سپاس

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

حمد و ستایش خداوند سبحان را، که مرا توفیق عنایت فرمود تا در راه کسب علم و دانش گامی در رسیدن به کمال بی انتهایش بردارم.

به پاس احترام به حرمت دانش بر خود لازم می‌دانم که از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم سرکار خانم دکتر لعل شاطری که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام، تشکر و قدرانی می نمایم و آرزوی موفقیت ایشان را از خدای متعال خواهانم. همچنین از استاد عزیزم جناب آقای دکتر صادقی که زحمات زیادی در به نتیجه رساندن این پایان نامه بر عهده داشتند و دلسوزانه مرا در این مهم راهنمایی کردند، صمیمانه سپاسگذارم.

در پایان نیز از پدر و مادر و خانواده ی عزیزم که در مراحل مختلف این رساله مرا یاری‌کردند، کمال تشکر را دارم و آرزوی موفقیت و سلامتی ایشان را از خدای متعال خواهانم.

فهرست مطالب

مقدمه **۴**

۱ پیش نیازها **۶**

۱.۱ جبرهای باناخ و C^*-جبرها ۶

۲.۱ فضای هیلبرت و C^* -مدول های هیلبرت ۱۰

۳.۱ C^* -جبرهای $\ell(E)$ و $F(E)$ ۲۱

۴.۱ ضرب تانسوری فضاهای هیلبرت و C^*- جبرها ۲۹

۵.۱ مدول های کاملا متمم دار ۳۱

۲ نگاشت های $\mathcal{A}$-خطی حافظ رتبه یک روی مدول های هیلبرت **۳۴**

۱.۲ تعاریف و نتایج مقدماتی ۳۴

۲.۲ نگاشت های مدولی حافظ رتبه یک روی $F(H_{\mathcal{A}})$ ۴۳

۳.۲ نگاشت های مدولی حافظ رتبه یک روی $\ell(H_{\mathcal{A}})$ ۵۱

۳ نگاشت های جمعی حافظ رتبه یک **۵۴**

۱.۳ تعاریف و لم ها ۵۴

۲.۳ نگاشت های جمعی حافظ رتبه یک ۶۱

کتاب نامه ۶۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۷۱**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۷۴**

فهرست الفبایی **۷۷**

فهرست نمادها **۸۰**

مقدمه

مطالعه ی نگاشت های خطی روی جبرهای عملگری $B(X)$ که حافظ ویژگی های خاصی از جمله طیف و پوچ توانی و رتبه هستند توجه تعدادی از ریاضیدانان دهه های اخیر را به خود جلب کرده است. نگاشت های خطی حافظ رتبه به طور شهودی توسط هو [۱] در [۴] مطالعه شدند وهمچنین اوملادیک [۲] و شمر [۳] در [۱۵] و کازما [۴] در [۷] بحث های مفصلی را برای توضیح کامل نگاشت های جمعی حافظ (یا کاهنده) رتبه داده اند.

در این رساله توصیفی جامع از نگاشت های مدولی حافظ رتبه یک را معرفی می کنیم و نگاشت های جمعی مدولی حافظ رتبه یک که اغلب پیچیده تر از نگاشت های مدولی اند را مورد توجه قرار می دهیم. مساله حافظ رتبه بودن مساله ای اساسی در مطالعه ی نگاشت های حافظ خطی است. برای مطالعه ی بیشتر در این زمینه به [۴] و [۱] مراجعه کنید. در [۱۲] و [۱۳] نگاشت های مدولی روی C^*-مدول های هیلبرت که حافظ ویژگی های خاصی هستند بررسی شده است. در [۱۱] توصیف کاملی از نگاشت های مدولی که عملگرهای مدولی رتبه یک را حفظ می کنند آورده شده است. C^*-مدول های هیلبرت ابتدا توسط کاپلانسکی [۵] [۶] معرفی شدند که به منظور اثبات درونی بودن اشتقاق ها روی AW^*-جبرهای از نوع I مورد استفاده

[۱] Hou
[۲] Omladic
[۳] Semrl
[۴] Kuzma
[۵] Kaplansky

قرار گرفتند. او ضرب داخلی فضاهای هیلبرت را به ضرب داخلی که مقادیرش از یک C^* - جبر یک دار است تعمیم داد. اگر H یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر نامتناهی البعد و $\mathcal{A}$ یک C^* - جبر باشد ، $\mathcal{A}$ - مدول هیلبرت $H \otimes \mathcal{A}$ که آن را با $H_\mathcal{A}$ نشان می دهیم نقش اساسی در نظریه C^* - مدول های هیلبرت بر عهده دارد که در [۱۳] به آن پرداخته شده است. $H_\mathcal{A}$ به طور شمارا تولید شده و یک پایه متعامد یکه اختیار می کند .از طرفی اگر E یک $\mathcal{A}$ - مدول هیلبرت با پایه شمارا باشد آن گاه E معادل با یک زیر مدول متمم دار کامل [۶] از $H_\mathcal{A}$ است. بنابراین کافی است فقط C^* - مدول هیلبرت $H_\mathcal{A}$ را در نظر بگیریم.

در این رساله به معرفی رده ای از نگاشت های مدولی می پردازیم که مشابه عملگر های رتبه یک روی یک فضای هیلبرت هستند. این رساله در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول به بیان مفاهیم و قضایای مورد نیاز در فصل های بعد خواهیم پرداخت که به طور عمده از کتاب

C. Lance, Hilbert C^*-Modules, Vol. 210, Cambridge University, 1994,

استفاده شده است. فصل دوم که برگرفته شده از مقاله

B. Meng, Rank preserving module maps, J. Math. Anal. Appl. 344 (2008) 1-8,

که در آن نگاشت های $\mathcal{A}$ - خطی حافظ رتبه یک روی بعضی مدول های هیلبرت را بررسی می کنیم. در فصل سوم که از مقاله

B. Meng, Additive preserving rank one maps on Hilbert C^*- module, preprint,

اخذ شده است نگاشت های جمعی حافظ رتبه یک را مطالعه می کنیم.

---

[۶] Fully complemented

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به تعریف C^* - مدول های هیلبرت و مجمو عه ی $\ell(E)$ می پردازیم. از مطالب این فصل در فصل های آینده استفاده می شود. در بخش اول به تعریف جبرهای باناخ و C^* -جبرها می پردازیم و در بخش دوم به تعریف فضای هیلبرت و $\mathcal{A}$ - مدول هیلبرت می پردازیم و چند مثال مربوطه را ارائه می دهیم. در بخش های بعد به تعریف $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرت $H_{\mathcal{A}}$ و تعریف و بررسی $\ell(E)$ می پردازیم و در نهایت $F(E)$ را تعریف کرده و با ارائه تعاریف وقضایایی در ادامه این رساله توجه خودمان را به C^* -مدول هیلبرت $H_{\mathcal{A}}$ معطوف می کنیم.

۱.۱ جبرهای باناخ و C^*-جبرها

در این بخش جبرهای باناخ و سپس C^* -جبرها را تعریف و بعضی قضیه های مورد نیاز در فصل های بعد را ارائه می دهیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ (که $\mathbb{F}$، $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است) باشد، آن گاه نگاشت $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ یک نرم روی X نامیده می شود هر گاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $x = ۰$ اگر و تنها اگر $\|x\| = ۰$،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،

۳) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

اگر $\|.\|$ یک نرم روی فضای برداری X باشد $(X, \|.\|)$ را فضای نرم دار [۱] گویند.

مثال ۲.۱. فضای $\mathbb{C}^k$ با نرم $\|X\| = (\sum_i |x_i|^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ به طوری که $X = (x_۱, ..., x_k)$ یک فضا ی باناخ است. همچنین $\mathbb{C}^k$ با نرم $\|X\| = \max_{۱\leq i\leq k} |x_i|$ که $x_i \in \mathbb{C}$ فضای باناخ است.

تعریف ۳.۱. یک جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ یک فضای برداری همراه با ضرب اسکالر و ضرب $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}; (a,b) \mapsto ab$ به طوری که به ازای هر $a, b, c \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{F}$

۱) $a(b+c) = ab + ac$،

۲) $(a+b)c = ac + bc$،

۳) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

تعریف ۴.۱. جبر $\mathcal{A}$ را یک دار نامیم هر گاه عنصری از $\mathcal{A}$ مانند e موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، $ae = ea = a$. در این صورت e را یکه می گوییم.

تعریف ۵.۱. جبر $\mathcal{A}$ را نرم دار گوییم هر گاه یک نرم مانند $\|.\|$ روی $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, (a, b \in \mathcal{A})$. اگر جبر نرم دار $(\mathcal{A}, \|.\|)$ فضای باناخ باشد، آن گاه $\mathcal{A}$ را جبر باناخ [۲] گوییم.

[۱] Normed space
[۲] Banach algebra

مثال ۶.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد، و مجموعه توابع مختلط کران دار روی X را با نماد $\ell^\infty(X)$ نشان دهیم، آن گاه $\ell^\infty(X)$ با اعمال جبری زیر به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}, f, g \in \ell^\infty(X)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad fg(x) = f(x)g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

یک جبر یک دار است. هم چنین با نرم $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$، $\ell^\infty(X)$ یک جبر باناخ است.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر نرم دار باشد. آن گاه تور $\{e_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{A}$ را یک همانی تقریبی چپ (به همین ترتیب، راست) برای $\mathcal{A}$ گوییم اگر به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ ، $e_i a \to a$ (به همین ترتیب، $a e_i \to a$). اگر $\{e_i\}$ هم همانی تقریبی راست و هم چپ باشد آن گاه آن را یک همانی تقریبی [۳] برای $\mathcal{A}$ گوییم.

تعریف ۸.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد یک برگشت [۴] روی $\mathcal{A}$ یک نگاشت $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$، $a \mapsto a^*$ است به طوری که به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}$ داریم

۱) $(a^*)^* = a$،

۲) $(ab)^* = b^* a^*$،

۳) $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha} a^* + b^*$.

تعریف ۹.۱. یک C^*- جبر [۵] یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ همراه با یک برگشت است به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $\|a^* a\| = \|a\|^۲$.

[۳] Approximate identity
[۴] Involution
[۵] C^*-algebra

تعریف ۱۰.۱. اگر $\mathcal{A}$ در همه شرایط C^*-جبر بودن به غیر از شرط باناخ بودن صدق کند آن گاه $\mathcal{A}$ را یک پیش C^*-جبر[۶] گوییم.

مثال ۱۱.۱. فرض کنید X یک فضای فشرده است. فضای توابع مختلط پیوسته روی X یعنی $C(X)$ یک C^*-جبر است که برگشت روی آن به صورت زیر تعریف می شود.

$$f^*(x) = \bar{f}(x) \quad (f \in C(X), x \in X).$$

تعریف ۱۲.۱. اگر $\mathcal{A}$ یك C^*-جبر غیر یك دار باشد و قرار دهیم $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ تعریف کنیم. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $(a, \mu), (b, \lambda) \in \mathcal{B}$ تعریف کنیم

۱) $(a, \mu) + (b, \lambda) = (a + b, \mu + \lambda)$،

۲) $\alpha(a, \mu) = (\alpha a, \alpha\mu)$،

۳) $(a, \mu).(b, \lambda) = (ab + a\lambda + \mu b, \mu\lambda)$،

۴) $\|(a, \mu)\| = \|a\| + |\lambda|$.

که $\mathcal{B}$ با اعمال بالا یك جبر باناخ یك دار با عنصر یك (۰،۱) است. $\mathcal{B}$ را یک دار شده $\mathcal{A}$ گوییم. اگر $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B};\ a \mapsto (a, \circ)$ تعریف کنیم بنابراین φ یك نگاشت نشاندن است. (φ خطی و یك به یك است و به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ و $\|\varphi(a)\| = \|a\|$) بنابراین $\mathcal{B}$ جبر باناخ یك دار است که $\mathcal{A}$ را به عنوان ایده آل شامل است.

نکته ۱۳.۱. اگر C^*-جبر $\mathcal{A}$ را مطابق تعریف ۱۲.۱ یك دار کنیم آن گاه با تعریف $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$، $(a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C})$، $\mathcal{B}$ یک *-جبر است اما همواره یك C^*-جبر نیست. زیرا اگر $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ و

[۶] Pre C^*-algebra

$(a, \lambda) = (-۲, ۱)$ بنابراین

$$\|(a,\lambda)\|^۲ = (\|a\| + |\lambda|)^۲ = (۲+۱)^۲ = ۹$$

ولی

$$\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| = \|(-۲,۱)(-۲,۱)\| = \|(\circ,۱)\| = ۱$$

پس $\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| \neq \|(a,\lambda)\|^۲$ و نرم تعریف شده روی $\mathcal{B}$ در شرط C^*-جبر صدق نمی کند.

گزاره ۱.۱۴. هر C^* - جبر یك همانی تقریبی دارد.

اثبات. برای اثبات به قضیه ۳.۱.۱ در [۱۴] مراجعه کنید. □

۱.۲ فضای هیلبرت و C^*-مدول های هیلبرت

در این بخش ابتدا به تعریف فضای ضرب داخلی و فضای هیلبرت و مدول و سپس تعریف $\mathcal{A}$-مدول ضرب داخلی روی C^*-جبر $\mathcal{A}$ و C^* مدول هیلبرت می پردازیم و با چند مثال این بخش را به پایان می بریم.

تعریف ۱.۱۵. (فضای ضرب داخلی) فرض کنید H یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است همراه با نگاشت $H \times H \to \mathbb{C}$ که $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ به طوری که به ازای هر $x,y,z \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم

۱) $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$،

۲) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$،

۳) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$،

۴) $x = \circ \Rightarrow \langle x,x\rangle = \circ$، ۵) $\langle x,x\rangle \geq 0$.

در این صورت به H یک فضای نیم ضرب داخلی گفته می شود که اگر عکس گزینه ۴ نیز درست باشد آن گاه H یک فضای ضرب داخلی [۷] نامیده می شود.

تعریف ۱۶.۱. در تعریف بالا اگر $\|x\| = \|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ تعریف کنیم، به راحتی می توان دید که $(H, \|.\|)$ یک فضای نرم دار است. اگر فضای ضرب داخلی $(H, \langle .,.\rangle)$ با نرم تعریف شده یک فضای باناخ باشد آن را فضای هیلبرت [۸] گوییم.

مثال ۱۷.۱. اگر روی $\mathbb{C}^k$ ضرب داخلی را به صورت $\langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i\bar{y_i}$ تعریف کنیم آن گاه $\mathbb{C}^k$ با نرم تعریف شده در ۲.۱ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۸.۱. اگر H یک فضای هیلبرت باشد و $x,y \in H$ بنابراین x,y را متعامد [۹] می نامیم اگر $\langle x,y\rangle = 0$ و با نماد $x \perp y$ نشان می دهیم. اگر $A,B \subseteq H$ می نویسیم $A \perp B$ هر گاه به ازای هر $x \in A$ و $y \in B$ داشته باشیم $x \perp y$.

تعریف ۱۹.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. خانواده $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را یک مجموعه متعامد یکه [۱۰] می نامیم هرگاه، $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ که $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$

تعریف ۲۰.۱. مجموعه متعامد یکه $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در فضای هیلبرت H را پایه متعامد یکه [۱۱] گوییم هرگاه به ازای هر $x \in H$، $x = \sum_{\alpha\in I}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$.

---
[۷] Inner product space
[۸] Hilbert spase
[۹] Orthogonal
[۱۰] Orthonormal set
[۱۱] Orthonormal base

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر روی $\mathbb{F}$ و M یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است. M را یک $\mathcal{A}$-مدول چپ [۱۲] گوییم هر گاه نگاشت $\mathcal{A} \times M \to M; (a, x) \mapsto ax$ وجود داشته باشد به طوری که

۱) به ازای هر a ثابت در $\mathcal{A}$ نگاشت $x \mapsto ax$ روی M خطی باشد.

۲) به ازای هر x ثابت در M نگاشت $a \mapsto ax$ روی $\mathcal{A}$ خطی باشد.

۳) $a_1(a_2x) = (a_1a_2)x,\ (a_1, a_2 \in \mathcal{A},\ x \in M)$

به طور مشابه $\mathcal{A}$- مدول راست [۱۳] نیز تعریف می شود. M را $\mathcal{A}$-مدول [۱۴] گوییم اگر M هم $\mathcal{A}$-مدول چپ و هم $\mathcal{A}$-مدول راست باشد و به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $x \in M$، $(ax)b = a(xb)$.

تعریف ۲۲.۱. اگر M یک $\mathcal{A}$-مدول، N زیر مجموعه ای ناتهی از M باشد. N را زیر مدول M گوییم هر گاه به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ و $x, y \in N$، $ax - y \in N$.

تعریف ۲۳.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یک دار باشد و $a \in \mathcal{A}$، طیف عنصر a که با $\sigma(a)$ نمایش داده می شود به صورت

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{F};\ a - \lambda 1 \notin Inv(\mathcal{A})\}$$

تعریف می شود که $Inv(\mathcal{A})$ مجموعه عناصر معکوس پذیر $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۲۴.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد. $a \in \mathcal{A}$ را یک عنصر مثبت گوییم هر گاه $a = a^*$ و $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$ و می نویسیم $a \geq 0$. مجموعه همه عناصر مثبت $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}_+$ نمایش می دهیم.

[۱۲] Left $\mathcal{A}$-module
[۱۳] Right $\mathcal{A}$-module
[۱۴] $\mathcal{A}$-module

تعریف ۲۵.۱. فرض کنید که $\mathcal{A}$ یك C^*- جبر است که لزوما جابه جایی و یك دار نیست. یك $\mathcal{A}$ - مدول ضرب داخلی [۱۵] یك $\mathcal{A}$ - مدول چپ E همراه با ضرب اسکالر

$$\lambda(ax) = (\lambda a)x = a(\lambda x); \ (x \in E, a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C})$$

و نگاشت $\mathcal{A} \to E \times E$ با ضابطه $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ است به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $x, y, z \in E$ داریم

۱) $\langle \alpha x + \beta z, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle z,y\rangle$،

۲) $\langle ax, y\rangle = a\langle x,y\rangle$،

۳) $\langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle^*$،

۴) $\langle x,x\rangle \geq 0, \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

شرط اول نشان می دهد که ضرب داخلی در متغیر اول خطی است.

گزاره ۲۶.۱. ضرب داخلی تعریف شده در ۲۵.۱ در متغیر دوم مزدوج $\mathcal{A}$ -خطی[۱۶] است.

اثبات. به ازای هر $x, y, z \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داریم

$$\langle y, \alpha x + \beta z\rangle = \langle \alpha x + \beta z, y\rangle^* = (\alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle z,y\rangle)^* =$$

$$\langle x,y\rangle^*\bar{\alpha} + \langle z,y\rangle^*\bar{\beta} = \langle y,x\rangle\bar{\alpha} + \langle y,z\rangle\bar{\beta}.$$

وهم چنین به ازای هر $x, y \in E, a \in \mathcal{A}$،

$$\langle x, ay\rangle = \langle ay, x\rangle^* = (a\langle y,x\rangle)^* = \langle y,x\rangle^* a^* = \langle x,y\rangle a^*.$$

[۱۵] Inner product $\mathcal{A}$-module

[۱۶] Conjugate-linear

□

تعریف ۲۷.۱. هر گاه E در همه شرایط ضرب داخلی و شرط $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ صدق کند به E یك $\mathcal{A}$ -مدول نیم ضرب داخلی[۱۷] گوییم.

تعریف ۲۸.۱. فضای توپولوژیکی M را موضعا اقلیدسی [۱۸] گوییم هر گاه به ازای هر نقطه $p \in M$ همسایگی بازی مانند $p \in U$ و همسایگی بازی مانند $\tilde{U}$ در $\mathbb{R}^n$ و یک همسانریختی $\varphi : U \to \tilde{U}(\subseteq \mathbb{R}^n)$ وجود داشته باشد به طوری که $\varphi(p) \in \tilde{U}$.

تعریف ۲۹.۱. فضای توپولوژیکی هاسدورف شمارای نوع دوم که موضعا اقلیدسی است را منیفلد توپولوژیکی [۱۹] نامیم.

لم ۳۰.۱. هر منیفلد اقلیدسی موضعا فشرده است.

اثبات. برای اثبات به تمرین ۱.۱ در [۹] مراجعه کنید. □

تبصره ۳۱.۱. فرض کنید H یك فضای اقلیدسی ثابت و X یک منیفلد اقلیدسی است. و برای هر $t \in X$ فرض کنید که H_t زیر فضایی از H است. فرض کنید E فضای همه توابع پیوسته ξ از X به H است به طوری که به ازای هر $t \in X$ داریم $\xi(t) \in H_t$، بنابراین E به طور طبیعی با یك ضرب داخلی $C(X)$ - مقدار نشانده می شود. اگر $\xi, \eta \in E$ آن گاه $\langle \xi, \eta\rangle$ را به صورت تابع $t \mapsto \langle \xi(t), \eta(t)\rangle_H$ تعریف می کنیم. همچنین E یك ساختار $C(X)$ - مدول دارد که برای $\xi \in E, f \in C(X)$، $\xi f(t) = \xi(t) f(t)$ تعریف می کنیم.

می توان همانند نرم اسکالر یک نرم $\mathcal{A}$ -مقدار [۲۰] روی E قرار دهیم.

[۱۷] Semi inner product $\mathcal{A}$-module
[۱۸] Locally Euclidean
[۱۹] Topological manifold
[۲۰] $\mathcal{A}$- valued norm

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید E یک $\mathcal{A}$-مدول ضرب داخلی باشد. $|x| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی E است که آن را نرم $\mathcal{A}$ -مقدار گوییم.

تعریف ۳۳.۱. یک $\mathcal{A}$ -مدول ضرب داخلی که نسبت به نرم $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ تام باشد یک $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرت یا یک C^* -مدول هیلبرت [۲۱] روی C^* -جبر $\mathcal{A}$ می نامیم.

مثال ۳۴.۱. اگر X یک منیفلد اقلیدسی فشرده باشد آن گاه بنا به مثال ۱۱.۱، E یك $C(X)$ -مدول هیلبرت است. در غیر این صورت بنا به ۳۰.۱، X موضعا فشرده است و در نتیجه E یک $C_\circ(X)$ -مدول هیلبرت است.

مثال ۳۵.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*- جبر است در این صورت $\mathcal{A}$ با ضرب تعریف شده به صورت $\langle a, b\rangle = ab^*$، $a, b \in \mathcal{A}$ یک $\mathcal{A}$- مدول هیلبرت است. چون نرم به دست آمده از ضرب داخلی همان نرم معمولی روی C^*-جبر $\mathcal{A}$ است.

تبصره ۳۶.۱ (تفاوت فضاهای هیلبرت با C^* -مدول های هیلبرت)

فرض کنیم که F یک زیر مدول بسته از $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرت E است. تعریف می کنیم

$$F^{\perp} = \{y \in E; \langle x, y\rangle = \circ, \forall x \in F\}.$$

بنابراین $F^{\perp}$ نیز یک زیر مدول بسته از E است. چون اگر (y_n) دنباله ای در $F^{\perp}$ باشد به طوری که $y_n \to y$ آن گاه

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lim y_n\rangle = \lim\langle x, y_n\rangle = \lim \circ = \circ$$

در نتیجه $y \in F^{\perp}$. اما E همیشه مساوی $F \oplus F^{\perp}$ نیست و معمولا $(F^{\perp})^{\perp}$ بزرگتر از F است. در حالی که در فضای هیلبرت $(F^{\perp})^{\perp} = F$. مثال زیر این واقعیت را نشان می دهد.

[۲۱] Hilbert C^*-module

مثال ۳۷.۱. فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده و $\mathcal{A} = C(X)$ باشد و Y زیر مجموعه ی ناتهی بسته ای از X است که متممش [۲۲]چگال در X است. فرض کنید $F = \{f \in \mathcal{A}; f(Y) = \{\circ\}\}$. در این حالت $F^{\perp} = \{\circ\}$ چون اگر $g \in F^{\perp}$ به ازای هر $f \in F\backslash\{\circ\}$، $\langle g, f\rangle = \bar{f}g = \circ$ و چون $\bar{f}(Y^c) \neq \circ$ بنابراین $g(Y^c) = \circ$ در نتیجه $g(X) = \circ$ بنابراین $g \equiv \circ$ و $F^{\perp} = \circ$ و در نتیجه $(F^{\perp})^{\perp} = \mathcal{A}$. پس $(F^{\perp})^{\perp}$ بزرگتر از F است.

لم ۳۸.۱. (نامساوی کوشی شوارتز) [۲۳] فرض کنید E یک $\mathcal{A}$ -مدول نیم ضرب داخلی است آن گاه به ازای هر $x, y \in E$ داریم

$$\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \leq \|\langle x, x\rangle\|\langle y, y\rangle.$$

اثبات. برای اثبات به گزاره ۱.۱ در [۸] مراجعه کنید. □

گزاره ۳۹.۱. اگر $a \in \mathcal{A}_+$ و $n \geq ۱$ آن گاه یک عنصر منحصر به فرد b در $\mathcal{A}_+$ موجود است به طوری که $a = b^n$.

اثبات. برای اثبات به گزاره ۳.۵ در [۳] مراجعه کنید. □

قضیه ۴۰.۱. اگر $\mathcal{A}$ یک C^* -جبر و $a \in \mathcal{A}$ آن گاه شرایط زیر معادلند

۱) $a \geq \circ$.

۲) به ازای عنصر خود الحاق b در $\mathcal{A}$، $a = b^۲$.

۳) به ازای x ی در $\mathcal{A}_+$، $a = x^*x$.

اثبات. برای اثبات به قضیه ۳.۶ در [۳] مراجعه کنید. □

[۲۲] Complement

[۲۳] Cauchy schwaz inequality

لم ۴۱.۱. برای $x, y \in E$ داریم $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\||y|$.

اثبات. بنا به نامساوی کوشی شوارتز و مثال ۳۵.۱،

$$\langle x, y\rangle^*\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2\langle y, y\rangle$$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2|y|^2$$

در نتیجه

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\||y|.$$

□

تبصره ۴۲.۱. ۱) اگر برای هر $x \in E$ بنویسیم $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ از لم ۳۸.۱ داریم،

$\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$ چون با گرفتن نرم از طرفین لم ۳۸.۱،

$\|\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle\| \leq \|\langle x, x\rangle\|\|\langle y, y\rangle\|$ و با توجه به اینکه در C^*-جبر $\|a^*a\| = \|a\|^2$ و با استفاده از خاصیت سوم $\mathcal{A}$ -مدول نیم ضرب داخلی ۲۷.۱ داریم، $\|\langle x, y\rangle\|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ در نتیجه

$\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|.$

۲) فرض کنید E یک $\mathcal{A}$ -مدول نیم ضرب داخلی است آن گاه $\|.\|$ یک نیم نرم [۳۴] روی E است. به آسانی نتیجه می گیریم که E یک $\mathcal{A}$ - مدول ضرب داخلی است یعنی $\|.\|$ یک نرم روی E است. زیرا، $\|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}} = \|x\| = 0$ در نتیجه $\langle x, x\rangle = 0$، و در نهایت $x = 0$ و هم چنین $x = 0$ نتیجه می دهد $\langle x, x\rangle = 0$ و بنابراین $\|x\| = 0$. این نتیجه می دهد$\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$،

$$\|\alpha x\| = \|\langle \alpha x, \alpha x\rangle\|^{\frac{1}{2}} = \|\bar{\alpha}\alpha\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|x\|.$$

[۳۴] Semi-norm

و هم چنین،

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

لم ۴۳.۱. اگر E یک $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرت باشد و $x \in E$ آن گاه،

$$\|x\| = \sup\{\|\langle x, y\rangle\|; y \in E, \|y\| \leq ۱\}.$$

اثبات. اگر B را مجموعه $\{\|\langle x, y\rangle\|; y \in E, \|y\| \leq ۱\}$ در نظر بگیریم با استفاده از ۴۲.۱ داریم $\sup B \leq \|x\|$. و اگر $y = \frac{x}{\|x\|}$ داریم $\|y\| = ۱$ و

$$\|\langle x, y\rangle\| = \|\langle x, \frac{x}{\|x\|}\rangle\| = \frac{\|\langle x, x\rangle\|}{\|x\|} = \|x\|$$

بنابراین $\sup B = \|x\|$. □

تبصره ۴۴.۱. برای نرم $\mathcal{A}$ -مقدار روی یک $\mathcal{A}$ -مدول ضرب داخلی داریم،

$$|x+y|^۲ = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$$

$$\leq |x|^۲ + |y|^۲ + ۲|\langle x, y\rangle| \leq |x|^۲ + |y|^۲ + \|x\||y| + \|y\||x|.$$

که این شرط نامساوی مثلث را به دست نمی دهد.

گزاره ۴۵.۱. نرمی که روی E تعریف کردیم E را تبدیل به یک $\mathcal{A}$ -مدول نرم دار [۲۵] می کند. در این حالت به ازای $a \in \mathcal{A}$ و $x \in E$ داریم $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$.

اثبات. اگر $c \in \mathcal{A}_+$ آن گاه به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، $aca^* \leq \|c\|aa^*$ بنابراین

$$\langle ax, ax\rangle = a\langle x, x\rangle a^* \leq \|\langle x, x\rangle\|aa^*$$

[۲۵] Normed $\mathcal{A}$-module

در نتیجه

$$\|ax\|^{۲} = \|\langle ax, ax\rangle\| \leq \|x\|^{۲}\|aa^*\| = \|x\|^{۲}\|a\|^{۲}.$$

که با جذر گیری از طرفین حکم به دست می آید. $\square$

تبصره ۴۶.۱. (روش ساختن $\mathcal{A}$ -مدول ضرب داخلی از یک $\mathcal{A}$ -مدول نیم ضرب داخلی معمولی)

فرض کنید E یک $\mathcal{A}$ -مدول نیم ضرب داخلی معمولی باشد، قرار می دهیم $N = \{x \in E; \langle x, x\rangle = ۰\}$. N زیر مدولی از E است، چون با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز N تحت جمع بسته است و اگر $a \in \mathcal{A}$ و $x \in N$ داریم

$$\langle ax, ax\rangle = a\langle x, x\rangle a^* = a۰a^* = ۰.$$

در نتیجه $ax \in N$. هم چنین به راحتی می توان نشان داد N بسته است. بنابراین یک ضرب داخلی $\mathcal{A}$ -مقدار خوش تعریف روی $\mathcal{A}$ -مدول خارج قسمتی $\frac{E}{N}$ موجود است که به صورت

$$\langle x + N, y + N\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in E)$$

تعریف می شود که با توجه به خاصیت های

$$(x + y) + N = (x + N) + (y + N),$$

$$a(x + N) = ax + N,$$

$$x + N = ۰ \Leftrightarrow x \in N.$$

از مدول خارج قسمتی، $\frac{E}{N}$ به یک $\mathcal{A}$ -مدول ضرب داخلی تبدیل می شود.

مثال ۴۷.۱. فرض کنید E یک $\mathcal{A}$ -مدول هیلبرت باشد، در این صورت $\mathcal{A}E$ در E چگال است زیرا

اگر (e_i) یک همانی تقریبی برای $\mathcal{A}$ باشد، به ازای هر $x \in E$ داریم

$$\langle x - e_i x, x - e_i x\rangle = \langle x, x\rangle - e_i\langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle e_i^* + e_i\langle x, x\rangle e_i^*$$

با توجه به این که $e_i^* = e_i$ و به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم $e_i a \to a, a e_i \to a$ نتیجه می گیریم که ضرب داخلی بالا به سمت ۰ میل می کند. که این نشان می دهد $\mathcal{A}E$ چگال در E است. بنا برفرض فوق، به ازای هر $x \in E$، $(e_i x)$ یک تور در $\mathcal{A}E$ است که $e_i x \to x$. پس $\overline{\mathcal{A}E} = E$ هم چنین اگر فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک دار است آن گاه به ازای هر $x \in E$ داریم $1x = x$. و اگر $\mathcal{A}$ یک دار نباشد و B را C^*-جبر یک دار شده $\mathcal{A}$ در نظر بگیریم، بنابراین E یک B-مدول هیلبرت است اگر $1x = x$ تعریف کنیم.

تعریف ۴۸.۱. (جمع مستقیم $\mathcal{A}$-مدول های هیلبرت)

فرض کنید $\{E_i\}_{i\in I}$ یک خانواده شمارای نامتناهی از $\mathcal{A}$-مدول های هیلبرت است. آن گاه $\oplus_{i\in I} E_i$ را مجموعه ی همه $x = (x_i)_{i\in I}$ که برای هر $i \in I$، $x_i \in E_i$. اگر $\sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle$ در $\mathcal{A}$ همگرا باشد $\oplus E_i$ را جمع مستقیم $\mathcal{A}$[۲۶] -مدول های هیلبرت نامیم. و برای $x = (x_i)_{i\in I}$ و $y = (y_i)_{i\in I}$ در جمع مستقیم بالا

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle$$

تعریف می کنیم. این ضرب در $\mathcal{A}$ همگراست زیرا فرض کنید که J یک زیر مجمو عه ی متناهی از I است آن گاه بنا به نامساوی کوشی شوارتز روی مجموع مستقیم متناهی $\oplus_J E_i$ داریم

$$\|\sum_{i\in J}\langle x_i, y_i\rangle\|^2 \leq \|\sum_{i\in J}\langle x_i, x_i\rangle\|\|\sum_{i\in J}\langle y_i, y_i\rangle\|$$

چون $\|\sum_{i\in J}\langle x_i, y_i\rangle\| = \|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$ و می توان با فرض این که زیر مجموعه ی اندیس J

[۲۶] Direct sum