دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

نامساوی های همراه نامساوی ینسن

نگارش:

سید جلال الدین حسینی

استاد راهنما: **دکتر فرض ا... میرزاپور**

استاد مشاور: **دکتر عباس رسولی**

شهریور ۱۳۸۹

إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

در این پایان نامه ضمن آشنایی با نامساوی ینسن نامساوی های دیگری که به نحوی از نامساوی ینسن گرفته شده‌اند مورد مطالعه قرار می گیرند. ما در این جا نامساوی های بر گرفته از نامساوی ینسن را بر روی توابع محدب، $m-$ محدب و $(\alpha, m)-$ محدب در فضای اندازه پیوسته و گسسته مورد بررسی قرار می دهیم و به کاربردهای آنها نیز اشاره خواهیم کرد.

فهرست مندرجات

فهرست مندرجات

پیش گفتار

همان طور که می دانید ریاضیات زبان طبیعت است و دانشمندان علوم مختلف برای بیان پدیده های طبیعی از زبان ریاضیات استفاده می کنند. در این بین یکی از مباحث ریاضی که کاربرد فراوانی دارد مبحث توابع می باشد. توابع به انواع مختلفی تقسیم بندی می شوند، توابعی که ما مورد مطالعه قرار می دهیم توابع محدب هستند. دانشمندان ریاضی با توجه به نیاز علوم دیگر توابع محدب را به اشکال مختلف گسترش داده‌اند و دو نمونه از آن توابع $m-$ محدب و $(\alpha, m)-$ محدب می باشند. همه انواع توابع محدب دارای یک خصلت مشترک می باشند و آن وجود نامساوی است. همان طور که می دانید برخی از پدیده های طبیعی بر اساس نامساوی بودن یک مقدار در دو مکان مختلف بوجود می آیند. به عنوان مثال وزش باد بر اساس نامساوی بودن دما در دو ناحیه مختلف بوجود می آید. لذا با توجه به این که نامساوی ها نقش مهمی در طبیعت ایفا می کنند، دانشمندان ریاضی نیز روی نامساوی ها تحقیقات و مطالعات فراوانی انجام داده اند. نامساوی ها در ریاضیات شاخه مهمی است به طوری که دانشمندان بزرگی مانند مینکوفسکی، هولدر، برنولی، ینسن و ... روی نامساوی ها مطالعه کرده و نامساوی هایی به نام خود ثبت کرده اند. در این میان ما نامساوی ینسن را مورد مطالعه قرار می دهیم که کاربردهای فراوانی در علوم اقتصاد، کنترل، بهینه سازی، تحقیق در عملیات و ... .دارد. ابتدا چند خطی در مورد زندگی نامه ینسن ارائه می دهیم.

ینسن که نام کامل او جان لودویگ ینسن است در ۸ می سال ۱۸۵۹ در ناکس کف دانمارک بدنیا آمد.[۱]

[۱] $John Ludwig Jensen$

پدر او شخصی بود که یک سری متنوع از پروژه ها را انجام می داد اما علیرغم تحصیلات خوب و استیل با فرهنگی که داشت، پروژه ها با شکست مالی همراه می شد. وقتی که ینسن جوان بود پدرش سمتی به عنوان کارفرمای یک منطقه در شمال سوئد به دست آورد. ینسن بعدها اظهار داشت که این سال های کودکیش بهترین سال های زندگیش بوده است.

وقتی که سمت پدرش به عنوان کارفرمای یک منطقه به پایان رسید، پدر ینسن به دانمارک برگشت و ینسن توانست مدرسه را در کپنهاگ به اتمام برساند. در سال ١٨٧٦ وی وارد دانشکده تکنولوژی شد و در آنجا یک سری از زیر شاخه های علمی از قبیل فیزیک، ریاضی و شیمی را مطالعه کرد. در میان این علوم، این ریاضی بود که توانست زندگی وی را تحت الشعاع قرار دهد و لذا ینسن علاقه خود به موضوعات دیگر را از دست داد. از این رو وی توانست همه توجه خود را صرف ریاضی کند که از همه موضوعات دیگر بیشتر دوست داشت . وی با حذف همه واحدهای درسی به جز ریاضی، انجام یک سری تحقیقات در زمینه ریاضی را شروع کرد و در حالی که او دانشجوی دانشکده تکنولوژی بود، اولین مقاله خود رادر زمینه ریاضیات چاپ کرد.

ینسن در زمینه تحقیقات ریاضی فردی خود آموخته بود و هرگز به کارهای دانشگاهی نپرداخت. در زمانی که ریاضی موضوع مورد علاقه وی بود او قبول کرد تا برای یک شرکت تلفن کار کند . قرارداد کاری وی بخاطر کم شدن علاقه وی به ریاضی نبود، بلکه راهی بود به منظور بدست آوردن پول ، تا از این طریق بتواند تحقیقات خود را کامل کند و خود را به عنوان یک ریاضی دان مطرح نماید.

قرار داد او با قسمت بین المللی کارخانه تلفن کپنهاگ بود و جای تعجب نداشت که وی با توانایی منحصربفرد خود تأ ثیر به سزایی در پیشرفت کارخانه داشت. این تأثیر هم به خاطر توانایی او و هم به خاطر زحماتی زیادی بود که برای کارخانه می کشید.

در سال ١٨٨٢ ، قسمت بین المللی کارخانه تلفن کپنهاگ، کارخانه اصلی تلفن کپنهاگ شد. کارخانه حداقل به خاطر توانایی بالای تکنیکی ینسن به شکوفایی رسید. او به کار خود در کارخانه تا سال ١٩٢۴ ادامه داد، درحالی که در سال ١٨٩٠ رئیس ساختمان تکنیک شده بود. در کل زمان دوره کاری خود وی فقط به عنوان یک ریاضیدان معمولی کار می کرد و فقط در اوقات فراغت خود به مطالعه ریاضی می پرداخت. به هر حال به

درجه بالایی از تخصص در ریاضی رسید در حالی که به عنوان مهندس تلفن هم مطرح شد .
ینسن به فرضیه ریمان کمک شایانی کرد و تئوری را ثابت و برای میتاگ – لفلر ارسال کرد که او نیز آن را در سال ۱۸۹۹ چاپ کرد. این تئوری خیلی مهم است اما به راه حل ریمان منجر نشد . وی حتی سری های نامتناهی یعنی تابع گاما و نامساوی های توابع محدب را مطالعه کرد. سرانجام این دانشمند بزرگ در ۵ مارچ ۱۹۲۵ در کپنهاگ دانمارک درگذشت.

سیدجلال الدین حسینی   شهریور ۱۳۸۹

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیوستگی و مشتق پذیری

توابع مورد نظر ما توابع $f : I \to R$ هستند که روی بازه ای از محور اعداد حقیقی تعریف شده اند. بازه مورد نظر ما می تواند بازه ای باز، نیم باز یا بسته، متناهی یا نامتناهی باشد.

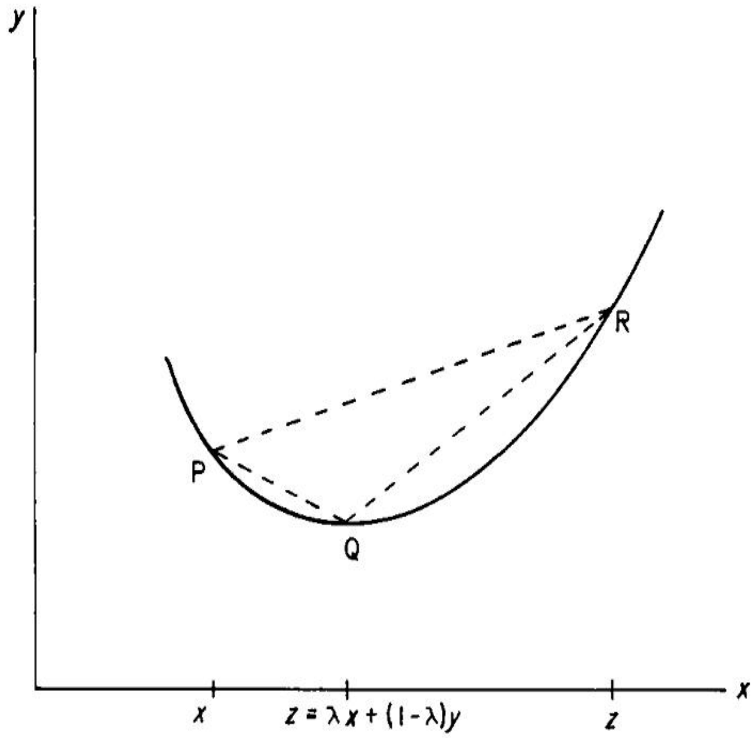
تعریف ۱.۱.۱ تابع $f : I \to R$ محدب گفته می شود اگر

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \tag{1}$$

برای هر $x, y \in I$ و λ از بازه $(0,1)$ باشد. اکیداً محدب گفته می شود هر گاه (۱) برای $x \neq y$ اکید باشد.

ازلحاظ هندسی نامساوی (۱) بدان معنی است که اگر P ، Q و R سه نقطه از نمودار تابع f باشند به طوری که Q بین P و R باشد، (مانند شکل) برحسب شیب موجود بین آنها داریم

$$m_{PQ} \leq m_{PR} \leq m_{QR} \tag{2}$$



در صورتی که f اکیداً محدب باشد، نامساوی اکید خواهد بود.

حال مثال های ساده ای از توابع محدب ارائه می دهیم. تابع $f(x) = x^{۲}$ روی $(-\infty, \infty)$ ، تابع $g(x) = \sin x$ در بازه $[-\pi, ۰]$ و تابع $h(x) = |x|$ روی $(-\infty, \infty)$. در حقیقت دو تابع اول اکیداً محدب هستند. اگر تابع $-f : I \to R$ ، محدب باشد، تابع $f : I \to R$ را مقعر نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ . تابع $f : R \to R$ را خطی گوییم هرگاه

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall \alpha, \beta, x, y \in R.$$

به راحتی می توان نشان داد f خطی است اگر و تنها اگر برای ثابت m ، $f(x) = mx$ باشد.

تعریف ۳.۱.۱ . تابع $f : I \to R$ را آفین گوییم، اگر در I به شکل $f(x) = mx + b$ باشد.[۱]

[۱] $affine$

روشن است که هر تابع آفین، محدب است، اما اکیداً محدب نیست. تابع محدب و متناهی روی بازه بسته $[a,b]$ به وسیله $M = \max\{f(a), f(b)\}$ از بالا کراندار است، از آنجا که برای هر $z = \lambda a + (1-\lambda)b$ در بازه

$$f(z) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \leq \lambda M + (1-\lambda)M = M$$

در ضمن از پایین نیز کراندار است. با نوشتن یک نقطه دلخواه به شکل $\frac{a+b}{2} + t$، آنگاه

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} - t\right)$$

یا

$$f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right),$$

با کاربرد M به عنوان کران بالایی، $-f[\frac{a+b}{2} - t] \geq -M$ در نتیجه

$$f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m$$

نشان خواهیم داد که در هر بازه بسته $[a,b]$ از نقاط داخلی از دامنه تابع، ثابتی مانند K موجود است به طوری که برای هر دو نقطه $x, y \in [a,b]$ داریم

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y| \qquad (3)$$

تابعی که در (۳) صدق کند، تابع لیپ شیتس گفته می شود.[۲]

قضیه ۴.۱.۱ : اگر $f : I \to R$ محدب باشد، آنگاه f در هر بازه بسته $[a,b]$ که شامل نقاط داخلی است در شرط لیپ شیتس صدق می کند. در نتیجه f در $[a,b]$ مطلقاً پیوسته و در I° پیوسته است.

برهان . اثبات در [۳] صفحه ۴ و ۵. □

قضیه ۵.۱.۱ : اگر $f : I \to R$ محدب (اکیداً محدب) باشد، آنگاه $f'_+(x)$ و $f'_-(x)$ موجود و در I° صعودی هستند.

[۲] *Lipschitz*

برهان . اثبات در [۳] صفحه ۵ و ٦. □

در حقیقت نتایج قضیه (۵.۱.۱) برای هر نقطه از I بر قرار است، نه فقط برای نقاط داخلی آن.

قضیه ٦.۱.۱ : اگر $f : I \to R$ روی بازه باز I محدب باشد، آنگاه مجموعه E که شامل نقاطی است که f' موجود نیست، شمارش پذیر است. به علاوه f' در $I \backslash E$ پیوسته است.

برهان . اثبات در [۳] صفحه ٦. □

قضیه ۷.۱.۱ : اگر $f : I \to R$ و $g : I \to R$ محدب باشند و $\alpha \geq ۰$ باشد، آنگاه $f + g$ و αf در I محدب هستند. یعنی مجموعه توابع محدب روی I تشکیل یک مخروطی می دهند.

برهان .: اثبات در [۳] صفحه ۱٦. □

۲.۱ توابع محدب در محور اعداد حقیقی

در این بخش انتگرال پذیری ریمان یا لبگ توابع محدب را مورد مطالعه قرار می دهیم.[۳]

قضیه ۱.۲.۱ : $f:(a,b)\to R$ محدب (اکیداً محدب) است، اگر و تنها اگر تابع صعودی (اکیداً صعودی) $g:(a,b)\to R$ و یک نقطه $c\in(a,b)$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in(a,b)$

$$f(x)-f(c)=\int_c^x g(t)dt. \tag{۴}$$

برهان . اثبات در [۳] صفحه ۱۰. □

قضیه بعدی به ما نشان می دهد که برای یک تابع مشتق پذیر، محدب بودن نتیجه می دهد که مشتق تابع صعودی است.

قضیه ۲.۲.۱ : فرض کنید f در (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه محدب (اکیداً محدب) است، اگر و تنها اگر f' صعودی (اکیداًصعودی) باشد.

برهان . اثبات در [۳] صفحه ۱۱. □

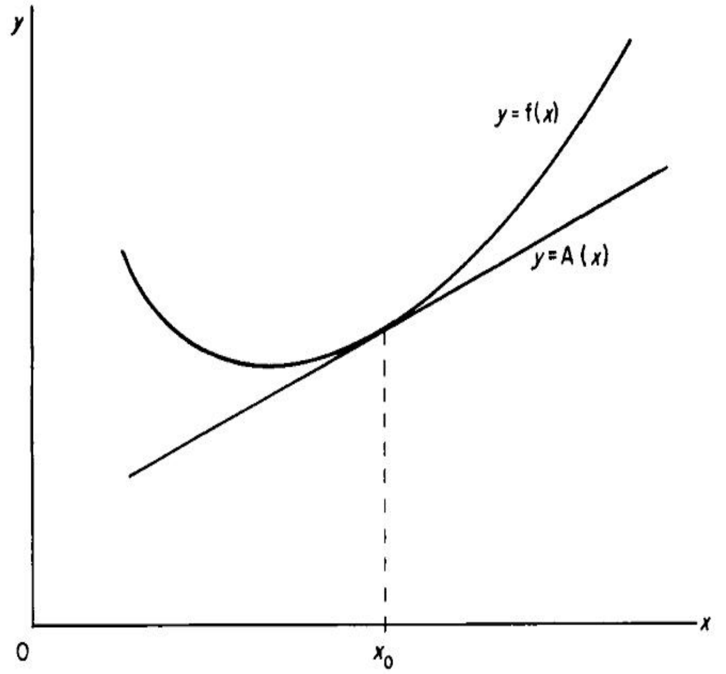
قضیه ۳.۲.۱ : فرض کنید f'' در بازه (a,b) موجود باشد. آنگاه f محدب است، اگر و تنها اگر $f''(x)\geq 0$ باشد و اگر در بازه (a,b)، $f''(x)>0$ باشد، آنگاه f روی بازه اکیداً محدب است.

برهان . اثبات در [۳] صفحه ۱۱. □

عکس جمله آخر از قضیه (۳.۲.۱) برقرار نیست به عنوان مثال تابع $f(x)=x^4$ را در بازه $(-1,1)$ در نظر بگیرید.

مشخصه بعدی که وابسته به توابع محدب است یک مشخصه هندسی است و آن این است که برای هر نقطه روی نمودار تابع محدب، یک خط وجود دارد که بالا یا زیر نمودار تابع است.

[۳] Lebesgue , Riemann



به طور قرار دادی می گوییم تابع f تعریف شده روی I در نقطه $x_\circ \in I$ دارای محمل است، اگر آنجا تابعی آفین $A(x) = f(x_\circ) + m(x - x_\circ)$ موجود باشد به طوری که $A(x) \leq f(x)$ برای هر $x \in I$. نمودار تابع محمل A خط محمل در $x_\circ$ برای f نامیده می شود.

قضیه ۴.۲.۱ : $f : (a,b) \to R$ محدب است، اگر و تنها اگر در هر $x_\circ \in (a,b)$ حداقل یک خط محمل برای f وجود داشته باشد.

برهان . اثبات در [۳] صفحه ۱۲. □

نتیجه بعدی یک مشخصه توابع محدب نیست، اما چون مربوط به قضیه قبل است آن را توضیح می دهیم.

قضیه ۵.۲.۱ : فرض کنید $f : (a,b) \to R$ محدب باشد. آنگاه f در $x_\circ$ مشتق پذیر است اگر وتنها اگر خط محمل f در نقطه $x_\circ$ منحصربه فرد باشد. در این مورد $A(x) = f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)$ این خط منحصربه فرد را فراهم می کند.

برهان . اثبات در [۳] صفحه ۱۲. □

۳.۱ توابع محدب در فضای خطی نرم دار

در بخش های قبلی توابع محدب را که روی خط حقیقی تعریف شده بودند مورد بررسی قرار دادیم. این مطلب بدیهی و درست است که فرض کنیم بیشتر نتایجی که در بخش های قبلی برای توابع محدب برقرار بودند در فضای $n-$ بعدی اقلیدس R^n نیز برقرار باشند. حال نتایجی را که قبلاً بدست آورده ایم در فضای نرمدار L مورد مطالعه قرار می دهیم.

تعریف تابع محدب را می توان به طور طبیعی به روی فضاهای خطی نرم دار تعمیم داد، فقط نیاز به محدب بودن دامنه تابع f داریم. این مطلب ما را مطمئن می کند که برای $x_1, x_2 \in U$ و $\alpha \in (0, 1)$ ، f همیشه روی پاره خط $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ تعریف خواهد شد.

قضیه ۱.۳.۱ : فرض کنید f تابعی محدب روی مجموعه باز و محدب U در فضای خطی نرم دار L باشد، اگر f در همسایگی نقطه $x_0 \in U$ از بالا کراندار باشد، آنگاه موضعاً کراندار است لذا هر $x \in U$ همسایگی دارد که f کراندار است.

برهان . اثبات در[۳] صفحه ۹۱. □

قضیه ۲.۳.۱ : فرض کنید f روی مجموعه باز و محدب $U \subset L$ محدب باشد، اگر f در همسایگی نقطه ای از U از بالا کراندار باشد، آنگاه f در U پیوسته است.

برهان . اثبات در[۳] صفحه ۹۳. □

قضیه ۳.۳.۱ : تابع f در یک مجموعه باز و محدب U از فضای خطی نرم دار L محدب است، اگر و تنها اگر f در هر نقطه از U دارای محمل باشد.

برهان . اثبات در[۳] صفحه ۱۰۸. □

۴.۱ مشتق پذیری توابع محدب

قضیه ۱.۴.۱ : فرض کنید f روی مجموعه باز و محدب $U \subset L$ تعریف شده باشد. اگر f در U محدب و در $x_\circ$ مشتق پذیر باشد، آنگاه برای $x \in U$ ،

$$f(x) - f(x_\circ) \geq f'(x)(x - x_\circ). \qquad (۵)$$

اگر f در سراسر U مشتق پذیر باشد، آنگاه f محدب است اگر و فقط اگر (۵) برای هر $x, x_\circ \in U$ برقرار باشد. به علاوه، f اکیداً محدب است اگر و فقط اگر نامساوی اکید باشد .

برهان . اثبات در[۳] صفحه۹۸. □

تعریف ۲.۴.۱ : تابع f' را صعودی یکنوا گوییم، اگر [۴]

$$[f'(x) - f'(y)][x - y] \geq \circ, \qquad \forall x, y \in U. \qquad (۶)$$

f' را اکیداً صعودی یکنوا گوییم اگر نامساوی (۶) برای $x \neq y$ اکید باشد.

قضیه ۳.۴.۱ : فرض کنید $f : U \to R$ در مجموعه محدب باز $U \subseteq L$ پیوسته و مشتق پذیر باشد، آنگاه f محدب (اکیداً محدب) است اگر و تنها اگر f' یکنوای (اکیداً یکنوا) صعودی باشد روی U .

برهان . اثبات در[۳] صفحه ۹۹. □

قضیه ۴.۴.۱ : فرض کنید f پیوسته مشتق پذیر باشد و مشتق دوم آن در سراسر مجموعه محدب باز $U \subseteq L$ موجود باشد، آنگاه f روی U محدب است اگر و تنها اگر $f''(x)$ برای هر $x \in U$ نامنفی معین باشد و اگر $f''(x)$ روی U مثبت معین باشد، آنگاه f اکیداً محدب است.

[۴] *monotone increasing*

برهان . اثبات در[۳] صفحه ۱۰۰. □

قضیه ۵.۴.۱ : اگر f روی مجموعه باز $U \subseteq R^n$ محدب باشد و همه مشتقات جزئی در $x_\circ \in U$ موجود باشد، آنگاه $f'(x_\circ)$ موجود است.

برهان . اثبات در[۳] صفحه۱۰۱. □

قضیه ۶.۴.۱ : فرض کنید f روی مجموعه باز و محدب $U \subseteq R^n$ تعریف شده باشد. اگر f روی U محدب باشد و گرادیان $\nabla f(x_\circ)$ موجود باشد، آنگاه برای $x \in U$ ،

$$f(x) - f(x_\circ) \geq \nabla f(x_\circ)(x - x_\circ)$$

اگر f محدب (اکیداً محدب) و $\nabla f(x)$ در تمام U موجود باشد، آنگاه ∇f صعودی یکنوا (اکیداً صعودی یکنوا) در U است. بعکس، اگر مشتقات جزئی f در U موجود و پیوسته باشند و اگر ∇f یکنوا(اکیداً یکنوا) باشد، آنگاه f محدب (اکیداً محدب) است.

برهان . اثبات در[۳] صفحه۱۰۲. □

قضیه ۷.۴.۱ : فرض کنید $f : U \to R$ در مجموعه باز $U \subseteq R^n$ محدب باشد، آنگاه f در U تقریباً همه جا مشتق پذیر است. [۵]

برهان . اثبات در[۳] صفحه۱۱۲. □

قضیه ۸.۴.۱ : فرض کنید f در مجموعه باز $U \subseteq R^n$ محدب باشد و E زیرمجموعه ای از U باشد به طوری که f روی آن مشتق پذیر باشد، آنگاه f' روی E پیوسته است.

برهان . اثبات در[۳] صفحه۱۱۷. □

[۵] $differentiable\ almost\ every\ where$

۵.۱ نامساوی ها

گفته می شود که آنالیز عمدتاً مطالعه نامساوی هاست. اگر چه ممکن است این مطلب غلو باشد، با این حال درست است، چرا که نامساوی ها نقش مهمی در آنالیز، ریاضیات کاربردی، جبر و هندسه بازی می کنند. هدف ما نشان دادن این مطلب است که تئوری توابع محدب نامساوی های مهمی در ریاضیات به وجود آورده است.

نامساوی پایه ای ما که توابع محدب را تعریف می کند به شکل زیر است

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

برای $\alpha \geq ۰, \beta \geq ۰$ و $\alpha + \beta = ۱$. به دنبال آن نامساوی زیر را برای $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ داریم

$$x^{\alpha} y^{\beta} \leq \alpha x + \beta y$$

دو نامساوی فوق در به وجود آوردن نامساوی های هولدر و مینکوفسکی استفاده می شوند. [۶]

حال چند نامساوی مهم را معرفی می کنیم. اولین نامساوی که معرفی خواهیم کرد نامساوی ینسن است. [۷]

قضیه ۱.۵.۱ (نامساوی ینسن): فرض کنید f در بازه باز (a,b) (می تواند نامتناهی نیز باشد)محدب باشد و $x_i \in (a,b)$ باشد. اگر $\alpha_i > ۰$ و $\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i = ۱$ باشد، آنگاه

$$f\left(\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i f(x_i). \tag{۷}$$

برهان . با توجه به قضیه (۴.۲.۱) داریم، f برای هر $x_\circ \in (a,b)$ دارای محمل خطی است، لذا برای هر $x_\circ$ عددی مانند m وابسته به $x_\circ$ وجود دارد به طوری که $f(x) \geq f(x_\circ) + m(x - x_\circ)$. به خصوص اگر $x_\circ = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i$ باشد، آنگاه برای $i = ۱, ۲, ..., n$

$$f(x_i) \geq f(x_\circ) + m(x_i - x_\circ)$$

[۶] $Holder$, $Minkowski$

[۷] $Jensen's\ Inequality$

حال با ضرب α_i به طرفین نامساوی فوق جمع بستن داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) &\geq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m(x_i-x_0)\\ &= f(x_0)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+m(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i-x_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i).\end{aligned}$$

(۸)

طبق فرض داشتیم $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ لذا به نتیجه مورد نظر می رسیم، یعنی

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) &\geq f(x_0)+m(x_0-x_0)\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) &\geq f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i).\end{aligned}$$

□

نامساوی میانگین هندسی – میانگین حسابی $(GM-AM)$.[8]

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\leq\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n). \tag{۹}$$

که برای $x_i\geq 0$ برقرار است و n عددی صحیح و مثبت است. حالت کلی آن را با در نظر گرفتن $\alpha_i=1/n$ اثبات می کنیم.

قضیه ۲.۵.۱ : اگر $x_i\geq 0$ و $\alpha_i>0$ و $\sum_1^n\alpha_i=1$ ، آنگاه

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\leq\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n \tag{۱۰}$$

برهان . کافی است (۱۰) را وقتی که $x_i>0$ برای هر i ، اثبات کنیم، قرار می دهیم $y_i=\log x_i$، آنگاه داریم

$$x_i^{\alpha_i}=\exp(\alpha_i\log x_i)=\exp(\alpha_iy_i)$$

[8] $GM-AM\ Inequality$

از آنجا که $f(t) = e^t$ در $(-\infty, \infty)$ محدب است، با استفاده از قضیه (۱.۵.۱) می توانیم بنویسیم

$$\prod_{1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum \alpha_i y_i\right) = f\left(\sum \alpha_i y_i\right)$$
$$\leq \sum \alpha_i f(y_i) = \sum \alpha_i \exp(y_i) = \sum \alpha_i x_i.$$

اثبات به اتمام می رسد.

□