بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد کرمان

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

موضوع:

استنتاج قضایای فازی از قضایای کلاسیک

استاد راهنما:

دکتر اسفندیار اسلامی

نگارش:

نادر صادقی حسنلوئی

شهریور ۱۳۷۸

موضوع:

استنتاج قضایای فازی از قضایای کلاسیک

توسط:

نادر صادقی حسنلوئی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۷۸/۷/۳ در مقابل هیئت داوران دفاع بعمل آمده و مورد تصویب قرارگرفت.

اعضاء هیئت داوران:

استاد راهنما: دکتر اسفندیار اسلامی

داور: دکتر محمد مهدی زاهدی

استاد مشاور: دکتر رضا نکوئی

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد:
دکتر اسفندیار اسلامی

معاون آموزشی دانشگاه:
مجید غلامحسین پور

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی:
دکتر محمد حسین متقی

رئیس دانشگاه:
دکتر محمد حسین متقی

سپاسگزاری

خداوند منان را سپاسگزارم که به من سعادت کوشش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود و به لطف و عنایت او توانستم قطره‌ای از اقیانوس بیکران علم و دانش را بچشم.

از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر اسفندیار اسلامی که قبول زحمت نموده و راهنمائی این رساله را به عهده گرفتند و با صبر و گشاده رویی پاسخگوی سوالات اینجانب بوده و در طی این دوره تحصیلی، همکاریهای لازم را با دانشجویان بعمل آوردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از اساتید گرامی آقایان دکتر رضا نکوئی و دکتر محمد مهدی زاهدی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را برعهده داشته‌اند و از راهنمای آنان استفاده نموده‌ام سپاسگزاری می‌کنم.

نادر صادقی حسنلوئی

شهریور ماه ۷۸

چکیده

در این پایان نامه براساس مقاله تام هد [20] چگونگی استنتاج قضایای فازی را از نوع معمولی آنها بویژه در جبر بررسی می‌کنیم. فرض کنیم X یک جبر است در اینصورت زیر مجموعه‌های فازی X یعنی F(X) تشکیل یک جبر می‌دهند. در این رساله با استفاده از مفهوم زیر مجموعه C- فازی تعاریفی با الگوی یکسان برای مفاهیم فازی ارائه می‌دهیم و با یک روش یکسان به استنتاج قضایای جبر فازی از قضایای جبر معمولی می‌پردازیم ابزار اساسی برای این کار تابع نمایش R است که جبر F(X) را بصورت زیر حاصل ضرب کپی هائی از جبر زیر مجموعه‌های معمولی X نمایش می‌دهد. سپس با بیان و اثبات فراقضیه و نتایج آن به استنتاج قضایائی درباره نیم گروههای فازی، زیر گروههای فازی و ایدآلهای فازی با استفاده از قضایای مشابه آنها در جبر نیم گروها، گروهها و حلقه‌ها می‌پردازیم. برای نمونه خاصیت مدولی مشبکه زیر گروههای نرمال فازی از یک گروه بطور مستقیم از خاصیت مدولی زیر گروههای نرمال نتیجه می‌شود.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

مقدمه:

جبر فازی ریشه در نظریه زیر مجموعه‌های فازی دارد و مفهوم زیر مجموعه فـازی توسط زاده در [13] بعنوان تابعی از مجموعه ناتهی X بـه [۱و۰] مـطرح شـد. پس از آن روزنفلد در [10] به جای مجموعه ناتهی X، گروه دلخواه G قرار داده و زیر گروه فازی را براساس زیر مجموعهٔ فازی، $f: G \to [0,1]$ تعریف می‌کند. سپس محققین دیگر نـیز، در جبر فازی به ارائه تعاریف نه یکسان برای مفاهیم جبر فازی پرداختند. هدف از این رساله که بر مبنای مقاله تام هد [20] در سه فصل تنظیم شده است، ارائه یک الگوی یکسان برای بیان تعاریف جبر فازی و استنتاج قضایای جبر فازی از جبر کلاسیک می‌باشد. در فصل اول در بخش (۱.۱) تعاریف و قضایای مقدماتی را بیان می‌کنیم که در فـصل‌های بـعدی مورد استفاده مکرر قرار می‌گیرد. در بخش (۲.۱) تابع نمایش R تعریف کـرده و پس از اثبات خواص اساسی آن، راه را برای بیان و اثـبات مـهمترین قـضیه ایـن رسـاله، یـعنی فراقضیه هموار می‌کنیم. فراقضیه که در بخش (۳.۱) بیان شده است. چگـونگی اسـتنتاج قضایای جبر فازی از قضایای کلاسیک را بیان می‌کند. و اثبات قضایای دیگر این رساله در فصلهای بعدی در ارتباط مستقیم با فراقضیه و نتایج آن می‌باشد.

در فصل دوم در بخش (۲.۱) ابتدا تعاریف زیر نیم گروه فازی و...، را بیان کرده و نشان می‌دهیم که این تعاریف سازگار با الگوی زیر مجموعه C- فازی هستند. سپس با استفاده از فراقضیه در ارتباط با تعاریف فوق قضایایی را از مرجع [5] بیان کرده و اثبات می‌کنیم. و در ادامه فصل دوم ضمن تعریف زیر گروه فازی و زیر گروه نرمال فازی نشان می‌دهیم

که ردهٔ زیر گروههای نرمال فازی از گروه دلخواه G تشکیل یک مشبکه می‌دهند. و با ارائه یک مثال می‌بینیم که زیر گروههای غیر نرمال چنین خاصیتی را ندارند.

در فصل سوم ایدآل فازی از یک حلقهٔ جابجائی و یکدار را با پیروی از الگوی زیر مجموعهٔ C- فازی، تعریف کرده و با در نظر گرفتن همریختی بین دو حلقه، مفاهیم توسیع و تحدید یک ایدآل را به حالت فازی تعمیم می‌دهیم. و سپس با تعریف رادیکال ایدآل فازی و ایدآل فازی تولید شده، با استفاده از فراقضیه و خواص تابع R به استنتاج قضایای جبر فازی از جبر جابجایی مرجع [17] می‌پردازیم.

فصل اول:

۱-۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ (زیر مجموعه فازی): فرض کنیم که X یک مجموعه ناتهی و همچنین $I = [0,1]$. در این صورت هر تابع $f:X \to I$ را یک زیر مجموعه فازی X می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ (مجموعه توانی فازی): مجموعهٔ همه زیر مجموعه‌های فازی X را مجموعه توانی فازی X می‌نامیم و آنرا با F(X) نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ (زیر مجموعه دقیق): زیر مجموعه فازی، $f:X \to \{0,1\}$ را یک زیر مجموعه دقیق X می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱ (مجموعه توانی دقیق): مجموعه زیر مجموعه‌های دقیق X را مجموعه توانی دقیق X می‌نامیم و با C(X) نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ (مجموعه توانی X): مجموعه همه زیر مجموعه‌های X را مجموعه توانی X می‌نامیم و با P(X) نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ (تابع مشخصه): برای هر $Y \in P(X)$ ، تابع مشخصهٔ Y را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\chi_Y : X \to \{0,1\}$$

$$x \to \begin{cases} 1 & x \in Y \\ 0 & x \notin Y \end{cases}$$

تعریف ۷.۱.۱ (عملگر n ـ تائی): فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. برای هر عدد صحیح نامنفی n, X^n را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

اگر $n = 0$ آنگاه
$$X^0 = \{\phi\}$$

اگر $n \geq 1$ آنگاه $X^n = \{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in X \ , \ i = 1,\dots n\}$

در این صورت هر تابعی مانند $f: X^n \to X$ را، یک عملگر n- تائی روی X و n را مرتبهٔ عملگر f می‌نامیم. برای حالت خاص $n=0$، $f: \{\varphi\} \to X$ ، $f(\varphi)$ را یک عنصر دلخواه، از X در نظر می‌گیریم.

تعریف ۸.۱.۱ (جبر): فرض کنیم $f_1,...,f_k$ عملگرهای n_تائی به ازای $n \geq 0$ ، روی مجموعه ناتهی X باشند، در این صورت $<X, f_1,...,f_k>$ را یک جبر از نوع $<n_1,...n_k>$ می‌نامیم که در آن $1 \leq i \leq k$, n_i مرتبه عملگر f_i است.

تعریف ۹.۱.۱ (زیر جبر): فرض کنیم $<X, f_1,...,f_k>$ یک جبر و B زیر مجموعه ناتهی X باشد. در این صورت $<B, f'_1,...,f'_k>$ را یک زیر جبر X می‌نامیم و می‌نویسیم $B \leq X$ ، که در آن به ازای i = 1,...,k ، f'_i تحدید f_i به B می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ (ترتیب جزئی): رابطهٔ دوتایی $\leq$ ، تعریف شده روی مجموعهٔ ناتهی X را یک رابطهٔ ترتیب جزئی می‌نامیم، اگر در سه شرط زیر صدق کند.

۱- برای هر $x, y \in X$ ، $x \leq x$.

۲- برای هر $x, y \in X$ ، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه داشته باشیم x = y.

۳- برای هر $x, y, z \in X$ اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه داشته باشیم $x \leq z$.

تعریف ۱۱.۱.۱ (مجموعه جزئاً مرتب): مجموعه ناتهی X را یک مجموعه جزئاً مرتب می‌نامیم اگر یک ترتیب جزئی روی آن تعریف شده باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ (کران بالا و کران پائین): فرض کنیم، Y یک زیر مجموعه ناتهی از مجموعه جزئاً مرتب $<X, \leq>$ باشد. در این صورت، $x \in X$ را یک کران بالا (کران پایین) برای Y می‌نامیم، اگر برای هر $y \in Y$ ، $y \leq x$ $(x \leq y)$ ، و کوچکترین کران

بالای Y را (بزرگترین کران پایین Y) را با sup Y یا $\vee Y$ (inf Y یا $\wedge Y$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ (مشبکه): مجموعهٔ جزئاً مرتب $<L,\leq>$ را یک مشبکه می‌نامیم اگر برای هر $x,y\in L$، sup{x,y} و inf{x,y} در L وجود داشته باشند. و همچنین مشبکهٔ L را کامل گوئیم، اگر برای هر Y⊆L و $Y\neq\emptyset$، آنگاه inf Y, sup Y در L وجود داشته باشند.

تعریف ۱۴.۱.۱ (زیر مشبکه): زیر مجموعهٔ ناتهی L' از مشبکه L را یک زیر مشبکه گوئیم اگر برای هر $x,y\in L'$، sup{x,y} و inf{x,y} در L' وجود داشته و برابر sup{x,y} و inf{x,y} در L باشند.

تعریف ۱۵.۱.۱ (زیر مشبکه کامل): زیر مشبکه L' از مشبکه کامل L را زیر مشبکه کامل گوئیم، اگر برای هر $Y\subseteq L'$ و $Y\neq\emptyset$، آنگاه sup Y و inf Y در L' وجود داشته و برابر با supY و infY در L باشند.

لم ۱۶.۱.۱: یک تناظر یک به یک بین P(X) و C(X) وجود دارد.

اثبات:

نگاشت $\phi:P(X)\to C(X)$ را تعریف می‌کنیم، برای هر $Y\in P(X)$

$$\phi(Y)=\chi_Y$$

بسادگی اثبات میشود که این تابع یک تناظر یک به یک است.■

لم ۱۷.۱.۱: F(X) با رابطه $\leq$ تعریف شده در ذیل یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است.

برای هر $g,f\in F(X)$ و برای هر $x\in X$

$$f\leq g \Leftrightarrow f(x)\leq g(x)$$

اثبات:

واضح است.■

لم ۱۸.۱.۱: $F(X)$ یک مشبکه کامل است و $C(X)$ یک زیر مشبکه کامل $F(X)$ می‌باشد.

اثبات:

فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in\ell} \subseteq F(X)$ ، توابع h و g را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$h{:}X\to I$$
$$h(x)=inf\{f_i(x)\ :\ i\in\ell\}$$
$$g{:}X\to I$$
$$g(x)=sup\{f_i(x)\ :\ i\in\ell\}$$

در اینصورت چون $I = [0,1]$ بسته و کراندار از مجموعه اعداد حقیقی است h و g خوش تعریف بوده و $sup\{f_i\}_{i\in\ell}=g$ و $inf\{f_i\}_{i\in\ell}=h$ همچنین واضح است که $C(X)$ با رابطهٔ $\leq$ یک مجموعه جزئاً مرتب است. فرض کنیم که $\{f_i\}_{i\in\ell}\subseteq C(X)$ ،دراین صورت برای $i\in\ell$ و هر $x\in X$ ، $f_i(x)\in\{0,1\}$ ، لذا می‌بینیم که $inf\{f_i\}_{i\in\ell}$ و $sup\{f_i\}_{i\in\ell}$ در $F(X)$متعلق به $C(X)$ می‌باشند. پس $C(X)$ یکزیر مشبکه $F(X)$ است. ■

لم ۱۹.۱.۱: مجموعه توانی $P(X)$ با رابطهٔ "$\subseteq$" یک مشبکه کامل است.

اثبات:

واضح است که $<P(X),\subseteq>$ یک مجموعه جزئاً مرتب است. و اگر

$\{X_i\}_{i\in\ell}\subseteq P(X)$ ، آنگاه $sup\{X_i\}_{i\in\ell}=\bigcup_{i\in\ell} X_i$ و $inf\{X_i\}_{i\in\ell}=\bigcap_{i\in\ell} X_i$. ■

تعریف ۲۰.۱.۱ (یکریختی): الف ـ اگر L و L' دو مشبکه باشند. در اینصورت تناظر

یک به یک $\alpha:L\to L'$ را یک یکریختی مشبکه‌ای می‌نامیم، اگر α و α^{-1} حافظ ترتیب باشند. یعنی:

۱- برای هر $a,b\in L$، اگر $a\leq b$، آنگاه $\alpha(a)\leq\alpha(b)$.

۲- برای هر $a',b'\in L'$، اگر $a'\leq b'$، آنگاه $\alpha^{-1}(a')\leq\alpha^{-1}(b')$.

در اینصورت گوئیم L و L' یکریخت هستند.

ب - فرض کنیم X و X' دو جبر از نوع $<n_1,\dots,n_k>$ با عملگرهای $f_1,\dots,f_k$ روی X و عملگرهای $f'_1,\dots,f'_k$ روی X' باشند. در این صورت تابع $\alpha:X\to X'$ را یک همریختی می‌نامیم، اگر برای هر $i=1,\dots,k$ و هر عملگر n_i- تائی f_i و f'_i و $x_1,\dots,x_n\in X$ داشته باشیم:

$$\alpha(f_i(x_1,\dots,x_{n_i}))=f'_i(\alpha(x_1),\dots\alpha(x_{n_i}))$$

اگر α یک به یک و پوشا باشد، α را یک یکریختی می‌نامیم و گوئیم X با X' یکریخت است.

لم ۲۱.۱.۱: مشبکه‌های $<C(X),\leq>$ و $<P(X),\leq>$ یکریخت‌اند.

اثبات:

بنابه لم ۱۶.۱.۱ تابع

$$\phi:P(X)\to C(X)$$
$$\phi(Y)=\chi_Y$$

یک تناظر یک به یک است.

فرض کنید $Y,Y'\in P(X)$ و $Y'\subseteq Y$. پس بنا به تعریف ۶.۱.۱ برای هر $x\in X$،

اگر $\chi_Y(x)=\circ$ ، آنگاه $\chi_{Y'}(x)=\circ$. پس $\chi_{Y'}\leq\chi_Y$.

حال فرض کنیم $\chi_Y, \chi_{Y'} \in C(X)$ و $\chi_{Y'}\leq\chi_Y$ باشد. پس بنا به لم ۱۷.۱.۱ اگر $\chi_{Y'}(x)=1$ ، آنگاه $\chi_Y(x)=1$ و . با در نظر گرفتن تعریف ۶.۱.۱ بدست می‌آوریم که اگر $x\in Y'$، آنگاه $x\in Y$ و در نتیجه $Y'\subseteq Y$. ■

۲.۱ تابع R و خواص آن

تابع نمایش R را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ (**تابع نمایش**): فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی است و $J = [\circ,1)$ ، در اینصورت تابع

$$R:F(X)\to C(X)^J$$

را به صورت زیر معین می‌کنیم: اگر $f\in F(X)$ یک زیر مجموعهٔ فازی X باشد آنگاه

$$R(f):J\to C(X)$$

تابعی خواهد بود که برای هر $r\in J$، تابع

$$R(f)(r):X\to\{\circ,1\}$$

با ضابطه

$$R(f)(r)(x)=\begin{cases}\circ & f(x)\leq r\\ 1 & f(x)>r\end{cases}$$

برای هر $x\in X$ تعریف می‌شود و بطور خلاصه تابع R بصورت زیر تعریف میشود.

$$R:F(X)\to C(X)^J$$

$$R(f)(r)(x)=\begin{cases}0 & f(x)\leq r\\ 1 & f(x)>r\end{cases}$$

چون بنا به لم ۱۶.۱.۱ هر تابع مشخصه را می‌توان با مجموعه نظیرش یکی گرفت پس