نگاشت ضرب $(x, y) \mapsto xy$ از $G \times G$ به G پیوسته باشد.

ii) نگاشت وارون $x \mapsto x^{-1}$ از G به G پیوسته باشد.

در اینصورت G را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم.

گروه توپولوژیک G را گسسته خوانیم هرگاه توپولوژی آن توپولوژی گسسته باشد یعنی هر زیر مجموعهٔ آن باز باشد.

تعریف ۲.۱ گروه توپولوژیک G را موضعاً فشرده گوئیم هرگاه هرنقطهٔ آن دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد.

لم ۳.۱ [اوریزون] فرض کنید X فضای موضعاً فشرده و $K \subseteq X$ فشرده و $A \subseteq X$ بسته باشد بطوریکه $A \bigcap K = \varnothing$. آنگاه تابع پیوسته با محمل فشرده از X به $[۰, ۱]$ وجود دارد بطوریکه روی A، $f \equiv ۰$ و روی K، $f \equiv ۱$.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. در این صورت بزرگترین زیر مجموعهٔ همبندی که عضو همانی گروه G را در بر داشته باشد مؤلفهٔ عضو همانی گروه G نامیده و با G_e نمایش می‌دهیم. G_e زیر گروه نرمال و بستهٔ G است.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم G یک گروه و H زیر گروهی از آن باشد. گوئیم شاخص H در G برابر n است و می‌نویسیم $[G : H] = n$، هر گاه G برابر اجتماع n هم مجموعهٔ مجزای H باشد. یعنی

$$G = \bigcup_{i=۱}^{n} x_i H$$

اگر تعداد این هم مجموعه‌ها نا متناهی باشد می‌نویسیم $[G : H] = \infty$.

لم ۶.۱ فرض کنیم $H \leq G$، H آبلی و شاخص H در G متناهی و برابر n باشد. در این صورت $\overline{H}$ نیز زیر گروهی آبلی و با شاخص کوچکتر یا مساوی n در G است.

برهان . فرض کنیم $x, y \in \overline{H}$. در نتیجه

$$\exists (x_n), (y_n) \in H \quad ; \quad x_n \to x \quad , \quad y_n \to y$$

چون H آبلی است داریم $x_n y_n = y_n x_n$ و از آنجا که ضرب نگاشتی پیوسته است به دست می‌آوریم $xy = yx$. یعنی $\bar{H}$ آبلی است. فرض کنیم

$$G = H \bigcup x_۱ H \bigcup ... \bigcup x_{n-۱} H$$

داریم

$$\begin{aligned} G &= \overline{G} \\ &= \overline{H \bigcup x_۱ H \bigcup ... \bigcup x_{n-۱} H} \\ &= \overline{H} \bigcup \overline{x_۱ H} \bigcup ... \bigcup \overline{x_{n-۱} H} \end{aligned}$$

به سادگی دیده می‌شود که $\overline{xH} = x\overline{H}$. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$G = \overline{H} \bigcup x_۱ \overline{H} \bigcup ... \bigcup x_{n-۱} \overline{H}$$

حال اگر هیچ یک از مجموعه‌های اجتماع بالا اشتراکی با یکدیگر نداشته باشند شاخص $\overline{H}$ در G برابر n و در غیر اینصورت کمتر از n است. □

لم ۷.۱ فرض کنیم G یک گروه و H زیر گروه بسته‌ای(بازی) از آن با شاخص متناهی باشد. در این صورت H باز(بسته) نیز هست.

برهان . زیرا اگر داشته باشیم:

$$G = H \bigcup x_1 H \bigcup ... \bigcup x_n H$$

آنگاه متمم H برابر است با $x_1 H \bigcup ... \bigcup x_n H$. حال چون تک تک $x_i H$ ها بسته(باز) هستند پس متمم H نیز بسته(باز) است و لذا H باز(بسته) است. □

تعریف ۸.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

i) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط − مقدار روی X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $C(X)$ همراه با عمل های جمع معمولی توابع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است. به علاوه برای $f \in C(X)$ محمل f به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

ii) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط − مقدار کراندار روی X را با $C_b(X)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $C_b(X)$ یک زیر فضای $C(X)$ است و همراه با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است. یادآوری می‌کنیم که

$$\| f \|_\infty = \sup\{| f(x) | : x \in X\} \quad ; \quad f \in C_b(X).$$

iii) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط − مقدار f روی X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم. در بی‌نهایت صفر شدن بدین معنی است که برای هر $\epsilon > 0$ زیر مجموعهٔ فشردهٔ K_ϵ از X موجود است که برای هر $x \in X \setminus K_\epsilon$ داریم $| f(x) | < \epsilon$. همچنین $C_0(X)$ همراه با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

iv) مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ مختلط − مقدار f روی X با محمل فشرده را با $C_{00}(X)$ یا

$C_c(X)$ نشان می‌دهیم، که همراه با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۹.۱ فرض کنیم X یک مجموعه باشد.

خانوادهٔ $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه های X را یک $\sigma-$جبر گوییم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

i) $X \in \mathcal{A}$.

ii) اگر $E \in \mathcal{A}$، آنگاه $E^c \in \mathcal{A}$. که در آن E^c متمم E نسبت به X است.

iii) اگر $E_۱, E_۲, ... \in \mathcal{A}$، آنگاه $\bigcup\limits_{n=۱}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

تعریف ۱۰.۱ i) فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک $\sigma-$جبر از زیرمجموعه‌های X باشد تابع $\mu : \mathcal{A} \to [۰, +\infty]$ را یک اندازه روی $\mathcal{A}$ می‌نامیم هرگاه

a) $\mu(\varnothing) = ۰$

b) μ شمارا جمعی روی $\mathcal{A}$ باشد یعنی برای دنبالهٔ E_i از عناصر دو به دو مجزای $\mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu(E_i).$$

ii) اگر $B(X)$ کوچکترین $\sigma -$ جبر شامل تمام زیر مجموعه‌های باز X باشد، آنگاه $B(X)$ را $\sigma -$ جبر مجموعه‌های بورل X و اعضای $B(X)$ را مجموعه‌های بورل گوییم.

iii) اندازهٔ μ روی X را بورل می نامیم، اگر μ روی $B(X)$ تعریف شده باشد.

iv) گوئیم اندازهٔ μ روی $A \in \mathcal{A}$ منظم درونی است هرگاه

$$\mu(A) = sup\{\mu(K); K \subseteq A, \text{فشرده } K\}$$

اگر μ برای هر عضو $A \in \mathcal{A}$ منظم درونی باشد گوئیم μ روی $\mathcal{A}$ منظم درونی است.

v) گوئیم اندازهٔ μ روی $A \in \mathcal{A}$ منظم بیرونی است هرگاه

$$\mu(A)=inf\{\mu(U); A\subseteq U, \text{باز } U\}$$

اگر μ برای هر عضو $A\in\mathcal{A}$ منظم‌بیرونی باشد گوئیم μ روی $\mathcal{A}$ منظم بیرونی است.

تعریف ۱۱.۱ اندازهٔ بورل μ را رادون می‌نامیم اگر روی مجموعه‌های فشرده متناهی و روی مجموعه‌های بورل منظم بیرونی و روی مجموعه‌های باز منظم درونی باشد.

تعریف ۱۲.۱ $M^{1}(G)$ عبارت است از جبر پیچشی اندازه‌های رادون کراندار روی G.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنیم G گروه موضعاً فشرده و $\mu,\nu\in M^{1}(G)$ ، پیچش ν و μ را با $\mu*\nu$ نمایش می‌دهیم و با فرض این که $E\in B(G)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\mu*\nu)(E)=(\mu\times\nu)(m^{-1}(E))=(\mu\times\nu)(\{(x,y)|xy\in E\})$$

که در آن m عمل ضرب گروه است.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید G گروه توپولوژیک باشد. اندازهٔ رادون غیر صفر λ روی G را یک اندازهٔ هار چپ گوئیم هرگاه

$$\lambda(xB)=\lambda(B)\quad\forall x\in G\quad\forall B\in B(G)$$

(منظور از $B(G)$ مجموعه‌های بورل G است.)

اندازهٔ هار با تقریب یک عدد ثابت مثبت منحصر به فرد است. اگر G فشرده باشد می‌توان λ را طوری انتخاب کرد که $\lambda(G)=1$. در این حالت می‌گوئیم اندازهٔ هار نرمال شده روی G است.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم G گروه موضعاً فشرده و λ اندازهٔ هار چپ روی G باشد. فضای لبگ توابع روی G از مرتبهٔ $0<p<+\infty$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L^p(G,\lambda)=\{f:G\to\mathbb{C}\bigcup\{\pm\infty\}\mid \int_G|f|^pd\lambda<+\infty,\ \text{اندازه پذیر است}\ \lambda, f\}$$

به جای $L^p(G,\lambda)$ می‌نویسیم $L^p(G)$. با تعریف اعمال ضرب و جمع نقطه‌ای مجموعه‌های $L^p(G)$ به فضای برداری تبدیل می‌شوند. چنانچه $p<+\infty$ تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p=(\int_G|f|^pd\lambda)^{1/p}$$

و برای $p=+\infty$ تعریف می‌کنیم:

$$\| f \|_\infty=\inf\{M\in\mathbb{R}\mid \lambda(\{t\mid \mid f(t)\mid>M\})=0\}$$

و

$$L^\infty(G)=\{f:G\to\mathbb{C}\bigcup\{\pm\infty\}:\|f\|_\infty<\infty\}$$

تعریف ۱۶.۱ گوئیم فضای برداری $\mathcal{A}$ یک جبر روی اعداد مختلط است هرگاه نگاشت $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ که ضرب روی $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود و با $(a,b)\mapsto ab$ نمایش داده می‌شود یک نگاشت دوخطی باشد. به عبارت دیگر

$$a(b+c)=ab+ac \qquad , \qquad (a+b)c=ac+bc$$

و همچنین

$$\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)\quad,\quad a(bc)=(ab)c$$

برای هر $a,b,c\in\mathcal{A}$ و $\lambda\in\mathbb{C}$.

تعریف ۱۷.۱ جبر $\mathcal{A}$ را یک جبر نرمدار گوئیم هرگاه روی $\mathcal{A}$ نرم $\|.\|$ موجود باشد به طوری که عمل ضرب با $\|.\|$ به صورت زیر مربوط شود:

$$\|ab\|\leqslant\|a\|\|b\| \qquad \forall a,b\in\mathcal{A}$$

تعریف ۱۸.۱ جبر نرمدار $\mathcal{A}$ را جبر باناخ [۱] گوئیم هرگاه $\mathcal{A}$ با نرم مربوطه کامل باشد.

تعریف ۱۹.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر روی $\mathbb{C}$ باشد. منظور از یک برگشت [۲] روی $\mathcal{A}$ عبارت است از یک نگاشت از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ که با $a \mapsto a^*$ نمایش داده می‌شود به طوری که برای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم

$$(a+b)^* = a^* + b^* \qquad (ab)^* = b^* a^*$$

$$(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \qquad (a^*)^* = a$$

تعریف ۲۰.۱ یک $*-$ جبر باناخ یک جبر باناخ مجهز به یک برگشت است بطوریکه

$$\|a^*\| = \|a\| \qquad (a \in \mathcal{A})$$

تعریف ۲۱.۱ یک $*-$ جبر باناخ را یک c^*- جبر گوئیم هرگاه

$$\|a^* a\| = \|a\|^۲$$

تعریف ۲۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ باشند. یک همریختی جبری از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ نگاشت خطی و کراندار $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ است به طوری که

$$\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y) \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}$$

اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ $*-$جبر باشند، یک $*-$همریختی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ عبارت است از همریختی جبری Φ بطوری که

$$\Phi(x^*) = \Phi(x)^* \qquad \forall x \in \mathcal{A}$$

[۱] Banach algebra
[۲] involution

۲.۱ نمایش روی گروههای موضعاً فشرده

تعریف ۲۳.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای خطی مختلط باشد. همچنین فرض کنید که تابع مختلط مقداری روی $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ موجود باشد که مقدار آن در نقطهٔ (x, y) با نماد $< x, y >$ نمایش داده می‌شود و شرایط زیر را داراست:

i) $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$ برای هر $x, y, z \in \mathcal{H}$.

ii) $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$ برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$.

iii) $< x, y > = \overline{< y, x >}$ برای هر $x, y \in \mathcal{H}$.

iv) $< x, x > > 0$ وقتی $x \neq 0$.

در این صورت تابع $(x, y) \to < x, y >$ یک ضرب داخلی و $\mathcal{H}$ یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۲۴.۱ یک فضای ضرب داخلی که تحت نرم $\|x\| = < x, x >^{\frac{1}{2}}$ فضای باناخ نیز هست را یک فضای هیلبرت [۳] می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۱ فرض کنیم T یک نگاشت از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به روی خودش باشد که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$. در این صورت T یک عملگر خطی روی $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود.

[۳] Hilbert Space

تعریف ۲۶.۱ فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، برای عملگر خطی $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ دوگان آن یعنی T^* عملگری یکتاست که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^*:\mathcal{H}\to\mathcal{H} \qquad , \qquad <T^*\omega, x> = <\omega, Tx>$$

که در آن $x,\omega\in\mathcal{H}$.

تعریف ۲۷.۱ فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ یک عملگر خطی و T^* دوگان آن باشد. T را یکانی گوییم اگر داشته باشیم

$$TT^* = T^*T = ۱$$

یعنی $T^* = T^{-۱}$. فضای همهٔ عملگرهای یکانی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ با عمل ضرب عملگرها که همان ترکیب است تشکیل یک گروه می‌دهد.

تعریف ۲۸.۱ فرض کنیم G گروه موضعاً فشرده باشد. یک نمایش یکانی از G هومومورفیسم گروهی

$$\pi: G\to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$$

است که نگاشت $x\mapsto \pi(x)u$ از G به $\mathcal{H}_\pi$ برای هر $u\in\mathcal{H}_\pi$ پیوسته است. چون π همریختی گروهی است لذا در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\pi(xy)=\pi(x)\pi(y) \qquad , \qquad \pi(x^{-۱})=\pi(x)^{-۱}=\pi(x)^*$$

$\mathcal{H}_\pi$ فضای نمایش π و بعد آن که با d_π نمایش داده می‌شود بعد یا درجهٔ π نامیده می‌شود.

تعریف ۲۹.۱ یک نمایش روی G یک $*-$ نمایش روی $L^۱(G)$ تولید می‌کند که یک $*-$ همریختی جبری است باز هم با نماد π از $L^۱(G)$ به $B(\mathcal{H}_\pi)-$ عملگرهای خطی کراندار

روی $\mathcal{H}_\pi$— این بار مجهز به توپولوژی نرمی. به طور دقیق برای $f \in L^1(G)$، $\pi(f)$ عملگری است که برای $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$ داریم

$$\langle \pi(f)\xi \mid \eta\rangle = \int \langle \pi(x)\xi, \eta\rangle f(x)dx$$

و نگاشت $f \mapsto \pi(f)$ از $L^1(G)$ به $B(\mathcal{H}_\pi)$ پیوسته است.

تعریف ۳۰.۱ اگر π_1 و π_2 دو نمایش یکانی از G باشند، عملگر در هم پیچشی برای π_1 و π_2 نگاشت خطی کراندار $T : \mathcal{H}_{\pi_1} \to \mathcal{H}_{\pi_2}$ است که برای هر $x \in G$، $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$. مجموعهٔ همهٔ عملگرهای اینچنینی با $C(\pi_1, \pi_2)$ نشان داده می‌شود. π_1 و π_2 هم ارز هستند اگر $C(\pi_1, \pi_2)$ شامل عملگر یکانی U باشد.

تعریف ۳۱.۱ فرض کنید M زیر فضای بسته‌ای از $\mathcal{H}_\pi$ باشد. در این صورت گوئیم M تحت π پایا است اگر $\forall x \in G \quad \pi(x)M \subseteq M$.

تعریف ۳۲.۱ نمایش π تحویل نا پذیر نامیده می‌شود اگر هیچ زیر فضای بستهٔ ناصفر و سره از $\mathcal{H}_\pi$ موجود نباشد که پایا تحت π باشد یا معادلاً اگر هیچ زیر فضای بستهٔ ناصفر و سره از $\mathcal{H}_\pi$ موجود نباشد که پایا تحت $\pi(f)$ برای هر $f \in L^1(G)$ باشد. زیرا ثابت می‌شود که زیر فضای بستهٔ M از $\mathcal{H}_\pi$ تحت π پایاست اگر و فقط اگر

$$\forall f \in L^1(G) \ : \ \pi(f)M \subset M$$

.[۶]

تعریف ۳۳.۱ مجموعهٔ همهٔ کلاسهاس هم ارزی نمایشهای یکانی تحویل ناپذیر روی G را با $\hat{G}$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$\hat{G} = \{[\pi]; \pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi) \text{ یک نمایش تحویل ناپذیر است و } \pi\ \}$$

تعریف ۳۴.۱ گروه G را تقریباً جابجایی می‌نامیم هرگاه

$$sup\{d_\pi : \pi \in \hat{G}\} < \infty$$

تعریف ۳۵.۱ نمایش منظم چپ و راست از G نمایش‌های λ و ρ روی فضای هیلبرت $L^۲(G)$ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda : G \to \mathcal{U}(L^۲(G)) \quad ; \quad (\lambda(x)\xi)(y) = \xi(x^{-۱}y)$$

$$\rho : G \to \mathcal{U}(L^۲(G)) \quad ; \quad (\rho(x)\xi)(y) = \xi(yx)\Delta(x)^{\frac{۱}{۲}}$$

که در آن $x, y \in G$ و $\xi \in L^۲(G)$.

۳.۱ $C^*(G)$ و $VN(G)$

تعریف ۳۶.۱ فرض کنیم $\hat{G}$ مجموعهٔ کلاسهای نمایشهای پیوستهٔ تحویل ناپذیر روی G باشد. $C^*(G)$ عبارت است از کامل شدهٔ $L^۱(G)$ تحت نرم $\|.\|_{\hat{G}}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_{\hat{G}} = sup_{\pi \in \hat{G}} \||\pi(f)\||$$

تعریف ۳۷.۱ یک جبر فون نویمان[۴] A روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ عبارت است از یک $*$−زیر جبر بطور قوی بسته از $B(\mathcal{H})$. توجه کنید که تور $(T_\alpha)_\alpha$ در $B(\mathcal{H})$ بطور قوی به T همگراست هرگاه $\forall x \in \mathcal{H} \quad : \quad T_\alpha x \to Tx$.

[۴] Von Neumann

تعریف ۳۸.۱ اگر $S \subseteq B(\mathcal{H})$، آنگاه کوچکترین جبر فون نویمانی که S را در بر دارد جبر فون نویمان تولید شده توسط S می‌نامیم که در واقع اشتراک تمام جبرهای فون نویمانی است که S را در بر دارند.

تعریف ۳۹.۱ جبر فون نویمان تولید شده توسط عملگرهای انتقال چپ $\{\lambda(x) : x \in G\}$ در $B(L^2(G))$ و یا به طور معادل عملگرهای $\lambda(f)$ که $f \in L^1(G)$ را با $VN(G)$ نمایش می‌دهیم. که در آن λ نمایش منظم چپ روی G است. بنابراین عناصر $VN(G)$ عملگرهایی روی $L^2(G)$ هستند. [۵]

۴.۱ جبر فوریه و جبر فوریه—اشتلیس

جبر فوریه و جبر فوریه اشتلیس که آنها را به ترتیب با $A(G)$ و $B(G)$ نمایش می‌دهیم برای اولین بار توسط ایمارد [۵] در [۵] معرفی شدند. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد آن دو می‌توان به این مرجع مراجعه کرد.

تعریف ۴۰.۱ جبر فوریه—اشتلیس $B(G)$ عبارت است از تمام توابع $x \to (\pi(x)\xi, \eta)$ که در آن π یک نمایش یکانی پیوسته روی G بوده و $\xi, \eta \in \mathcal{H}_\pi$. ضرب در $B(G)$ ضرب نقطه به نقطه است. یعنی $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

[5] Eymard

تعریف ۴۱.۱ برای گروه موضعاً فشرده G، جبر فوریهٔ $A(G)$ عبارت است از تمام توابع ω روی G که به صورت $\omega(x) = \langle \lambda(x)\xi, \eta \rangle$ نمایش داده می‌شود، که در آن λ نمایش منظم چپ روی G است و $\xi, \eta \in L^2(G)$.

همانطور که در [۵] نشان داده شده $A(G)$ متشکل از همهٔ توابع به فرم

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n * \tilde{g_n})(x^{-1})$$

است که $f_n, g_n \in L^2(G)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 \|g_n\|_2 < \infty$. در اینجا $\tilde{f}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

نرم روی $A(G)$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\|u\| = inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 \|g_n\|_2 \ : \ u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n * \tilde{g_n})(x^{-1})\}$$

طبق قضیهٔ زیر $A(G)$ را می‌توان با پاد دوگان جبر فون نویمان $VN(G)$ تولید شده توسط عملگرهای $\lambda(x)$، $x \in G$، روی $L^2(G)$ یکی در نظر گرفت.

گزاره ۴۲.۱ فرض کنید $A'(G)$ دوگان جبر باناخ $A(G)$ باشد. برای هر عملگر $T \in VN(G)$ فرم خطی یکتای $\phi_T \in A'(G)$ موجود است بطوریکه برای هر $f, g \in L^2(G)$ داریم

$$\phi_T((f * \tilde{g})\check{}) = \phi_T(\tilde{g} * \check{f}) = (Tf, g)$$

نگاشت $T \to \phi_T$ یک یکریختی طولپا از $VN(G)$ به توی $A'(G)$ تعریف می‌کند.[۵]

گزاره ۴۳.۱ فرض کنید $u \in A(G)$ و $a, b \in G$، آنگاه توابع $\tilde{u}$ و $\bar{u}$ و $\check{u}$ و ${}_a u$ و u_b با تعاریف زیر در $A(G)$ قرار دارند.[۵]

$$\tilde{u}(x) = \overline{u(x^{-1})} \qquad \check{u}(x) = u(x^{-1})$$

$$_a u(x) = u(ax) \qquad u_b(x) = u(xb)$$

گزاره ۴۴.۱ فرض کنید G یک گروه موضعاً فشردهٔ آبلی باشد. در این صورت داریم $A(G) \simeq L^1(\hat{G})$.[۵]

گزاره ۴۵.۱ اگر G فشرده باشد داریم $B(G) = A(G)$.[۵]

۵.۱ گروه‌های لی

مجموعه‌ای از عضوهای g را در نظر بگیرید که به طور پیوسته به تعدادی پارامتر حقیقی وابسته‌اند، یعنی $g(a) = g(a_1, ..., a_r)$. اگر این اعضا شرایط یک گروه را داشته باشند و یک مفهوم همسایگی یا پیوستگی روی اعضای گروه اعمال شود اعضا تشکیل یک گروه پیوسته می‌دهند، به این معنی که یک تغییر کوچک روی یکی از عوامل ضرب باعث ایجاد یک تغییر کوچک در حاصلضرب آنها می شود. اگر اعضای گروه به r پارامتر وابسته باشند، آن را یک گروه پیوستهٔ $r-$پارامتری می‌نامیم. در حالت کلی شرایطی که یک مجموعهٔ پیوسته از عضوها را تبدیل به یک گروه می‌کند همان شرایطی است که در عضوهای گسسته داریم، یعنی بسته بودن نسبت به ضرب، وجود عضو همانی و وجود معکوس برای هر عضو.

ابتدا فرض کنید حاصلضرب دو عضو $g(a)$ و $g(b)$ برابر $g(c)$ باشد، یعنی

$$g(c) = g(a)g(b)$$