بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

مسأله شبکه با جریان برابر

استاد راهنما:
دکتر محمدعلی یعقوبی

مؤلف:
امان اله دهقانی راینی

بهمن ۱۳۸۷

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : امان اله دهقانی

استاد راهنما : دکترمحمدعلی یعقوبی

داور ۱ : دکترماشاالله ماشین چی

داور ۲ : دکترمحمودمحسنی مقدم

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

آیا قلم که می نگارد خواهد توانست الفبای سپاس را، راست قامت بنگارد.

پس پیشکش به

پدرو مادر عزیزم

آنان که راستی قامتم، در شکستی قامتشان تجلی یافت،

سپاسگذارم و در برابر وجود پاکشان زانوی ادب بر زمین می زنم و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستان پاکشان بوسه می زنم

و خالصانه ترین درود ها و بهترین آرزوها را به پاس بودن ها، همراهی ها و همدلی ها بدرقه راهشان می نمایم.

«آنچه به دیده زیباست، به یاری خدا کردیم»

سپاس خداوند دانای آشکار و نهان را، که در حریم رحمتش فرصت بودنی این گونه را برایم مقدر فرمود، فرصتی که به واسطه لطف و کرمش، زیباترین حکمت ها را در مسیر هدفم قرار داد تا بهترین دانش ها را بیاموزم.

حمدی که باعث روشنایی دیده جان می گردد، نصیب خداوندی باد که یاری گر راستینم بود و بی شک پیمودن مسیر پرفرازو نشیب علم آموزی میسر نمی گردد مگر به مدد الطاف الهی و لطف و محبت های خالصانه آنانی که در این راه همدمم بودند.

پس به مصداق حدیث «من لم یشکر المخلوق ، لم یشکر الخالق» برخود لازم می دانم از همه بزرگوارانی که در تهیه این تحقیق اینجانب را یاری نموده اند صمیمانه تشکر کنم.

از استادفرزانه جناب آقای دکتر یعقوبی که تلاش ها و مساعدت های ایشان همواره پشتیبان راهم بود

وازاساتید بزرگوار جناب دکتر ماشین چی وجناب دکتر محسنی

و تمامی دوستان و یاران دیرینم، کمال تشکر رادارم.

چکیده

در بسیاری از مسائل تصمیم گیری، به مسأله کمینه سازی هزینه جریان در شبکه برخورد می شود. مسأله کمینه سازی هزینه جریان در شبکه برای مشخص کردن کمترین هزینه انتقال کالا از طریق یک شبکه به منظور برآورده شدن تقاضاهای موجود در گره های خاص با استفاده از عرضه دیگر گره ها، به کار می رود.

در برخی از شبکه ها علاوه بر رعایت عرضه و تقاضای گره ها نیاز به وجود جریان یکسانی در بعضی از یال های شبکه می باشد. از چنین شبکه ای تحت عنوان شبکه با جریان برابر نام برده می شود. در این پایان نامه روش های کمینه سازی هزینه جریان در یک شبکه با جریان برابر بحث و بررسی خواهند شد. برای این منظور، در فصل اول به مقدماتی از شبکه و الگوریتم سیمپلکس شبکه جهت حل مسأله کمینه سازی هزینه جریان در شبکه اشاره می شود.

فصل دوم به مطالعه نوعی از شبکه با جریان برابر تحت عنوان شبکه با جریان برابر ساده خواهد پرداخت. در این نوع شبکه فقط برخی از یال های شبکه محدود به داشتن جریان برابری هستند. در فصل سوم، چند الگوریتم برای حل کمینه سازی هزینه جریان در یک مسأله شبکه با جریان برابر ساده، ارائه خواهند شد که عبارتند از: الگوریتم سیمپلکس شبکه، الگوریتم پارامتری سیمپلکس، الگوریتم پارامتری ترکیبی و الگوریتم جستجوی دوتایی.

در فصل چهارم مسأله شبکه با جریان برابر تعمیم یافته بررسی می شود. در این نوع شبکه، یال ها به مجموعه های مجزایی تقسیم شده و یال هایی که در هر مجموعه قرار می گیرند محدود به داشتن جریان برابری هستند.

فهرست

عنوان صفحه

فصل اول

مقدمه ای بر شبکه و روش سیمپلکس شبکه

۱-۱ مقدمه

برنامه ریزی خطی با بهینه سازی (بیشینه سازی یا کمینه سازی) یک تابع هدف تحت محدودیت های مساوی یا نا مساوی سروکار دارد.

از لحاظ تاریخی، مسأله برنامه ریزی خطی، اولین بار توسط دانتزینگ[۱] و همکاران او در گروه آموزشی نیروی هوایی ایالات متحده در سال ۱۹۴۷ مورد استفاده قرار گرفت. در آن زمان، این گروه پیرامون امکان بکار بردن ریاضیات و همچنین تکنیک های عملیات جنگی، توسط مسائل برنامه ریزی تحقیق می کردند. بنابراین مبتکر اصلی حل برنامه ریزی خطی، دانتزینگ معرفی شد. برای گسترش و توسعه ایده های بیشتر، نیروی هوایی ایالات متحده یک گروه تحقیقی تحت عنوان «تیم محاسبات علمی برنامه های بهینه» را سازماندهی کرد که نتیجه آن، ابداع روش سیمپلکس توسط دانتزینگ در پایان تابستان ۱۹۴۷ بود [۸].

از زمان ابداع روش سیمپلکس تا کنون افراد زیادی در پیشرفت برنامه ریزی خطی، در قالب تئوری ریاضی آن، معرفی روش ها و کدهای محاسباتی کارا، کشف الگوریتم های نوین و کاربردهای جدید برنامه ریزی خطی به عنوان ابزاری برای حل مسائل پیچیده، مثلاً برنامه های گسسته، برنامه های غیر خطی، مسائل برنامه ریزی احتمالی و مسائل کنترل بهینه، مشارکت داشته اند [۵].

الگوریتم سیمپلکس دید عمیقی از تئوری برنامه ریزی خطی فراهم می آورد و در عمل الگوریتم کارایی را بدست می دهد.

۱- G. B. Dantzing

اولین کاربرد مهم این روش در پائیز ۱۹۴۷ انجام گرفت. لدرمن[1]، برنامه ریزی خطی تغذیه را با ۹ محدودیت و ۲۷ متغیر نامنفی در سازمان ملی استانداردها حل کرد. این مسأله با استفاده از یک ماشین حساب کوچک ۱۲۰ نفر – روز وقت گرفت و کاغذ های دست نویس آن حجم زیادی را اشغال کرد. امروز با بکارگیری رایانه های نسل جدید تسهیلاتی در اجرای برنامه های خطی بزرگ بوجود آمده است و برنامه های خطي با ۵۰۰۰ محدودیت و ۱۰۰۰۰ متغیر به آسانی حل می شوند. گر چه تا کنون چند نوع روش سیمپلکس بوجود آمده و الگوریتم های جدید دیگری نیز پیشنهاد شده اند، اما استفاده از روش سیمپلکس بعنوان ابزاری مورد قبول و ماندنی در حل مسائل برنامه ریزی خطی، استمرار یافته است [۵].

یک نمونه از مسائل برنامه ریزی خطی، مسأله جریان های شبکه ای[2] می باشد. اگرچه چنانچه جریان در شبکه محدود به مقادیر صحیح باشد دیگر مسأله مورد نظر تحت رده مسائل برنامه ریزی خطی قرار نمی گیرد ولی با توجه به ساختار خاص مسائل جریان های شبکه ای می توان آن ها را به کمک روش سیمپلکس حل نمود. بطور کلی، بسیاری از بخش های زندگی اجتماعی، از شبکه ها تشکیل شده است. شبکه های الکتریکی، شبکه های تلفن، شبکه های ریلی، شبکه های رایانه ای و شبکه های تولید و توزیع موادغذایی، مثال هایی از انواع شبکه ها می باشند. در این گونه مسائل می بایستی برخی اشیاء (الکتریسیته، یک شخص، یک وسیله نقلیه، یک پیغام، یک فراورده معینی) از یک یا چند مبدأ به یک یا چند مقصد دیگر در شبکه انتقال یابد[۲]. این انتقال با توجه به یک هدف خاص صورت می گیرد بطوری که نتیجه آن، بهترین وضعیت را برای هدف مورد نظر ایجاب می کند. این مسائل تحت عنوان جریان های شبکه ای

۱- G. Lederman
۲- Network flows

شناخته می شوند. جریان های شبکه ای در رأس تحقیقات چندین رشته از جمله ریاضیات کاربردی، علوم کامپیوتر، مدیریت و تحقیق در عملیات قرار دارند. برای سادگی از این پس مسأله جریان های شبکه ای تحت عنوان مسأله شبکه نام برده می شود.

در این فصل به معرفی شبکه، مدل سازی شبکه، بیان و توضیح روش سیمپلکس شبکه پرداخته خواهد شد.

۱-۲ مدل شبکه

قبل از اینکه مدل ریاضی مسأله شبکه بیان شود برخی از تعاریف ضروری ارائه می شود.

تعریف ۱-۲-۱: مجموعه ای ناتهی از نقاط (اشیاء) که رئوس نامیده می شوند به همراه مجموعه ای از روابط بین رئوس که آنها را یال می نامند، تشکیل یک گراف می دهد.

تعریف ۱-۲-۲: یک گراف را جهت دار گویند هر گاه هر یال آن بصورت کمانی جهت دار باشد.

فرض کنید $\mathbf{G}$ یک گراف جهت دار با مجموعه رئوس (گره های) متناهی $\mathbf{V}=\{1,2,\dots\dots,m\}$ و مجموعه یال های جهت دار $\mathbf{E}=\{(i,j),(k,l),\dots\dots,(s,t)\}$ باشد بطوریکه:

$$(i,j)\in\mathbf{E} \Rightarrow \quad i,j\in\mathbf{V}.$$

علاوه بر این، به هر رأس گراف $\mathbf{G}$ یک عدد مربوط می شود. عدد مربوط به گره iام با b_i نشان داده می شود. اگر $b_i>0$، آنگاه گره iام، گرهی است که شامل موجودی به اندازهٔ b_i می باشد. اگر $b_i<0$، آنگاه گره iام، گرهی است که درخواست تقاضا به میزان $|b_i|$دارد و اگر $b_i=0$، آنگاه گره iام نه دارای موجودی است و نه تقاضا و به آن گره میانی یا انتقالی می گویند. همچنین به هر یال $(i,j)\in\mathbf{E}$ یک عدد مربوط می شود که با c_{ij}نشان داده می شود که برابر است با هزینه انتقال یک واحد جریان از گره i به گره j. از طرفی ممکن است انتقال جریان در طول کمان (i,j) دارای محدودیت حداقل ظرفیتی l_{ij}و حداکثر ظرفیتی u_{ij} باشد.

تعریف ۱-۲-۳: یک مسأله شبکه عبارت است از یک گراف جهت دار با مفروضات فوق و هدف در آن انتقال جریان از منبع ها یعنی گره هایی که b_i آنها مثبت است به مقصدها یعنی گره هایی که b_i منفی دارند، می باشد. بطوریکه موجودی و تقاضای هر گره رعایت شود و هزینه انتقال جریان در شبکه کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

- **مدل سازی مسأله شبکه**

برای مدل سازی مسأله شبکه تعریف شده در تعریف ۱-۲-۳ به ازای هر یال $(i,j)\in\mathbf{E}$ متغیر تصمیم x_{ij} بصورت زیر تعریف می شود:

x_{ij}برابر مقدار جریانی است که باید از گره iام به گره jام منتقل شود. درنتیجه:

$$\forall(i,j)\in\mathbf{E} \qquad l_{ij}\le x_{ij}\le u_{ij}.$$

چون باید مقدار جریانی که از گره iام خارج می شود، منهای مقدار جریانی که به گره iام وارد می شود برابر با عرضه یا تقاضای آن گره باشد لذا معادلاتی بصورت زیر بیان می شوند:

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{k\in P(i)} x_{ki} = b_i \quad , \quad i=1,\ldots\ldots,m. \tag{۱-۱}$$

که در آن $\mathbf{S}(i)$, $\mathbf{P}(i)$ بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\mathbf{P}(i)=\{k|(k,i)\in\mathbf{E}\} \quad , \quad \mathbf{S}(i)=\{j|(i,j)\in\mathbf{E}\}.$$

در واقع $\mathbf{S}(i)$ مجموعه رئوسی از $\mathbf{V}$ می باشد که یک یال از رأس i به آنها متصل است و $\mathbf{P}(i)$ شامل مجموعه رئوسی از $\mathbf{V}$ است که با یک یال به رأس i متصل هستند. به معادلات (۱-۱)، معادلات تعادلی هر گره گفته می شود.

در نتیجه می توان مدل مسأله شبکه را بصورت زیر ارائه کرد:

$$\min : z = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{k\in P(i)} x_{ki} = b_i \quad , \quad i = 1,\ldots\ldots, m \qquad (۱-۲)$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \forall (i,j)\in \mathbf{E}$$

در مسأله شبکه، فرض می شود که مجموع عرضه و تقاضاها برابر صفر است، به عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$$

اما در عمل ممکن است این وضعیت وجود نداشته باشد. اگر $\sum_{i=1}^{m} b_i > 0$، در اینصورت گره $(m+1)$ام به شبکه اضافه می شود و $b_{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} b_i$ و از تمام گره های منبع به گره $(m+1)$ام یک یال جهت دار با هزینه صفر وصل می شود.

اگر $\sum_{i=1}^{m} b_i < 0$، آنگاه با اضافه کردن گره $(m+1)$ و قرار دادن $b_{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} b_i$ مشابه فوق عمل می شود با این تفاوت که این بار از گره $(m+1)$ام به تمام مقصدها، یال جهت دار با هزینه صفر وصل می شود.

اگر بعضی یا همه یال های گراف شبکه، جهت دار نباشند، می توان این یال ها را جهت دار کرد. به اینصورت که اگر یالی از گره i به گره j بدون جهت باشد و $c_{ij} \ge 0$، می توان به جای آن دو یال جهت دار (i,j) و (j,i) را با هزینه c_{ij} در شبکه قرار داد.

اگر ماتریس ضرایب قیود مدل (۱-۲) با $\mathbf{A}$ و بردار مربوط به هزینه ها در سطر تابع هدف با $\mathbf{c}$ نشان داده شود آنگاه مدل مسأله شبکه بصورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} &\min : z = \mathbf{cx} \\ &s.t. \\ &\quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{l} \le \mathbf{x} \le \mathbf{u} \end{aligned} \tag{۳-۱}$$

که در آن $\mathbf{l}$ بردار کران های پائین l_{ij}، $\mathbf{u}$ بردار کران های بالای u_{ij} و $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ می باشد.

ماتریس $\mathbf{A}$ متناظر با هر رأس دارای یک سطر و متناظر با هر یال دارای یک ستون می باشد، هر ستون $\mathbf{A}$ دقیقاً دارای دو مؤلفه غیر صفر می باشد (یک مؤلفه $+1$ و دیگری -1). ستون مربوط به یال (i, j) شامل عدد $+1$ در سطر iام و -1 در سطر jام ماتریس $\mathbf{A}$ می باشد و بقیه عناصر در ستون مذکور برابر صفر می باشند، در نتیجه ستون مربوط به یال (i, j) که با $\mathbf{a}_{ij}$ نشان داده می شود بصورت زیر قابل نمایش است:

$$\mathbf{a}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

از طرفی می توان $\mathbf{a}_{ij}$ را بصورت تفاضل دو بردار ستونی بصورت زیر نوشت:

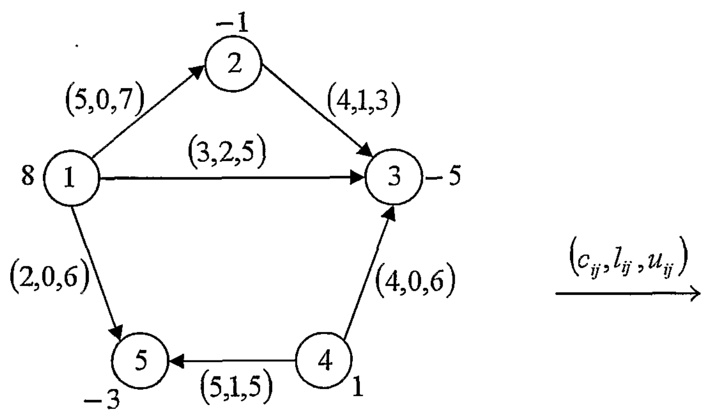
$$\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$$

که در آن $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}_j$ بردارهای ستونی m تایی هستند که به ترتیب در مکـان iام و jام آنهـا عـدد $+1$ و بقیه درایه ها صفر قرار دارد. به ماتریس $\mathbf{A}$، ماتریس وقوع رأسی – کمانی[1] گفته می شـود.

قرارداد: اگر یک یال در شبکه دارای محدودیت ظرفیتی نباشد حداقل ظرفیت مربوط به آن یال، صفر و حداکثر ظرفیت آن ∞ در نظر گرفته خواهد شد.

برای درک بهتر مسأله شبکه و چگونگی مدل بندی آن به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱–۲–٤: شبکه زیر را با ۵ رأس و ۶ یال در نظر بگیرید:



$$\min: z = 5x_{12} + 3x_{13} + 2x_{15} + 4x_{23} + 4x_{43} + 5x_{45}$$

$s.t.$

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x_{12} & +x_{13} & +x_{15} & & & & = 8 \\
-x_{12} & & & +x_{23} & & & = -1 \\
& -x_{13} & & -x_{23} & -x_{43} & & = -5 \\
& & & & x_{43} & +x_{45} & = 1 \\
& & -x_{15} & & & -x_{45} & = -3
\end{array}$$

$$0 \le x_{12} \le 7$$
$$2 \le x_{13} \le 5$$
$$0 \le x_{15} \le 6$$
$$1 \le x_{23} \le 3$$
$$0 \le x_{43} \le 6$$
$$1 \le x_{45} \le 5$$

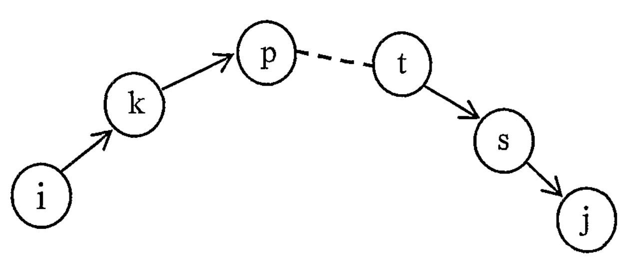
۱- Node - arc incidence matrix

مدل شبکه با مفروضات فوق یک مسأله برنامه ریزی خطی است که می توان آنرا با روش سیمپلکس[۱] حل کرد[۵]. ولی با توجه به ساختار شبکه، می توان روش سیمپلکس را بدون بکار بردن جدول های مربوطه، روی گراف شبکه اعمال کرد و جواب مسأله را بدست آورد. در ادامه مقدمات این روش بیان می شود.

تعریف ۱-۲-۵: تعداد یال هایی که به هر رأس مربوط می شود، درجه هر رأس گفته می شود. تعداد یال هایی که به هر رأس وارد می شود، درجه ورودی و تعداد یال هایی که از هر رأس خارج می شود، درجه خروجی آن رأس گفته می شود.

در نتیجه درجه هر رأس برابر با مجموع درجه ورودی بعلاوه درجه خروجی آن رأس است.

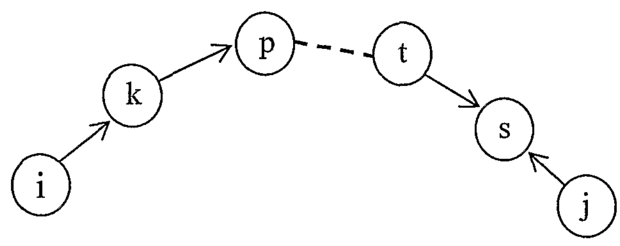
تعریف ۱-۲-۶: مجموعه یال های جهت داری که همگی در یک جهت هستند و گره iام را به گره jام وصل می کنند یک مسیر از گره i به گره j نامیده می شود.



شکل ۱-۱: یک مسیر از گره i به گره j

تعریف ۱-۲-۷: مجموعه یال های جهت داری که لزوماً در یک جهت نباشند و گره iام را به گره jام وصل کنند یک زنجیر از گره i به گره j نامیده می شود.

۱- Simplex method



شکل ۱-۲: یک زنجیر از گره i به گره j

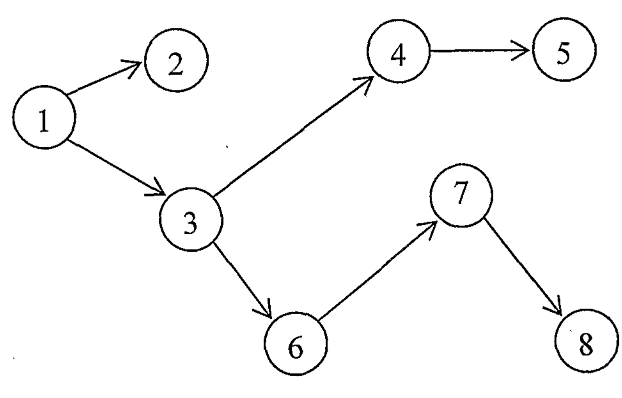
تعریف ۱-۲-۸: به مسیر بسته، یک مدار گفته می شود.

تعریف ۱-۲-۹: به زنجیره بسته، یک دور گفته می شود.

تعریف ۱-۲-۱۰: اگر بین هر دو رأس یک گراف، یک زنجیر موجود باشد گراف را همبند (ضعیف) می نامند و اگر بین هر دو رأس یک گراف، یک مسیر موجود باشد، آن گراف را قویاً همبند گویند.

تعریف ۱-۲-۱۱: یک گره با درجه رأسی یک یا صفر، گره پایانی نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۱۲: گراف همبندی که شامل هیچ دوری نباشد، یک درخت نامیده می شود.



شکل ۱-۳: یک درخت

تعریف ۱-۲-۱۳: به یک زیرگراف ماکسیمال همبند یک گراف، مؤلفه یک گراف گفته می شود. منظور از ماکسیمال، داشتن بیشترین تعداد یال می باشد.

تعریف ۱-۲-۱٤: درختی که شامل همه رئوس گراف باشد، درخت فراگیر نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۱٥: هر گراف ناهمبندی که مؤلفه هایش درخت باشد، یک جنگل نامیده می شود.

قضیه ۱-۲-۱٦: برای گراف T $(\mathbf{V},\mathbf{E})$، عبارات زیر با هم معادلند:

i. T همبند است و شامل هیچ دوری نیست.

ii. T همبند و دارای $m-1$ یال است. (m تعداد رئوس گراف T است)

iii. T، $m-1$ یال دارد و شامل هیچ دوری نیست.

iv. T همبند است و با حذف هر یال از $\mathbf{E}$، T به دو مؤلفه تبدیل می شود.

v. T شامل هیچ دوری نیست ولی با اضافه کردن یک یال، T دقیقاً دارای یک دور می شود.

vi. هر دو رأس T، با یک زنجیر منحصر به فرد، به هم متصل می شوند.

اثبات: به [۵] صفحه ۴۲۴ مراجعه کنید.■

تعریف ۱-۲-۱۷: بردارهای $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^n$ را مستقل خطی گویند هر گاه:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_n\mathbf{x}_n = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

اگر بردارها مستقل خطی نباشند آنها را وابسته خطی می گویند.

تعریف ۱-۲-۱۸: به بیشترین تعداد سطرها (ستون ها)ی مستقل خطی ماتریس $\mathbf{A}$، رتبه ماتریس $\mathbf{A}$ گفته می شود و با $rank\ (\mathbf{A})$ نشان داده می شود. اگر $rank\ (\mathbf{A})$ برابر با تعداد سطرها یا تعداد ستون ها باشد آنگاه $\mathbf{A}$ را یک ماتریس با رتبه کامل گویند.

از آنجائیکه جمع تمام سطرهای ماتریس وقوع رأسی – کمانی $\mathbf{A}$ صفر می شود، لذا سطرهای $\mathbf{A}$ مستقل خطی نیستند پس رتبه $\mathbf{A}$ از m کمتر است.