دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی

همولوژی دوری پایا برای جبرهای هاپف

استاد راهنما:
دکتر قربانعلی حقیقت دوست

استاد مشاور:
دکتر عادل رضایی

پژوهشگر:
زهرا خانبابایی

۱۳۸۹

چکیده :

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده و در آن به محاسبه ی همولوژی دوری پایا برای یک جبر هاپف پرداخته شده است . فصل اول شامل تعاریف مقدماتی است ،در این فصل مقدمات نظریه ی جبر های هاپف و نظریه ی همولوژی و همولوژی دوری بیان شده است .فصل دوم شامل مقدمات مربوط به محاسبه ی همولوژی دوری پایا برای یک جبر هاپف هم ـجابجایی است و پس از بیان این مقدمات همولوژی دوری پایا برای یک جبر هاپف هم ـجابجایی محاسبه می گردد . در فصل سوم مقدمات مربوط به محاسبه ی همولوژی دوری پایا برای یک جبر هاپف جابجایی بیان و همولوژی دوری پایابرای جبرهای هاپف جابجایی محاسبه شده است .

فهرست مندرجات

پیشگفتار

یکی از کشفیات بزرگ علمی قرن بیستم کشف مکانیک کوانتومی توسط هایزنبرگ در سال ۱۹۲۵ بود. از دیدگاه ریاضی، عبور از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی به منزله گذر از جبر جابجایی مشاهده‌پذیرهای کلاسیک به جبر ناجابجایی مشاهده‌پذیرهای کوانتومی است. در حدود ۵۰ سال بعد، ریاضیدان فرانسوی و برنده مدال فیلدز، آلن کُن دریافت که در هندسه و توپولوژی نیز می توان چنین راهی را پیمود. نظریه جدید ایجاد شده قابلیت های شگرفی حتی در حل مسائل کلاسیک حل نشده هندسه، جبر و توپولوژی دارد. نظریه کن، که امروزه عموماً هندسه ناجابجایی خوانده می شود، ریشه های بسیار مستحکمی در قسمتهای متنوع از ریاضیات همچون آنالیز تابعی ، جبرعملگرها روی فضاهای هیلبرت، نظریه ، توپولوژی جبری و هندسه دیفرانسیل دارد.

کشف عمده‌ای که آلن کن در سال ۱۹۸۱ به آن نائل شد، کشف کوهمولوژی دوری به عنوان معادل ناجابجایی نظریه همولوژی درام و به عنوان فضای برد یک نظریه K و K ی همولوژیک بود.

قضایای بنیادین اندیس اتیه — سینگر در ایجاد و گسترش هندسه ناجابجایی نقش عمده ای ایفا کرده است. یکی از این قضایا قضیه اندیس موضعی کن—موسکوویچی است.

گستره نفوذ هندسه ناجابجایی به فیزیک نیز رسیده است. کارهای کن و همکاران او روی نظریه یانگ—میلز ناجابجایی، نظریه استاندارد ذرات بنیادی توجه بسیاری از فیزیک دانان را به خود جلب کرده است. این علاقه و توجه درسالهای اخیر با کشف روابط جالبی بین فشرده سازی نظریه ریسمان ، نظریه M ، هندسه ناجابجایی و چنبره های ناجابجایی (توسط کن—داگلاس—شوارتس) دوچندان شده است.

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم بنیادی

۱–۱ جبرهای هاپف

۱.۱.۱ تعریف . یک جبر یکدار A روی میدان k، با سه تایی (A, μ, η) مشخص می شود که در آن A یک $k-$ فضای برداری می باشد، $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ و $\eta : k \longrightarrow A$ نگاشتهای $k-$ خطی هستند چنانکه‌روابط زیر برقرار باشند:

خاصیت شرکت پذیری $\quad \mu \circ (I_A \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes I_A)$

خاصیت یکانی $\quad \mu \circ (I_A \otimes \eta) = I_A = \mu \circ (\eta \otimes I_A)$

برای هر جبر A، جبر متضاد A^{op} به عنوان یک جبر با همان فضای برداری A اما

حاصلضرب $\mu_{A^{op}} := \mu_A \circ \tau$ تعریف می شود که در آن τ عملگر فیلیپ می باشد.

$$\tau : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A \quad , \quad \tau(a \otimes b) = b \otimes a$$

گوییم جبر A جابجایی است ،اگر $A = A^{op}$.

۲.۱.۱ تعریف . فرض کنید $V^{\otimes \circ} = K$ و $V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ جمع مستقیم $T(V) := \bigoplus_{n=\circ}^{\infty} V^{\otimes n}$ با ضرب زیرتشکیل یک جبر می دهد که به آن جبر تانسوری از V میگوییم .

$$x_n y_k := x_n \otimes y_k \quad , \quad x_n \in V^{\otimes n} \quad , \quad y_k \in V^{\otimes k}$$

۳.۱.۱ تعریف . یک k ـفضای برداری C همراه با نگاشتهای k ـخطی $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ و $\varepsilon : C \longrightarrow k$ را یک هم ـجبرنامیم هر گاه در روابط زیر صدق کنند :

خاصیت هم ـشرکت پذیری $\quad (I_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I_C) \circ \Delta$

خاصیت هم ـیکانی $\quad (I_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I_C = (\varepsilon \otimes I_C) \circ \Delta$

هم جبر C را با سه تایی (C, Δ, ε) نشان می دهند و به Δ هم ضرب و به ε هم یکه گویند . هم جبر C هم ـجابجایی نامیده میشود هرگاه داشته باشیم $\tau\Delta = \Delta$ که در آن τ عملگر فیلیپ است.

قرارداد : فرض کنید (C, Δ, ε) یک هم $-$ جبر و $c \in C$. عنصر $\Delta(c) \in C \otimes C$

به صورت مجموع متناهی

$$\Delta(c) = \sum_i c_{۱i} \otimes c_{۲i}$$

می باشد که این نمایش $\Delta(c)$ منحصربفرد نیست . برای سادگی با حذف اندیس i خواهیم داشت:

$$\Delta(c) = c_{(۱)} \otimes c_{(۲)}$$

این نمادگذاری به نمادگذاری سویدلر معروف است. برطبق این قرارداد داریم :

$$\Delta^{(n)}(c) = \sum_{(c)} c_{(۱)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)} \otimes c_{(n+۱)}$$

برطبق این نمادگذاری خاصیتهای هم – شرکت پذیری و هم – یکانی به این صورت بیان می شوند :

$$\sum_{(c)} c_{(۱)_{(۱)}} \otimes c_{(۱)_{(۲)}} \otimes c_{(۲)} = \sum_{(c)} c_{(۱)} \otimes c_{(۲)_{(۱)}} \otimes c_{(۲)_{(۲)}}$$
$$\sum_{(c)} \varepsilon(c_{(۱)})c_{(۲)} = c = \sum_{(c)} c_{(۱)}\varepsilon(c_{(۲)})$$

۴.۱.۱ تعریف . اگر C و D دو هم – جبر و $g : C \longrightarrow D$ یک نگاشت خطی باشد g یک همریختی از هم – جبرها گفته می شود هرگاه :

$$g(c)_{(۱)} \otimes g(c)_{(۲)} = g(c_{(۱)}) \otimes g(c_{(۲)})$$

$$\varepsilon_D(g(c)) = \varepsilon_C(c)$$

۵.۱.۱ تعریف . فرض کنید C یک هم ـجبر و A یک جبر یکه باشد .اگر $f,g:C\longrightarrow A$ دو نگاشت k ـخطی باشند ضرب پیچشی f,g را با $f*g$ نشان میدهیم وبصورت زیر معرفی می کنیم :

$$(f*g)(c)=\mu\circ(f\otimes g)\Delta(c)$$

۶.۱.۱ تعریف . فرض کنید A یک جبر باشد. یک فضای برداری N همراه با نگاشت k ـخطی $\psi:A\otimes N\longrightarrow N$ که در روابط زیر صدق می کند را یک A ـمدول چپ می نامیم :

$$\psi\circ(I_A\otimes\psi)=\psi\circ(\mu\otimes I_N)$$

$$\psi\circ(\eta\otimes I_N)=I_N$$

۷.۱.۱ تعریف . فرض کنید C یک هم ـجبر باشد . یک فضای برداری M همراه با یک نگاشت k ـخطی $\rho:M\longrightarrow C\otimes M$ را یک C ـهم ـمدول چپ نامیم هر گاه در روابط زیر صدق کند :

$$(\Delta\otimes I_M)\circ\rho=(I_C\otimes\rho)\circ\rho$$

$$(\varepsilon \otimes I_M) \circ \rho = I_M$$

۸.۱.۱ تعریف . فرض کنیم M و N دو C ـهم ـمدول چپ باشند . نگاشت k ـخطی $f : M \longrightarrow N$ رایک نگاشت C ـهم ـخطی گویند هرگاه :

$$\rho_N \circ f = (I_C \otimes f) \circ \rho_M$$

۹.۱.۱ تعریف . به پنج تایی $(\mathcal{B}, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ شامل جبر یکدار $(\mathcal{B}, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ و هم زمان هم ـجبر $(\mathcal{B}, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ را یک جبر دوطرفه نامیم هر گاه Δ و ε مورفیسمهای جبری باشند و μ و η مورفیسمهای هم ـجبری باشند.

۱۰.۱.۱ تعریف . یک نگاشت k ـخطی $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ از یک جبر دوطرفه $\mathcal{H}$ را یک نگاشت هم ـمعکوس یامتقاطر نامیم هر گاه :

$$S * I = I * S = \eta\varepsilon$$

که در آن $\eta : k \longrightarrow \mathcal{H}$ نگاشت جبری یکه است. از نماد سویدلر نتیجه می شود :

$$\sum_{(h)} S(h_{(۱)})h_{(۲)} = \sum_{(h)} h_{(۱)}S(h_{(۲)}) = \varepsilon(h)۱ \qquad h \in \mathcal{H}$$

۱۱.۱.۱ تعریف . یک جبر دوطرفه همراه با یک نگاشت متقاطررا جبر هاپف می نامیم .

۱۲.۱.۱ قضیه . نگاشت متقاطر S از جبر هاپف $\mathcal{H}$ یک آنتی همو مورفیسم جبری و یک آنتی هومورفیسم هم ـجبری است.یعنی :

$$\text{آنتی همو مورفیسم} \quad S(۱) = ۱ \quad \text{و} \quad S(h_۱ h_۲) = S(h_۲)S(h_۱)$$

$$\text{آنتی همو مورفیسم هم ـجبری} \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon \quad \text{و} \quad \Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$$

از نماد سویدلر نتیجه می شود که :

$$\Delta(S(h)) = \tau \circ (S \otimes S) \sum_{(h)} h^{(۱)} \otimes h^{(۲)}$$
$$\Rightarrow \sum_{S(h)} (S(h))^{(۱)} \otimes (S(h))^{(۲)} = \sum_{(۲)} S(h^{(۲)}) \otimes S(h^{(۱)})$$

اثبات. مرجع [۵]را ببینید. □

۱۳.۱.۱ تعریف . فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک جبر هاپف باشد . جبر A یک $\mathcal{H}$

ـهم ـمدول جبرچپ نامیده می شود هر گاهA یک $\mathcal{H}$ ـهم ـمدول چپ با نگاشت $\rho : A \longrightarrow \mathcal{H} \otimes A$ و هم زمان ρ یک همومورفیسم جبری باشد .

۱۴.۱.۱ تعریف . فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک جبر هاپف باشد . هم ـجبر C یک $\mathcal{H}$ ـمدول هم ـجبر چپ نامیده می شود هر گاهC یک $\mathcal{H}$ ـمدول چپ بانگاشت $\psi : \mathcal{H} \otimes C \longrightarrow C$ و هم زمان ψ یک همومورفیسم هم ـجبری باشد .

۱۵.۱.۱ قضیه . برای هر جبر هاپف $\mathcal{H}$ عبارات زیر معادل اند :

۱.نگاشت متقاطر S از $\mathcal{H}$ به عنوان نگاشت خطی از $\mathcal{H}$ معکوس پذیر است.

۲.جبر دو طرفه‌ی $\mathcal{H}^{op}$ یک جبر هاپف است . $(\mu_{\mathcal{H}^{op}} = \mu_{\mathcal{H}} \circ \tau)$

۳.جبر دو طرفه‌ی H^{cop} یک جبر هاپف است. $(\Delta_{\mathcal{H}^{cop}} = \tau \circ \Delta_{\mathcal{H}})$

اثبات. مرجع [۱۰]را ببینید. □

۱۶.۱.۱ گزاره . نگاشت متقاطر در صورت وجود منحصربفرداست واگر جبر هاپف جابجایی یا هم ـجابجایی باشد،$S^{۲} = I$.

اثبات. برای اثبات قسمت اول به مرجع [۱۰]مراجه کنید.برای اثبات قسمت دوم از قضیه ی قبل استفاده میکنیم.اگر جبرهاپف $\mathcal{H}$ جابجایی باشد ، $\mathcal{H}^{op} = \mathcal{H}$ واگر $\mathcal{H}$ هم ـجابجایی باشد ، $\mathcal{H}^{cop} = \mathcal{H}$. لذا از قضیه ی ۱۵.۱.۱ نتیجه می شود که Sمعکوس پذیر

است. $\square$

۱۷.۱.۱ تعریف . فرض کنیم $\mathcal{B}$ یک جبر دوطرفه باشد.عنصر غیر صفر $g \in \mathcal{B}$را عنصر شبه گروه می نامندهرگاه $\Delta(g) = g \otimes g$.عنصر $x \in \mathcal{B}$ را اولیه می نامند هرگاه $\Delta(x) = x \otimes ۱ + ۱ \otimes x$.اگر gعنصر شبه گروه باشداز خاصیت هم ـیکه نتیجه می شود که :

$$(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(g) = (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(g) = I(g)$$

$$\Longrightarrow (I \otimes \varepsilon)(g \otimes g) = (\varepsilon \otimes I)(g \otimes g) = g$$

$$\Longrightarrow g\varepsilon(g) = \varepsilon(g)g = g \qquad \Longrightarrow \varepsilon(g) = ۱$$

همچنین از خاصیت نگاشت هم ـمعکوس داریم :

$$(S * I)(g) = (I * S)(g) = \mu(\varepsilon(g))$$

$$\Longrightarrow \mu \circ (S \otimes I)\Delta(g) = \mu \circ (I \otimes \Delta)(g) = \varepsilon(g) \cdot ۱_B$$

$$\Longrightarrow S(g)g = gS(g) = ۱ \qquad \Longrightarrow g^{-۱} = S(g)$$

مجموعه ی تمامی عناصر شبه گروه $\mathcal{B}$ باعمل ضرب یک گروه تشکیل می دهند.

۱۸.۱.۱ قضیه . اگر $\mathcal{B}$ یک جبر دوطرفه باشد حاصلضرب دو عنصرشبه

گروه،یک عنصرشبه گروه است واگر x و y عناصر اولیه ی $\mathcal{B}$ باشند آنگاه $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = ۰$ وعنصر $[x, y] := xy - yx$ نیز اولیه است.

اثبات. مرجع [۱۰]را ببینید. $\square$

۱۹.۱.۱ تعریف . هر همومورفیسم جبری $\delta : \mathcal{H} \longrightarrow k$ را یک مشخصه از جبر هاپف $\mathcal{H}$ می نامیم ، یعنی :

$$\delta(h_۱ h_۲) = \delta(h_۱)\delta(h_۲) \quad \text{و} \quad \delta(۱_{\mathcal{H}}) = ۱_k$$

۲۰.۱.۱ تعریف . فرض کنید M یک $\mathcal{H}$ ـمدول چپ باشدو δ یک مشخصه ازجبر هاپف $\mathcal{H}$ باشد،فضای پایای M (نسبت به δ) عبارت است ازkـمدول زیر

$$M_{\mathcal{H}} = M \setminus span\{hm - \delta(h); h \in \mathcal{H}, m \in M\} = k_\delta \otimes \mathcal{H}$$

۲۱.۱.۱ تعریف . فرض کنید M یک هم ـمدول چپ باشد با$\rho : M \longrightarrow \mathcal{H} \otimes M$ و $\sigma \in H$ یک عنصر شبه گروه باشد ، فضای هم ـپایای M عبارت

است از

$$M^{co\mathcal{H}} = \{m \in M; \rho(m) = \sigma \otimes m\} = Hom_{\mathcal{H}}(k_\sigma, \mathcal{H})$$

این مفاهیم به طور معمول برای $\delta = \varepsilon$ به عنوان نگاشت هم ـیکه‌ی جبر هاپف $\mathcal{H}$ و $\sigma = 1$ به عنوان یکه‌ی جبرهاپف $\mathcal{H}$ بکار برده می شود.

۱ــ۲ همولوژی

۱.۲.۱ تعریف . فرض کنیم R یک حلقه جابجایی در نظر باشد و M و N دو $R-$ مدول دلخواه باشند .مجموعه ی $Hom_R(M,N) := \{\phi : M \longrightarrow N \mid$ همریختی $-R$ $\phi\}$ با روابط زیرتشکیل یک $R-$ مدول می دهد .

$$\forall\ \phi, \psi \in Hom_R(M,N)\ ;\ (\phi+\psi)(m) := \phi(m) + \psi(m)$$

$$\forall\ r \in R\ ,\ \forall\ \phi \in Hom_R(M,N)\ ;\ (r.\phi)(m) := r.\phi(m)$$

۲.۲.۱ تعریف . فرض کنید M یک $R-$ مدول بوده و $f : N \longrightarrow N'$ یک $R-$همریختی باشد ، در اینصورت f یک‌همریختی بصورت زیر القا می کند :

$$f_* : Hom_R(M,N) \longrightarrow Hom_R(M,N')$$

$$f_*(\phi) := f \circ \phi$$

۱.۲.۳ تعریف . فرض کنید N یک $R-$مدول بوده و $\mu : M \longrightarrow M'$ یک $R-$همریختی باشد ، در اینصورت μ یک همریختی بصورت زیر القا می کند :

$$\mu^* : Hom_R(M', N) \longrightarrow Hom_R(M, N)$$

$$\mu^*(\phi) := \phi \circ \mu$$

۱.۲.۴ گزاره . فرض کنید N یک $R-$مدول باشد ، در اینصورت یکریختی های زیر برقرارند :

$$Hom_R(N, R) \cong N \cong Hom_R(R, N)$$

اثبات. مرجع [٦] را ببینید. □

۱.۲.۵ گزاره . فانکتور $Hom_R(M, -)$ یک فانکتور همگرد و فانکتور $Hom_R(-, N)$ یک فانکتور ناهمگرد بین کاتگوری $R-$مدولها می باشد .

اثبات. مرجع [٦] را ببینید. □

۱.۲.۶ تعریف . خانواده $\{M_i\}_{i\in I}$ (I حداکثر شمارشپذیر) همراه با $R-$ همریختی های $\{f_i : M_i \longrightarrow M_{i-1}\}_{i\in I}$ را یک دنباله از $R-$همریختی ها گوییم هر گاه: $f_i \circ f_{i+1} = 0$. این دنباله را دقیق گوییم هر گاه: $Im\ f_{i+1} = ker\ f_i$.

$$\cdots \to M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \to \cdots$$

۱.۲.۷ تعریف . هر دنباله بفرم

$$0 \to M \overset{\phi}{\to} N \overset{\psi}{\to} P \to 0$$

را یک دنباله کوتاه گویند .

۱.۲.۸ تعریف . دو دنباله کوتاه

$$0 \to M \overset{\phi}{\to} N \overset{\psi}{\to} P \to 0$$

$$0 \to M' \overset{\phi'}{\to} N' \overset{\psi'}{\to} P' \to 0$$

را یکریخت گویند هرگاه یکریختی های $\alpha : M \longrightarrow M'$ و $\beta : N \longrightarrow N'$ و $\gamma : P \longrightarrow P'$ موجود باشند چنانکه نمودار زیر جابجایی باشد :

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & \rightarrow & M & \overset{\phi}{\rightarrow} & N & \overset{\psi}{\rightarrow} & P & \rightarrow & \circ \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ \circ & \rightarrow & M' & \overset{\phi'}{\rightarrow} & N' & \overset{\psi'}{\rightarrow} & P' & \rightarrow & \circ \end{array}$$

۹.۲.۱ تعریف . فانکتور $T : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R')$ را دقیق گویند هرگاه ، هر دنباله دقیق کوتاه را به یک دنباله دقیق کوتاه تصویر کند .

۱۰.۲.۱ تعریف . فانکتور (همگرد یا ناهمگرد) $F : Mod(R) \longrightarrow Mod(R')$ را یک فانکتور جمعی گویند هرگاه $F : \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R'}(F(M),F(N))$: یک $\mathbb{Z}-$همریختی باشد .

۱۱.۲.۱ مثال . فانکتورهای $Hom_R(M,-)$ و $Hom_R(-,N)$ فانکتورهای جمعی هستند .

۱۲.۲.۱ تعریف . دنباله کوتاه

$$\circ \rightarrow M \overset{\phi}{\rightarrow} N \overset{\psi}{\rightarrow} P \rightarrow \circ$$

رایک دنباله شکافتنی نامیم هرگاه همریختی های $\sigma : N \longrightarrow M$ و $\tau : P \longrightarrow N$ موجود

باشد چنانکه :

$$\sigma\phi = 1_M \quad , \quad \phi\sigma + \tau\psi = 1_N \quad , \quad \psi\tau = 1_P$$

۱۳.۲.۱ گزاره . هر دنباله شکافتنی دقیق است .

اثبات. مرجع[٦] را ببینید. □

۱۴.۲.۱ گزاره . فرض کنید F یک فانکتور جمعی باشد ، در اینصورت F هر دنباله شکافتنی را به یک دنباله شکافتنی تصویر می کند . همچنین $F(M \oplus N) = F(M) \oplus F(N)$.

اثبات. مرجع [٦] را ببینید. □

۱۵.۲.۱ تعریف . فرض کنید M یک R−مدول باشد . دنباله

$$P_* : \quad \cdots \to P_l \xrightarrow{\delta_l} P_{l-1} \xrightarrow{\delta_{l-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$

همراه با همریختی $\delta_0 : P_0 \to M$ را یک رزولوشن تصویری از M گویند هرگاه :

۱) R−مدولهای $\{P_l\}_{l\in\mathbb{N}_0}$ تصویری باشند .

۲) دنباله

$$P_0 \longrightarrow M : \quad \cdots \to P_l \xrightarrow{\delta_l} P_{l-1} \xrightarrow{\delta_{l-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$