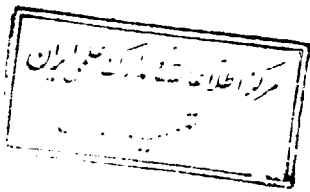




۲۱۸۳۸



۱۳۷۹ / ۹ / ۱۶



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد کرمان

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

موضوع:

استنتاج قضایای فازی از قضایای کلاسیک

استاد راهنما:

دکتر اسفندیار اسلامی

نگارش:

نادر صادقی حسنلونی

9181

شهریور ۱۳۷۸

ب ۳۱۵۳۸

موضوع:

استنتاج قضایای فازی از قضایای کلاسیک

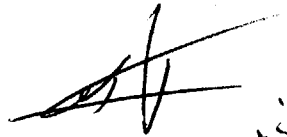
توسط:

نادر صادقی حسنلوئی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۷۸/۷/۳ در مقابل هیئت داوران دفاع بعمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

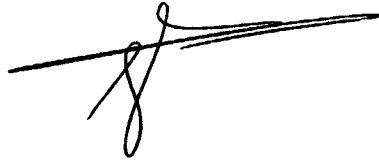
اعضاء هیئت داوران:




استاد راهنما: دکتر اسفندیار اسلامی

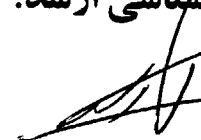


داور: دکتر محمد مهدی زاهدی

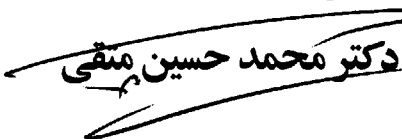


استاد مشاور: دکتر رضانکونی

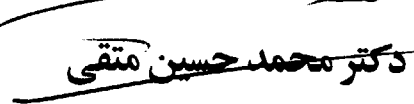
معاون آموزشی دانشگاه: 
مجید غلامحسین پور

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد: 
دکتر اسفندیار اسلامی

رئیس دانشگاه:


دکتر محمد حسین متقی

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی:


دکتر محمد حسین متقی

سپاسگزاری

خداوند منان را سپاسگزارم که به من سعادت کوشش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود و به لطف و عنایت او توانستم قطره‌ای از اقیانوس بیکران علم و دانش را بچشم. از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر اسفندیار اسلامی که قبول زحمت نموده و راهنمایی این رساله را به عهده گرفتند و با صبر و گشاده رویی پاسخگوی سوالات اینجانب بوده و در طی این دوره تحصیلی، همکاریهای لازم را با دانشجویان بعمل آوردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از اساتید گرامی آقایان دکتر رضا نکوئی و دکتر محمد مهدی زاهدی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را برعهده داشته‌اند و از راهنمای آنان استفاده نموده‌ام سپاسگزاری می‌کنم.

نادر صادقی حسنلوئی

شهریور ماه ۷۸

چکیده

در این پایان نامه براساس مقاله تام هد [20] چگونگی استنتاج قضایای فازی را از نوع معمولی آنها بویژه در جبر بررسی می‌کنیم. فرض کنیم X یک جبر است در اینصورت زیر مجموعه‌های فازی X یعنی $F(X)$ تشکیل یک جبر می‌دهند. در این رساله با استفاده از مفهوم زیر مجموعه C -فازی تعاریفی با الگوی یکسان برای مفاهیم فازی ارائه می‌دهیم و با یک روش یکسان به استنتاج قضایای جبر فازی از قضایای جبر معمولی می‌پردازیم ابزار اساسی برای این کار تابع نمایش R است که جبر $F(X)$ را بصورت زیر حاصل ضرب کپی هائی از جبر زیر مجموعه‌های معمولی X نمایش می‌دهد. سپس با بیان و اثبات فراقضیه و نتایج آن به استنتاج قضایای درباره نیم گروههای فازی، زیر گروههای فازی و ایدآلهای فازی با استفاده از قضایای مشابه آنها در جبر نیم گروها، گروها و حلقه‌ها می‌پردازیم. برای نمونه خاصیت مدولی مشبکه زیر گروههای نرمال فازی از یک گروه بطور مستقیم از خاصیت مدولی زیر گروههای نرمال نتیجه می‌شود.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	مقدمه
فصل اول:	
۴	۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی
۹	۲.۱ تابع R و خواص آن
۱۹	۳.۱ فراقضیه
فصل دوم	
۲۵	۲.۱ نیم گروه فازی
۳۰	۲.۲ کاربرد فراقضیه در نیم گروه فازی
۳۹	۳.۲ زیر گروه فازی
فصل سوم	
۵۴	۱.۳ ایدال فازی
۶۴	۲.۲ استنتاج قضایای ایدالهای فازی از جبر جابجائی
۷۳	واژه نامه فارسی - انگلیسی
۷۵	مراجع

مقدمه:

جبر فازی ریشه در نظریه زیر مجموعه‌های فازی دارد و مفهوم زیر مجموعه فازی توسط زاده در [13] بعنوان تابعی از مجموعه ناتهی X به $[0, 1]$ مطرح شد. پس از آن روزنفلد در [10] به جای مجموعه ناتهی X ، گروه دلخواه G قرار داده و زیر گروه فازی را براساس زیر مجموعه فازی، $f: G \rightarrow [0, 1]$ تعریف می‌کند. سپس محققین دیگر نیز، در جبر فازی به ارائه تعاریف نه یکسان برای مفاهیم جبر فازی پرداختند. هدف از این رساله که بر مبنای مقاله تام هد [20] در سه فصل تنظیم شده است، ارائه یک الگوی یکسان برای بیان تعاریف جبر فازی و استنتاج قضایای جبر فازی از جبر کلاسیک می‌باشد. در فصل اول در بخش (۱.۱) تعاریف و قضایای مقدماتی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده مکرر قرار می‌گیرد. در بخش (۲.۱) تابع نمایش R تعریف کرده و پس از اثبات خواص اساسی آن، راه را برای بیان و اثبات مهمترین قضیه این رساله، یعنی فراقضیه هموار می‌کنیم. فراقضیه که در بخش (۳.۱) بیان شده است. چگونگی استنتاج قضایای جبر فازی از قضایای کلاسیک را بیان می‌کند. و اثبات قضایای دیگر این رساله در فصل‌های بعدی در ارتباط مستقیم با فراقضیه و نتایج آن می‌باشد.

در فصل دوم در بخش (۲.۱) ابتدا تعاریف زیر نیم گروه فازی و... را بیان کرده و نشان می‌دهیم که این تعاریف سازگار با الگوی زیر مجموعه C -فازی هستند. سپس با استفاده از فراقضیه در ارتباط با تعاریف فوق قضایایی را از مرجع [5] بیان کرده و اثبات می‌کنیم. و در ادامه فصل دوم ضمن تعریف زیر گروه فازی و زیر گروه نرمال فازی نشان می‌دهیم

که رده زیر گروههای نرمال فازی از گروه دلخواه G تشکیل یک مشبکه می دهند. و با ارائه یک مثال می بینیم که زیر گروههای غیر نرمال چنین خاصیتی را ندارند.

در فصل سوم ایدال فازی از یک حلقه جابجائی و یکدار را با پیروی از الگوی زیر مجموعه C - فازی، تعریف کرده و با در نظر گرفتن همریختی بین دو حلقه، مفاهیم توسیع و تحدید یک ایدال را به حالت فازی تعمیم می دهیم. و سپس با تعریف رادیکال ایدال فازی و ایدال فازی تولید شده، با استفاده از فراقضیه و خواص تابع R به استنتاج قضایای جبر فازی از جبر جابجایی مرجع [17] می پردازیم.

فصل اول:

۱-۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ (زیر مجموعه فازی): فرض کنیم که X یک مجموعه ناتهی و همچنین

$I = [0, 1]$. در این صورت هر تابع $f: X \rightarrow I$ را یک زیر مجموعه فازی X می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ (مجموعه توانی فازی): مجموعه همه زیر مجموعه های فازی X را

مجموعه توانی فازی X می نامیم و آنرا با $F(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ (زیر مجموعه دقیق): زیر مجموعه فازی، $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ را یک زیر

مجموعه دقیق X می نامیم.

تعریف ۴.۱.۱ (مجموعه توانی دقیق): مجموعه زیر مجموعه های دقیق X را مجموعه

توانی دقیق X می نامیم و با $C(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ (مجموعه توانی X): مجموعه همه زیر مجموعه های X را مجموعه

توانی X می نامیم و با $P(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ (تابع مشخصه): برای هر $Y \in P(X)$ ، تابع مشخصه Y را به شکل زیر

تعریف می کنیم.

$$\chi_Y: X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & x \in Y \\ 0 & x \notin Y \end{cases}$$

تعریف ۷.۱.۱ (عملگر n -تایی): فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. برای هر عدد

صحیح نامنفی n ، X^n را به شکل زیر تعریف می کنیم.

اگر $n = 0$ آنگاه

$$X^0 = \{\phi\}$$

اگر $n \geq 1$ آنگاه $X^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X, i = 1, \dots, n\}$

در این صورت هر تابعی مانند $f: X^n \rightarrow X$ ، را یک عملگر n -تایی روی X و n را مرتبه عملگر f می‌نامیم. برای حالت خاص $n=0$ ، $f: \{\phi\} \rightarrow X$ ، $f(\phi)$ را یک عنصر دلخواه، از X در نظر می‌گیریم.

تعریف ۸.۱.۱ (جبر): فرض کنیم f_1, \dots, f_k عملگرهای n -تایی به ازای $n \geq 0$ ، روی مجموعه ناتهی X باشند، در این صورت $\langle X, f_1, \dots, f_k \rangle$ را یک جبر از نوع $\langle n_1, \dots, n_k \rangle$ می‌نامیم که در آن $1 \leq i \leq k$ ، مرتبه عملگر f_i است.

تعریف ۹.۱.۱ (زیر جبر): فرض کنیم $\langle X, f_1, \dots, f_k \rangle$ یک جبر و B زیر مجموعه ناتهی X باشد. در این صورت $\langle B, f_1, \dots, f_k \rangle$ را یک زیر جبر X می‌نامیم و می‌نویسیم $B \leq X$ ، که در آن به ازای $i = 1, \dots, k$ f_i تحدید f_i به B می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ (ترتیب جزئی): رابطه دوتایی \leq ، تعریف شده روی مجموعه ناتهی X را یک رابطه ترتیب جزئی می‌نامیم، اگر در سه شرط زیر صدق کند.

$$1- \text{ برای هر } x, y \in X, x \leq x$$

$$2- \text{ برای هر } x, y \in X, \text{ اگر } x \leq y \text{ و } y \leq x \text{ آنگاه داشته باشیم } x = y$$

$$3- \text{ برای هر } x, y, z \in X \text{ اگر } x \leq y \text{ و } y \leq z \text{ آنگاه داشته باشیم } x \leq z$$

تعریف ۱۱.۱.۱ (مجموعه جزئاً مرتب): مجموعه ناتهی X را یک مجموعه جزئاً مرتب می‌نامیم اگر یک ترتیب جزئی روی آن تعریف شده باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ (کران بالا و کران پایین): فرض کنیم، Y یک زیر مجموعه ناتهی از مجموعه جزئاً مرتب $\langle X, \leq \rangle$ باشد. در این صورت، $x \in X$ را یک کران بالا (کران پایین) برای Y می‌نامیم، اگر برای هر $y \in Y$ ، $(x \leq y) \Rightarrow y \leq x$ ، و کوچکترین کران

بالای Y را (بزرگترین کران پایین Y) را با $\sup Y$ یا $\vee Y$ یا $\inf Y$ (یا $\wedge Y$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ (مشبکه): مجموعه جزئاً مرتب $\langle L, \leq \rangle$ را یک مشبکه می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in L$ ، $\sup\{x, y\}$ و $\inf\{x, y\}$ در L وجود داشته باشند. و همچنین مشبکه L را کامل گوئیم، اگر برای هر $Y \subseteq L$ و $Y \neq \emptyset$ ، آنگاه $\sup Y$ و $\inf Y$ در L وجود داشته باشند.

تعریف ۱۴.۱.۱ (زیر مشبکه): زیر مجموعه ناتهی L' از مشبکه L را یک زیر مشبکه گوئیم اگر برای هر $x, y \in L'$ ، $\sup\{x, y\}$ و $\inf\{x, y\}$ در L' وجود داشته و برابر $\sup\{x, y\}$ و $\inf\{x, y\}$ در L باشند.

تعریف ۱۵.۱.۱ (زیر مشبکه کامل): زیر مشبکه L' از مشبکه کامل L را زیر مشبکه کامل گوئیم، اگر برای هر $Y \subseteq L'$ و $Y \neq \emptyset$ ، آنگاه $\sup Y$ و $\inf Y$ در L' وجود داشته و برابر با $\sup Y$ و $\inf Y$ در L باشند.

لم ۱۶.۱.۱: یک تناظر یک به یک بین $P(X)$ و $C(X)$ وجود دارد.

اثبات:

نگاشت $\phi: P(X) \rightarrow C(X)$ را تعریف می‌کنیم، برای هر $Y \in P(X)$

$$\phi(Y) = \chi_Y$$

بسادگی اثبات میشود که این تابع یک تناظر یک به یک است. ■

لم ۱۷.۱.۱: $F(X)$ با رابطه \leq تعریف شده در ذیل یک مجموعه جزئاً مرتب است.

برای هر $f, g \in F(X)$ و برای هر $x \in X$

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

اثبات:

واضح است. ■

لم ۱۸.۱.۱: $F(X)$ یک مشبکه کامل است و $C(X)$ یک زیر مشبکه کامل $F(X)$ می باشد.

اثبات:

فرض کنیم $\{f_i\}_{i \in \ell} \subseteq F(X)$ ، توابع h و g را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$h: X \rightarrow I$$

$$h(x) = \inf \{f_i(x) : i \in \ell\}$$

$$g: X \rightarrow I$$

$$g(x) = \sup \{f_i(x) : i \in \ell\}$$

در این صورت چون $I = [0, 1]$ بسته و کراندار از مجموعه اعداد حقیقی است h و g

خوش تعریف بوده و $\sup \{f_i\}_{i \in \ell} = g$ و $\inf \{f_i\}_{i \in \ell} = h$ همچنین واضح است که

$C(X)$ با رابطه \leq یک مجموعه جزئاً مرتب است. فرض کنیم که $\{f_i\}_{i \in \ell} \subseteq C(X)$ ، در این

صورت برای $i \in \ell$ و هر $x \in X$ ، $f_i(x) \in \{0, 1\}$ ، لذا می بینیم که

$\inf \{f_i\}_{i \in \ell}$ و $\sup \{f_i\}_{i \in \ell}$ در $F(X)$ متعلق به $C(X)$ می باشند. پس $C(X)$ یک زیر

مشبکه $F(X)$ است. ■

لم ۱۹.۱.۱: مجموعه توانی $P(X)$ با رابطه " \subseteq " یک مشبکه کامل است.

اثبات:

واضح است که $\langle P(X), \subseteq \rangle$ یک مجموعه جزئاً مرتب است. و اگر

■ . $\{X_i\}_{i \in \ell} \subseteq P(X)$ ، آنگاه $\sup \{X_i\}_{i \in \ell} = \bigcup_{i \in \ell} X_i$ و $\inf \{X_i\}_{i \in \ell} = \bigcap_{i \in \ell} X_i$

تعریف ۲۰.۱.۱ (یکریختی): الف - اگر L و L' دو مشبکه باشند. در این صورت تناظر

یک به یک $\alpha: L \rightarrow L'$ را یک یکرخی مشبکه‌ای می‌نامیم، اگر α و α^{-1} حافظ ترتیب باشند. یعنی:

$$1- \text{ برای هر } a, b \in L, \text{ اگر } a \leq b, \text{ آنگاه } \alpha(a) \leq \alpha(b)$$

$$2- \text{ برای هر } a', b' \in L', \text{ اگر } a' \leq b', \text{ آنگاه } \alpha^{-1}(a') \leq \alpha^{-1}(b')$$

در این صورت گوئیم L و L' یکرخت هستند.

ب- فرض کنیم X و X' دو جبر از نوع $\langle n_1, \dots, n_k \rangle$ با عملگرهای f_1, \dots, f_k

روی X و عملگرهای f'_1, \dots, f'_k روی X' باشند. در این صورت تابع $\alpha: X \rightarrow X'$

را یک همریختی می‌نامیم، اگر برای هر $i = 1, \dots, k$ و هر عملگر n_i -تایی f_i و

$x_1, \dots, x_n \in X$ داشته باشیم:

$$\alpha(f_i(x_1, \dots, x_{n_i})) = f'_i(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_{n_i}))$$

اگر α یک به یک و پوشا باشد، α را یک یکرختی می‌نامیم و گوئیم X

با X' یکرخت است.

لم ۲۱.۱.۱: مشبکه‌های $\langle C(X), \leq \rangle$ و $\langle P(X), \leq \rangle$ یکرخت‌اند.

اثبات:

بنابه لم ۱۶.۱.۱ تابع

$$\phi: P(X) \rightarrow C(X)$$

$$\phi(Y) = \chi_Y$$

یک تناظر یک به یک است.

فرض کنید $Y, Y' \in P(X)$ و $Y' \subseteq Y$. پس بنابه تعریف ۱۶.۱.۱ برای هر $x \in X$,

اگر $\chi_Y(x) = 0$ ، آنگاه $\chi_{Y'}(x) = 0$ پس $\chi_{Y'} \leq \chi_Y$.

حال فرض کنیم $\chi_{Y'}, \chi_Y \in C(X)$ و $\chi_{Y'} \leq \chi_Y$ باشد. پس بنا به لم ۱۷.۱.۱

اگر $\chi_{Y'}(x) = 1$ ، آنگاه $\chi_Y(x) = 1$ و بادر نظر گرفتن تعریف ۶.۱.۱ بدست

می‌آوریم که اگر $x \in Y'$ آنگاه $x \in Y$ و در نتیجه $Y' \subseteq Y$. ■

۲.۱ تابع R و خواص آن

تابع نمایش R را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ (تابع نمایش): فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی است و $J = [0, 1]$

در اینصورت تابع

$$R: F(X) \rightarrow C(X)^J$$

را به صورت زیر معین می‌کنیم: اگر $f \in F(X)$ یک زیر مجموعهٔ فازی X باشد آنگاه

$$R(f): J \rightarrow C(X)$$

تابعی خواهد بود که برای هر $r \in J$ تابع

$$R(f)(r): X \rightarrow \{0, 1\}$$

با ضابطه

$$R(f)(r)(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \leq r \\ 1 & f(x) > r \end{cases}$$

برای هر $x \in X$ تعریف می‌شود و بطور خلاصه تابع R بصورت زیر تعریف میشود.

$$R: F(X) \rightarrow C(X)^J$$

$$R(f)(r)(x) = \begin{cases} 0 & f(x) \leq r \\ 1 & f(x) > r \end{cases}$$

چون بنا به لم ۱۶.۱.۱ هر تابع مشخصه را می‌توان با مجموعه نظیرش یکی گرفت پس