دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش هندسه

عنوان:

اندیس کنلی مجزا در زیرفضای پایدار

نگارش:

راضیه حیدری

استاد راهنما:

دکتر مرتضی میرمحمد رضایی

تابستان ۱۳۸۶

بسمه تعالی

شماره:

تاریخ :

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

۱-مشخصات دانشجو

نام و نام خانوادگی: راضیه حیدری   انشجوی آزاد ☒   بورسیه ☐   معادل ☐

شماره دانشجویی : ۸۳۱۱۳۱۴۰   دانشکده : ریاضی و علوم کامپیوتر   رشته تحصیلی : ریاضی محض- هندسه

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر میرمحمدرضایی

عنوان به فارسی : اندیس کنلی مجزا در زیرفضای پایدار

عنوان به انگلیسی : **On the Discrete Conley Index in the Invariant Subspaces**

نوع پروژه: کاربردی ☐   بینیادی ☐   توسعه ای ☐   نظری ☒

تاریخ شروع : ۱۳۸۵/۱۱/۱   تاریخ خاتمه : **1386/6/26**   تعداد واحد : ۶

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلید به فارسی : اندیس مرس- اندیس کنلی- جفت اندیسهای قابل نمایش- مجموعه پایدارمنزوی- مجموعه های پایدار و ناپایدار از یک مجمو عه.

واژه های کلیدی به انگلیسی : **Morse index, Conley index, representable index pairs, unstable and stable set of set.**

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت های پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما :

دانشجو :

امضاء استاد راهنما :   تاریخ :

نسخه ۱ : معاونت پژوهشی

نسخه ۲ : کتابخانه و به انضام دو جلد پایان نامه به منظور تسویه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا به بررسی روشهای توپولوژیک در سیستمهای دینامیکی می پردازیم تا زمینهٔ بیان موضوعاتی چون اندیس مرس و اندیس کنلی فراهم آید. در ادامه نشان می دهیم که اندیس کنلی تعمیم اندیس مرس است و در جاییکه هر دو تعریف شده باشند، با هم برابرند اما در جاییکه اندیس مرس کارآیی ندارد، اندیس کنلی کارساز است.

در پایان مقاله On the discrete Conley index in the invariant subspace نوشته Andrzej Szymczak , Klaudiuz Wojcik , Pitor Zgliczynski که در مجله Topology and its application چاپ شده است را مورد بررسی قرارداده و با جفت اندیسهای قابل نمایش، که مهمترین ابزار در محاسبه اندیس کنلی است آشنا می شویم و اندیس کنلی زیرمجموعه پایدار $E = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ از $f : \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ را در ۲ حالت زیر بررسی می کنیم:

- اگر قسمت ناپایدار مجموعه پایدار منزوی S در E باشد ...
- اگر قسمت پایدار مجموعه پایدار منزوی S در E باشد ...

On the discrete Conley index in the invariant subspace , Andrzej Szymczak

, Klaudiuz Wojcik , Pitor Zgliczynski, Topology and its application,

Volume ۸۷, *Issue* ۲, ۱۱*September* ۱۹۹۸, *Pages* ۱۰۵ − ۱۱۵

کلمات کلیدی: اندیس مرس، اندیس کنلی، جفت اندیسهای قابل نمایش، مجموعه پایدار منزوی، مجموعه های پایدار و نا پایدار از یک مجموعه.

فهرست مندرجات

مقدمه

پیدایش توپولوژی مدرن به پوانکاره برمی گردد، کسی که سیر مطالعاتش منجر به ظهور معادلات مشتقپذیر شد و به سرعت توسط کسانی چون مرس، لری شاودر و ... گسترش یافت. اما چارلز کامرون کنلی (۱۹۸۴—۱۹۳۳) کسی بود که با استفاده از این روش و با بهره گیری از دستاوردهای پیشگامان این نظریه توانست پایه گذار نظریه ای باشد که امروز تبدیل به یکی از غولهایی شده است که ریاضیات بر دوش آن ایستاده است.
ایده هایی که در این پایان نامه استفاده شده است، درواقع از نظریهٔ اندیس کنلی از یک میدان برداری گرفته شده است. ناحیه مورد بحث، ناحیه ای کراندار و بدون نقطه مرزی تکین است و ما به نقاط این ناحیه یک عدد صحیح نسبت می دهیم. این عدد با توجه به توضیحاتی که می دهیم قابل محاسبه است و آن را درجه می نامیم و به این صورت است که اگر هیچ نقطه تکینی در درون این ناحیه نباشد، درجه صفر است. در واقع درجه یک پایای توپولوژیکی است و فقط به رفتار میدان برداری مذکور روی مرز ناحیه مورد نظر وابسته است. به عنوان مثال اگر میدان برداری به یک میدان برداری جدید تغییر شکل دهد بطوریکه باز هم هیچ نقطه مرزی تکینی نداشته باشد، باز هم درجه همان عددی است که قبلاً محاسبه کرده بودیم.
در اینجانوع دیگری از پایایی توپولوژیکی که به مجموعه های خاصی ازجوابهای معادلات دیفرانسیل به نام بلوکهای منزوی ساز نسبت داده می شود را تعریف می کنیم و سعی می کنیم بطور خلاصه به مبانی و مفاهیم نظریه کنلی بپردازیم و در پایان در مورد رابطه بین اندیس کنلی مجموعه پایدار منزوی S $(S \subset E)$ متناظربا نگاشت $f : \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ و $f|_E$ را بررسی می کنیم.

On the discrete Conley index in the invariant subspace, Andrzej Szymczak

, Klaudiuz Wojcik , Pitor Zgliczynski, Topology and its application,

Volume ۸۷, *Issue*۲, ۱۱*September* ۱۹۹۸, *Pages* ۱۰۵ – ۱۱۵

فصل ۱

روشهای توپولوژیک در سیستمهای دینامیکی

۱.۱ یادآوری

تعریف ۱.۱.۱ :

برای نگاشت

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = (f_۱(x), f_۲(x), \ldots, f_n(x))$$

$df(x_\circ)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$df(x_\circ) = (\partial f_i / \partial x_j (x_\circ))_{n\times n}$$

تعریف ۲.۱.۱ :

فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد، گوئیم $f \in C^k\,(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$[۱] اگر f یک نگاشت C^k از U به $\mathbb{R}^n$ باشد و $f, df, \ldots, d^k f$ همه روی $\bar{U}$ پیوسته باشند.

تعریف ۳.۱.۱ نقطه عادی[۲] :

$x_\circ \in U$ را یک نقطه عادی f گوئیم اگر $df(x_\circ)$ نامنفرد باشد در غیراینصورت $x_\circ$ رانقطه بحرانی[۳] f گوئیم .

---

۱ یعنی f روی مجموعه بازی شامل $\bar{U}$ مشتقپذیر باشد

۲ regular point

۳ critical point

تعریف ۴.۱.۱ نقطه بحرانی هذلولوی[۴]:
$x_\circ \in U$ را یک نقطه بحرانی هذلولوی تابع $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ گوئیم، اگر

۱) $f(x_\circ) = \circ$

۲) $df(x_\circ)$ هیچ مقدارویژه با قسمت حقیقی صفر نداشته باشد.

تعریف مقدار عادی[۵] ۵.۱.۱ :
$y_\circ \in \mathbb{R}^n$ را یک مقدار عادی f گوئیم اگر $f^{-1}(y)$ شامل هیچ نقطه بحرانی نباشد در غیر اینصورت $y_\circ$ را مقدار بحرانی[۶] گوئیم.

۲.۱ درجه براور

فرض کنید U یک زیرمجموعه باز و کراندار همبند از $\mathbb{R}^n$ باشد و $y_\circ \in \mathbb{R}^n$ و

$$f : U \to \mathbb{R}^n$$

است. می خواهیم عددی را تعریف کنیم که تعیین کند که آیا f در این ناحیه جواب دارد یا نه. این عدد بطور منحصر بفردی توسط مقادیرش روی ∂U مشخص می شود و هنگامیکه غیرصفر باشد به این معنی است که f یک صفر در U دارد.

قضیه ۶.۲.۱ قضیه سارد:
اگر $f \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$ آنگاه اندازهٔ مجموعه مقادیر بحرانی f صفر است.[۷]

از این به بعد فرض می کنیم: $f(x) \neq y_\circ$ اگر $x_\circ \in \partial U$. یعنی $y_\circ$ تصویر یک نقطه مرزی نباشد.

قضیه ۷.۲.۱ :
فرض کنید $f \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$ و $y_\circ$ یک مقدار عادی f باشد در اینصورت مجموعه $f^{-1}(y_\circ) = \{x \in \bar{U}; f(x) = y_\circ\}$ متناهی است .

---

۴ hyperbolic critical point

۵ regular value

۶ critical value

۷ فصل ۱۲، صفحه ۱۲۷،[۸]

اثبات: چون $\bar{U}$ فشرده است و برای هر $x_{\circ} \in f^{-1}(y_{\circ})$ داریم $det(df(x_{\circ})) \neq 0$ بنابراین یک همسایگی $V_{x_{\circ}}$ چنان موجوداست که $f|_{V_{x_{\circ}}}$ یک دیفئومورفیسم می باشد پس

$$f^{-1}(y_{\circ}) \subset \bigcup_{x_{\circ} \in f^{-1}(y_{\circ})} V_{x_{\circ}}$$

$f^{-}(y_{\circ}) \cap V_{x_{\circ}}$ رادرنظر بگیرید. برای هر $x \in f^{-}(y_{\circ}) \cap V_{x_{\circ}}$ داریم: $f(x) = y_{\circ}$. یعنی f روی این مجموعه یک به یک نیست که این با دیفئومورفیسم بودن $f|_{V_{x_{\circ}}}$ در تناض است، مگر اینکه $f^{-}(y_{\circ}) \cap V_{x_{\circ}}$ تک نقطه ای باشد. بنابراین توپولوژی القایی از $\bar{U}$ روی $f^{-}(y_{\circ})$ توپولوژی گسسته است. ازطرف دیگر $f^{-1}(y_{\circ})$ زیر مجموعه بسته مجموعه فشرده $\bar{U}$ است پس $f^{-1}(y_{\circ})$ فشرده است و چون در توپولوژی گسسته، مجموعه های فشرده، متناهی هستند. پس $f^{-1}(y_{\circ})$ متناهی است. □

تعریف ۸.۲.۱ درجهٔ براوور:
درجهٔ براوور[۸] f درمقدار عادی $y_{\circ}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$d(f, \bar{U}, y_{\circ}) =: \sum_{x \in f^{-1}(y_{\circ})} sgn[det(df(x)]$$

توجه کنید که $d(f, \bar{U}, y_{\circ})$ یک عدد مثبت، منفی یا صفر است .

مثال ۹.۲.۱ :
فرض کنید

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2} | x^{2} + y^{2} < 1\}$$

باشد و

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^{2} \\ (x,y) &\longrightarrow (x^{2}, y^{2}) \end{aligned}$$

باشد. درجه براوور f در $y_{\circ} = (1, 1)$ را حساب کنید. با توجه به تعریف U داریم:

$$\bar{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2} | x^{2} + y^{2} < 1\}$$

۸ Brouwer degree

$$Df(x_\circ, y_\circ) = \begin{pmatrix} ۲x & \circ \\ \circ & ۲y \end{pmatrix}$$

دراینصورت

$$f^{-۱}(y_\circ) = \{(۱,۱),(۱,-۱),(-۱,۱),(-۱,-۱)\}$$

$$d(f,\bar{U},y_\circ) = sgn[det(df(۱,۱) + sgn[det(df(-۱,۱) + sgn[det(df(۱,-۱)$$

$$+sgn[det(df(-۱,-۱) = +۱ - ۱ - ۱ + ۱ = \circ$$

می خواهیم این تعریف را در دو جهت گسترش دهیم :

۱) برای توابع $f \in C^۱(\bar{U},\mathbb{R}^n)$ در نقاط $y_\circ = f(x_\circ)$ که $df(x_\circ)$ منفرد است و

۲) برای توابع پیوسته یعنی $f \in C(\bar{U},\mathbb{R}^n)$

برای حالت (۱)می توان‌از قضیه سارد استفاده کرد و$y_\circ$ را با دنبالهٔ y_k ، $y_k \longrightarrow y_\circ$ کهy_k هامقادیر عادی f هستند تقریب زد و درجه f در $y_\circ$ را بصورت زیر تعریف کرد:

$$d(f,y_\circ,U) := \lim_{k\longrightarrow+\infty} d(f,y_k,U).$$

که باید نشان دهیم این حد متناهی است و به دنبالهٔ تقریبی بستگی ندارد.

برای (۲) می توان f را با$f_k \in C^۱(\bar{U},\mathbb{R}^n)$ تقریب زد و $d(f,y_\circ,U)$ رابصورت زیر تعریف کرد:

$$d(f,y_\circ,U) := \lim_{k\longrightarrow+\infty} d(f_k,y_\circ,U)$$

که دوباره باید نشان دهیم این حد متناهی است و به دنبالهٔ تقریبی بستگی ندارد.[۹]

اما یک راه جالبتر هم هست: به جای انجام دادن مراحل فوق یک روش سریعتر برای دستیابی به تئوری درجه براساس فرمهای مشتقپذیر را دنبال می‌کنیم :

[۹] اثبات کامل در [۲]

همانند فوق فرض می کنیم $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ باشد که U یک مجموعه باز با بستار فشرده است و $y_0 \in \mathbb{R}^n$ در شرط $f(x) \neq y_0 \; if \; x \in \partial U$ صدق می کند و $\mu = \phi(\eta)dy$[10] یک $n-$فرم C^∞ روی $\mathbb{R}^n$ با محمل فشرده $K \subset \mathbb{R}^n - f(\partial U)$ به گونه ای که $y_0 \in K$, $\int_K \mu = 1$ باشد.

قضیه ۱۰.۲.۱ :

درجهٔ براوِر f در y_0 را بصورت زیرنیز تعریف می کنیم:

$$d(f, U, y_0) := \int_U \mu \circ f = \int_U f^*(\mu)$$

فرم مشتقپذیر μ که دراین شرایط صدق کند را برای y_0 و f قابل قبول گویند. نشان می دهیم $d(f, U, y_0)$ خوشتعریف است یعنی به انتخاب μ بستگی ندارد.همچنین این تعریف با تعریف قبلی مطابقت دارد.

لم۱۱.۲.۱ :

فرض کنید $\mu = \phi(\eta)dy$ یک $n-$فرم C^∞ روی $\mathbb{R}^n$ با محمل فشرده K باشد که در شرط $\int \mu = 0$ صدق می کند.دراین صورت یک $(n-1)-$فرم ω وجود داردبطوریکه $\mu = d\omega$ و $supp \; \omega \subset K$.

قضیه۱۲.۲.۱ :

تعریف درجه بصورت فوق خوشتعریف است، یعنی به μ بستگی ندارد.

اثبات: فرض کنید μ و η دو فرم قابل قبول برای f و y_0 باشند، پس $\mu - \eta$ در شرایط لم فوق صدق می کنند.پس یک $(n-1)-$فرم ω با محمل فشرده در U وجود دارد بطوریکه $\mu - \eta = d\omega$.

$$\int_U f^*(\mu) - \int_U f^*(\eta) = \int_U f^*(\mu - \eta) = \int_U f^*(d\omega) = \int_U d(f^*(\omega))$$

با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$= \int_{\partial U} f^*(\omega) = 0$$

(چون $supp \; \omega \subset K$ پس ω روی $f(\partial U)$ صفر است. پس داریم

$$\int_U f^*(\mu) = \int_U f^*(\eta)$$

و $d(f, U, y_0)$ خوش تعریف است. □

حال برخی خواص درجه براور را بررسی می کنیم:

---
[10] $dy = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$

خاصیت ۱) اگر $|y_\circ - y_1|$ کوچک باشد، $d(f,U,y_\circ) = d(f,U,y_1)$

اثبات: اگر μ برای $y_\circ$ قابل قبول باشد، برای y_1 هم قابل قبول خواهد بود اگر $|y_\circ - y_1|$ به اندازه کافی کوچک باشد. □

خاصیت ۲) اگر $y_\circ$ یک مقدار عادی f باشد آنگاه $d(f,U,y_\circ) = d(y_\circ)$. در حالت خاص اگر $y_\circ \notin f(\bar{U})$ آنگاه $d(f,U,y_\circ) = \circ$

اثبات: چون $y_\circ$ یک مقدار عادی f است پس $f^{-1}(y_\circ)$ متناهی است. فرض کنید

$$f^{-1}(y_\circ) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

. طبق قضیه تابع معکوس برای هر x_i یک همسایگی N_i موجود است بطوریکه f روی N_i دیفئومورفیسم است. می توان N_i ها را طوری انتخاب کرد که برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $N_i \cap N_j = \emptyset$. قرار می دهیم

$$N = \bigcap f(N_i)$$

دراینصورت $y_\circ \in N$ وهمچنین فرض کنید μ $n-$ فرم با محمل فشرده در N برای $f, y_\circ$ قابل قبول باشد. پس

$$d(f,U,y_\circ) = \int_U \mu \circ f = \sum_{i=1}^{m} \int_{N_i} \mu \circ f = \sum_{i=1}^{m} \int_{f(N_i)} sgn[det\, df(x)]\mu$$

چون $\int_{f(N_i)-N} \mu = \circ$ پس

$$= \sum_{i=1}^{m} sgn[det\, df(x_i)] \int_N \mu = \sum_{i=1}^{m} sgn[det\, df(x_i)] = d(y_\circ)$$

و در نهایت از گزاره فوق نتیجه می شود که اگر $y_\circ \notin f(\bar{U})$ آنگاه $y_\circ$ یک مقدار عادی است و $d(y_\circ) = \circ$. □

نتیجه ۱.۲.۱۳ :

اگر y یک مقدار عادی f باشد که در مولفه کمانی $y_\circ$ یعنی در $\mathbb{R}^n - f(\partial U)$ قرار داشته باشد آنگاه $d(y) = d(f,U,y_\circ)$.

خاصیت ۳) (خاصیت هموتوپی): فرض کنید $\{f_t(.)\}$، $\circ \leq t \leq ۱$ یک دسته از توابع پیوسته که به پارامتر t بستگی دارد باشد بطوریکه

$$F(x,t) = f_t(x)$$

از $\bar{U} \times [\circ, ۱]$ به $\mathbb{R}^n$ پیوسته و برای هر $\circ \leq t \leq ۱$ $f_t \in C^۱(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$ باشد. اگر برای $\circ \leq t \leq ۱$ $y_\circ \notin f_t(\partial U)$ دراینصورت $d(f_t, U, y_\circ)$ مستقل از t است .

اثبات: قرار دهید

$$Y = \{f_t(x); x \in \partial U, \circ \leq t \leq ۱\}$$

پس $y_\circ \notin Y$ و Y فشرده است. فرض کنید μ برای $f, y_\circ$ قابل قبول باشد بطوریکه $sup(\mu) \cap Y = \emptyset$ پس $d(f_t, U, y_\circ) = \int_U \mu \circ f$ و این تابع در t پیوسته‌است و چون درجه یک تابع پیوسته با برد اعداد صحیح است پس باید در t ثابت باشد. □

خاصیت ۴) فرض کنید $\{U_i\}$ یک خانواده شمارشپذیر از زیرمجموعه های باز جدا از هم U باشد و$y_\circ \notin f(\bar{U} - \cup U_i)$ آنگاه $d(f, U_i, y_\circ)$ برای همهi هاصفر است به جز تعداد متناهی از i ها و

$$d(f, U, y_\circ) = \sum_i d(f, U_i, y_\circ)$$

اثبات: $\bar{U} - \cup U_i$ بسته است و در نتیجه فشرده است پس $f(\bar{U} - \cup U_i)$ نیز فشرده است . N را یک همسایگی از $y_\circ$ بگیرید که جدا از $f(\bar{U} - \cup U_i)$ باشد و y یک مقدار عادی درN باشد(با توجه به قضیه سارد می توان فرض کرد y یک مقدار عادی است). بنابر نتیجه خاصیت ۷.۲.۱ داریم :

$$d(f, U, y_\circ) = d(f, U, y)$$

و برای هر i $d(f, U_i, y_\circ) = d(f, U_i, y)$. چون $f^{-۱}(y)$ متناهی است پس باید در تعداد متناهی ازU_i ها قرار بگیرد مثلاً $U_۱, U_۲, \cdots, U_k$. درنتیجه اگر $f^{-۱}(y) = \{x_۱, x_۲, \cdots, x_k\}$ که $x_i \in U_i$

$$d(f, U, y_\circ) = d(f, U, y) = d(y) = \sum_۱^k sgn[det df(x_i)]$$

$$= \sum_{۱}^{k} d(f, U_i, y) = \sum_{۱}^{k} d(f, U_i, y_\circ)$$

□

خاصیت ۵) (خاصیت برش): فرض کنید Q یک مجموعه بسته در $\bar{U}$ باشد و $y_\circ \notin f(Q)$ آنگاه $d(f, U, y_\circ) = d(f, U - Q, y_\circ)$.

اثبات: اگر قرار دهیم $U_۱ = U - Q$ آنگاه از خاصیت قبل فوراً نتیجه می شود. □

خاصیت ٦) فرض کنید $U, \tilde{U}$ زیرمجموعه های باز کراندار از بعد m, n باشند و

$$\tilde{f} \in C^۱(\bar{\tilde{U}}, \mathbb{R}^m), f \in C^۱(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$$

دراینصورت اگر $y_\circ \in \mathbb{R}^n - f(\partial U)$,$\tilde{y_\circ} \in \mathbb{R}^m - \tilde{f}(\partial \tilde{U})$ آنگاه

$$d(f \times \tilde{f}, U \times \tilde{U}, (y_\circ, \tilde{y_\circ})) = d(\tilde{f}, \tilde{U}, \tilde{y_\circ}) \times d(f, U, y_\circ)$$

اثبات: $U \times \tilde{U}$ زیرمجموعه باز و کراندار در $\mathbb{R}^{n+m}$ است و $\overline{(U \times \tilde{U})} = \bar{U} \times \bar{\tilde{U}}$ و $(y_\circ, \tilde{y_\circ}) \in \mathbb{R}^{n+m} - (f \times \tilde{f})(\partial(U \times \tilde{U}))$. فرض کنید μ و $\tilde{\mu}$ برای $(y_\circ, f)$ و $(\tilde{y_\circ}, \tilde{f})$ قابل قبول باشند، پس $\mu.\tilde{\mu}$ یک فرم قابل قبول برای $f \times \tilde{f}$ در $(y_\circ, \tilde{y_\circ})$ است. بنابراین

$$\int_{U \times \tilde{U}} (\mu \wedge \tilde{\mu}) \circ (f \times \tilde{f}) = \int_U \mu \circ f \int_{\tilde{U}} \tilde{\mu} \circ \tilde{f}$$

□

خاصیت ۷) اگر بردار $f(x)$ و $g(x)$ در هیچ نقطه ای از $x \in \partial U$ در خلاف جهت هم نباشند، (یعنی $f(x) + \lambda g(x) \neq \circ$ برای همه $x \in \partial U, \lambda \geq \circ$) و $\circ \notin f(\partial U) \cup g(\partial U)$ آنگاه $d(f, U, \circ) = d(g, U, \circ)$.

اثبات: قرار دهید $h_t = tf + (۱ - t)g$. □

نتیجه ۱.۲.۱۴ :

فرض کنید $U=\{x\in\mathbb{R}^n; |x|\leq a\}$.اگر در هیچ نقطه از ∂U f(x) درخلاف جهت x نباشد و برای $|x|=a$ داشته باشیم $f(x)\neq \circ$ دراینصورت $f(x)=\circ$ در داخل U دارای جوابی است.

اثبات: چون $d(f,U,\circ)=d(I,U,\circ)$ که I تابع همانی در $\mathbb{R}^n$ است. □

خاصیت ۸) وابستگی به مقدار مرزی: اگر $f|\partial U=g|\partial U$ و $y_\circ\notin f(\partial U)$ آنگاه

$$d(f,U,y_\circ)=d(g,U,y_\circ)$$

اثبات: خاصیت ۳ را برای خانواده $tf+(1-t)g$, $t\leq 1$, به کار برید. چون g,f روی ∂U باهم مساویند، مفروضات ۳ برقراراست. □

خاصیت ۹) فرض کنید $f\in C(U,V)$, $g\in C(V,\mathbb{R}^n)$ که U و V زیرمجموعه های باز کراندار در$\mathbb{R}^n$ هستند و $\{V_j\}$ مولفه های باز همبند از $V-f(\partial U)$ باشد که بستار آنها زیرمجموعه های فشرده مجزا در V است.اگر $z_\circ\in\mathbb{R}^n-(g\circ f)(\partial U)$ آنگاه

$$d(g\circ f,U,z_\circ)=\sum_j d(f,U,v_j)d(g,V_j,z_\circ)$$

و حاصل جمع سمت راست متناهی است. (در اینجا $d(f,U,v)$ برای همه $v\in V_j$ ثابت است . بنابراین $d(f,U,V_j)$ بصورت $d(f,U,v)$ که $v\in V_j$ تعریف می شود).

اثبات: فرض کنیم f و g توابع C^1 باشند و $z_\circ$ یک مقدار عادی f و $g\circ f$ باشد بنابراین

$$d(g\circ f,U,z_\circ)=\sum_{u\in U,(g\circ f)(u)=z_\circ} sgn\ det\ d(g\circ f)_u$$

$$=\sum_{u\in U,(g\circ f)(u)=z_\circ} sgn\ det\ dg_{f(u)}\ sgn\ det\ df_u$$

$$=\sum_{v\in V,g(v)=z_\circ} sgn\ det\ dg_v \sum_{u\in U,g\circ f(u)=z_\circ} sgn\ det\ df_u$$

$$= \sum_{v\in V, g(v)=z_\circ} sgn\ det\ dg_v\ d(f,U,v)$$

اگر v در یک مولفه از $V - f(\partial U)$ که دارای بستار نافشرده است قرار داشته باشد، آنگاه این مولفه از $f(\bar{U})$ مجزاست. بنابراین $d(f,U,v) = ۰$ است (با توجه به خاصیت ۲ و نتیجه۱۱.۲.۱). بنابر خاصیت ۵ $d(f,U,v) = \sum_j d(f,U,V_j)$ و

$$d(g\circ f, U, z_\circ) = \sum_j d(f,U,V_j) \sum_{u\in V_j\ g(v)=z_\circ} sgn\ det\ dg_v = \sum_j d(f,U,V_j) d(g,V_j,z_\circ)$$

□

تاکنون تعداد زیادی از خاصیتهای تئوری درجه را ثابت کردیم اما نشان ندادیم که درجه یک مفهوم توپولوژیکی است. به عبارت دیگر مفهوم درجه را به نگاشتهای پیوسته توسعه ندادیم. اکنون می خواهیم به این مسأله بپردازیم.

فرض کنید $f \in C(U,\mathbb{R}^n)$ و فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع در$C^۱(U,\mathbb{R}^n)$ باشد بطوریکه f_n بطوریکنواخت، روی $\bar{U}$ بهf میل کند. اگر $y_\circ \notin f(\partial U)$ آنگاه برای n به قدر کافی بزرگ $y_\circ \notin f_n(\partial U)$. بنابراین $d(f_n,U,y_\circ)$ تعریف می شود. قرار می دهیم:

$$d(f,U,y_\circ) = \lim_{n\to\infty} d(f_n,U,y_\circ)$$

لم۱۵.۲.۱ :
حد فوق وجود دارد به $\{f_n\}$ بستگی ندارد.

اثبات: قراردهید

$$\delta = dis(y_\circ, f(\partial U))$$

پس $\delta \le \infty$ چون $f(\partial U)$ فشرده است. فرض کنید $\{g_n\}$ یک دنباله دیگر از توابع در$C^۱(U,\mathbb{R}^n)$ باشد که $\{g_n\}$ بطور یکنواخت روی $\bar{U}$ به f میل می کند. عدد N راچنان انتخاب می کنیم که برای $n \ge N$ داشته باشیم

$$\| f_n - f \| + \| g_n - g \| \le \delta/۲$$

که $\|.\|=\|.\|_{L^\infty(U)}$. فرض کنید

$$y_\circ = tf_n(x) + (\text{۱}-t)g_n(x))$$

که $\circ \leq t \leq \text{۱}, n \geq N, x \in \partial U$. پس

$$y_\circ - f(x) = y_\circ - tf(x) + (\text{۱}-t)f(x) = t[f_n(x)-f(x)] + (\text{۱}-t)[g_n(x)-f(x)]$$

بنابراین $|y_\circ - f(x)| \leq \delta/\text{۲}$ واین غیرممکن است. درنتیجه اگر $n \geq N$، با استفاده از خاصیت ۳ برای خانواده $\circ \leq t \leq \text{۱}, tf_n + (\text{۱}-t)g_n$ داریم:

$$d(f_n, U, y_\circ) = d(g_n, U, y_\circ) \qquad (*)$$

بنابراین اگر این حد موجود باشد به $\{f_n\}$ وابسته نیست. برای اثبات وجود این حد می توان مشابه همین بحث را برای f_m , f_n با $m, n \geq N$ به کار بریم که مشابه رابطهٔ $(*)$ بدست می آوریم:

$$d(f_n, U, y_\circ) = d(f_m, U, y_\circ)$$

بنابراین دنبالهٔ $d(f_n, U, y_\circ)$ برای $n \geq N$ ثابت است واین اثبات را کامل می کند. $\square$

تذکر: بنابر لم قبل توجه داریم که اگر $y_\circ \notin f(\partial U)$ آنگاه یک همسایگی N از f (با توپولوژی L^∞) وجود دارد چنانکه همه توابع $C^\text{۱}$ در N یک درجه دارند.

قضیه۱.۲.۱۶ :

خواص ۱ تا ۹ همه برای توابع پیوسته هم برقرارند واگر $y_\text{۱}, y_\circ$ در یک مولفه از $\mathbb{R}^n - f(\partial U)$ قرار داشته باشند آنگاه $d(f, U, y_\text{۱}) = d(f, U, y_\circ)$

فرض کنید ϕ یک نگاشت پیوسته $\phi : \partial U \to \mathbb{R}^n - \{y_\circ\}$ باشد. اگر f هر توسیع پیوسته ϕ به U باشد آنگاه $d(f, U, y_\circ)$ مسلماً تعریف می شود. یعنی درجه به توسیع خاصی وابسته نیست. اگر g هر توسیع دیگری باشد واگر $\circ \leq t \leq \text{۱} \quad , \quad h_t = tf + (\text{۱}-t)g$ خاصیت هموتوپی نشان می دهد که $d(h_t, U, y_\circ)$ به t وابسته نیست.

۱) اگر g, f توابع پیوسته باشند و $y_\circ \notin f(\partial U)$ $f|\partial U = g|\partial U$ آنگاه $d(f, U, y_\circ) = d(g, U, y_\circ)$ یعنی درجه فقط به مقدار مرزی بستگی دارد.

۲) اگر$\phi \in C(\partial U, \mathbb{R}^n)$، $y_\circ \notin \phi(\partial U)$ آنگاه $d(\phi, U, y_\circ)$ فقط به کلاس هموتوپی ϕ بستگی دارد.

اثبات: فرض کنید $\phi_t,\ \circ \leq t \leq ۱$ یک دگردیسی هموتوپی از ϕ با $\phi_\circ = \phi$ باشد. اگر $f_\circ$, $f_۱$ توسیعهای پیوسته ای از $\phi_\circ$, $\phi_۱$ به کل U باشند، قرار می دهیم:

$$f_t = tf_\circ + (۱ - t)f_۱$$

می بینیم که $d(f, U, y_\circ)$ مستقل از t است و این اثبات را کامل می کند. □

اکنون می خواهیم تعدادی از کاربردهای این مفهوم را بررسی کنیم :

قضیه ۱۷.۲.۱ :

فرض کنید $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ و $k \in \mathbb{Z}, k \geq \circ$ وجود داشته باشد که

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{< f(x), x >}{|x|^k} =$$

$+$

∞

آنگاه برای هر $y_\circ \in \mathbb{R}^n$ یک $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که $f(x_\circ) = y_\circ$ یعنی f پوشاست .

اثبات: می توانیم فرض کنیم $y_\circ = \circ$ درغیراینصورت می توان $f(x)$ را با $f(x) - y_\circ$ عوض کرد.اکنون فرض می کنیم $r \geq \circ$ موجود باشد بطوریکه اگر $|x| = r$ داشته باشیم: $< f(x), x > \geq \circ$. اگر برای $|x| = r$، داشته باشیم $f(x) \neq \circ$، آنگاه از $< f(x), x > \geq \circ$ نتیجه می شود $f(x)$ در هیچ نقطه ای در $|x| = r$ جهت مخالف x نیست. درنتیجه $f(x) = \circ$ یک جواب $\bar{x}$ با $|\bar{x}| \leq r$ دارد. □

قضیه ۱۸.۲.۱ :

فرض کنید D یک گوی باز در$\mathbb{R}^n$ باشد دراینصورت هیچ نگاشت پیوسته مثل $f : \bar{D} \to \partial D$ وجود ندارد بطوریکه $f|_{\partial D}$ همانی باشد.

اثبات: فرض کنیم چنین تابعی مثل f موجود باشد. چون $\circ \in \mathbb{R}^n - f(\partial D)$ بنابر خاصیت ۴، $d(f, D, \circ) = d(I, D, \circ)$ اما $d(I, D, \circ) = ۱$ پس $d(f, D, \circ) = ۱$ پس $\circ \in f(D)$ واین غیرممکن است چون $f(D) \subset \partial D$, $\circ \notin \partial D$ و این تناقض است. □

قضیهٔ نقطه ثابت براور۱.۲.۱۹ :

فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^n$ با گوی واحد در $\mathbb{R}^n$ همئومورف باشد.اگر$\phi : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ یک تابع پیوسته باشد آنگاه ϕ دارای نقطه ثابت است یعنی $\bar{x} \in \bar{D}$ چنان وجود دارد بطوریکه$\phi(\bar{x}) = \bar{x}$

اثبات: اولاً توجه کنید که اگر D' همئومورف باD باشد و اگر قضیه برای D' برقرار باشد آنگاه برای D نیز برقراراست.
در حقیقت فرض کنید ψ، D' را با یک همئومورفیسم به توی D می نگارد دراینصورت $\psi^{-1}\phi\psi$ D' را بطورپیوسته به خودش می نگارد. پس بنابراین دارای نقطه ثابت $\psi^{-1}(x)$ است که $\bar{x}$ نقطه ثابت $\phi : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ است.
پس می توان فرض کرد D دیسک واحد به مرکز مبداء است. اگرϕ هیچ نقطه ثابتی نداشته باشد (یعنی $\phi(x) \neq x$) آنگاه برای هر $x \in D$ نقطه x و $\phi(x)$ یک خط تعریف می کنند:

$$\lambda x + (1 - \lambda)\phi(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

که ∂D رادر دو نقطه مجزا قطع می کند.
فرض کنید$f(x)$ نقطه یکتایی روی این خط باشد که نرم ۱ دارد و در آن نقطه $\lambda \geq 1$ است. پس f ، $\bar{D}$ را بطورپیوسته به ∂D می نگارد و$f|_{\partial D} = I$ واین بنابرقضیه قبل غیرممکن است. □

اکنون به بررسی برخی کاربردهای قضیه نقطه ثابت براور می پردازیم :

قضیه۱.۲.۲۰ :

فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^n$ یک میدان همئومورفیک با گوی واحد در$\mathbb{R}^n$ باشد بطوریکه هر مسیر معادله $\dot{x} = f(x)$ (که f درشرط لیپ شیتسی موضعی صدق می کند)که در $t = 0$ از نقطه ای در D شروع شود و برای $t > o$ درD باقی بماند، دراینصورت D حداقل یک نقطه ساکن این معادله را در بردارد. یعنی نقطه ای مانند $\bar{x}$ در D موجود است بطوریکه $x(t) = \bar{x}$ جواب این معادله است.

اثبات: برای سادگی جواب معادله $\dot{x} = f(x)$ باشرط اولیه $x(0) = x_0$ رابا $x_0.t$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر $x_0.t$ جوابی از این معادله است که در شرط $x(0) = x_0$ صدق می کند. $\{t_k\}$ را دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت که به صفر همگرایند را در نظر بگیرید. حال برای k ثابت نگاشت $f_k(x)$ را از D به D بصورت $f_k(x) = x.t_k$ تعریف کنید.
از خاصیت پیوستگی جواب نسبت به شرط اولیه معادلات دیفرانسیل[11] نتیجه می شود که f_k نگاشتی پیوسته از

[11] فصل اول، صفحه ۲۷،[۶]