نام خانوادگی: غلامی　　　　نام: مریم

عنوان پایان‌نامه: روش‌های گالرکین و هم‌محلی برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم دونقطه‌ای با استفاده از پایه‌های سینک

استاد راهنما: دکتر حسین خیری
استاد مشاور: دکتر محمد چاپچی رقیمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی کاربردی　　گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: پیام نور مرکز تبریز　　دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی:شهریور ۱۳۹۰　　تعداد صفحه: ۷۶

کلیدواژه‌ها: تابع سینک، هم‌محلی، گالرکین، تکین، غیرخطی

چکیده این پایان‌نامه، به بحث درمورد روش‌های گالرکین و هم‌محلی با استفاده از توابع پایه سینک، برای حل مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای مرتبه دوم در حالت خطی و غیرخطی می‌پردازد. تابع سینک به صورت $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{(\pi x)}$ تعریف می‌شود که توسط اف.استنجر حدود بیست سال پیش روی قضیه نمونه گیری ویتاکر-شانون-کتل نیکو برای توابع تام پایه‌گذاری شد.
لازم به ذکر است که روش سینک، توابع تام را به عنوان تابع آزمون که مزیت بیشتری نسبت به روش‌های کلاسیک که چندجمله‌ای‌ها را به‌کار می‌برند، دارد. برای مثال در مواجهه با نقاط تکین روش سینک، دقت و سرعت همگرایی بهتری نسبت به روش چندجمله‌ای‌ها دارد. خطای تقریب سینک برای یک تقریب n نقطه‌ای، همگرا به نسبت $O(exp^{-cn^{1/2}})$ هست (برای c ثابت و مثبت).

فهرست مطالب

فهرست مطالب چ

۱ مقدمه ۱

۲ پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی ۶
۱.۲ حل عددی معادلات دیفرانسیل ۶
۲.۲ مسائل مقدار اولیه [IVP] ۸
۳.۲ مسائل مقدار مرزی [BVP] ۱۲

۳ معرفی تابع سینک ۱۵
۱.۳ پیش زمینه تئوری برای تابع سینک ۱۵
۲.۳ کلاس پلی وینر (Paley-Wiener) ۲۰
۱.۲.۳ قوانین درونیابی وکوادراتور برای کلاس پلی وینر ۲۱
۳.۳ تقریب سینک روی نوار D_d ۲۳
۴.۳ تقریب سینک روی Γ ۲۴
۵.۳ خطای تقریب سینک روی نوار D_d ۲۶
۱.۵.۳ فضای $L_{\alpha,\beta}(D_d)$ ۲۶
۶.۳ خطای تقریب سینک روی Γ ۲۷
۷.۳ نگاشت همدیس (Conformal-Map) ۲۸
۱.۷.۳ نگاشت همدیس برای حالت‌های مختلف Γ ۲۹

۸.۳ روش گالرکین ۳۴

۹.۳ روش هم‌محلی ۳۵

۱۰.۳ تابع وزن ۳۶

۴ حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از تقریب سینک و بررسی همگرایی روش ۳۸

۱.۴ کلاس‌های توابع ۳۹

۲.۴ روش‌های تعیین ضرایب بسط ۴۰

۳.۴ فرم کلی معادله ۴۲

۴.۴ روش سینک-گالرکین در حالت خطی ۴۷

۵.۴ روش سینک-هم‌محلی در حالت خطی ۵۲

۶.۴ مسأله مقدار مرزی غیرخطی ۵۶

۷.۴ روش سینک-گالرکین در حالت غیرخطی ۵۶

۱.۷.۴ روش نیوتن ۵۸

۸.۴ روش سینک-هم‌محلی در حالت غیرخطی ۶۱

۵ محاسبات و نتایج عددی ۶۳

۱.۵ خطای تقریب ۶۳

مراجع ۷۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۴

فصل ۱
مقدمه

یک مسئله عادی در مهندسی راه و ساختمان، به خمیدگی یک میله آهنی با مقطع عرضی مستطیلی مربوط می‌شود که مقید به تحمل باری یکنواخت است. در حالی که دو انتهای میله آهنی چنان نگهداری می‌شوند که متحمل هیچ خمیدگی نمی‌شوند. معادله دیفرانسیلی که این وضعیت فیزیکی را تقریب می‌کند به شکل

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{EI}w = \frac{qx}{2EI}(x-l), \qquad (۱.۱)$$

است، که در آن $w = w(x)$ خمیدگی به فاصله x از انتهای چپ میله آهنی است و I, S, E, q, l به ترتیب، معرف طول میله، فشار بار یکنواخت، مدول الاستیسیته، قدرت در نقاط انتهایی و ممان اینرسی مرکزی است. به این معادله دیفرانسیل دو شرط مربوط می‌شود با این فرض که هیچ خمیدگی در دو انتهای میله رخ نمی‌دهد، یعنی $w(0) = w(l) = 0$ داده می‌شود. وقتی کلفتی میله یکنواخت باشد، حاصلضرب EI ثابت خواهد بود و جواب دقیق را می‌توان به سادگی بدست آورد. اما، در کاربردهای زیادی کلفتی یکنواخت نیست لذا، ممان اینرسی I تابعی از x است و تکنیک‌های تقریبی لازم است. در مسائل فیزیکی که به جای وابسته زمانی بودن، وابسته مکانی هستند غالبا بر حسب معادلات دیفرانسیل با شرایط اعمال شده در بیش از یک نقطه بیان می‌شوند. بنابراین، معادله دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی را مسئله مقدار مرزی می‌نامند.

یک مثال نوعی از یک مسئله مقدار مرزی مرتبه دوم، دونقطه‌ای شامل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو

$$y'' = f(x, y, y') \tag{۲.۱}$$

همراه با شرایط مرزی

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{۳.۱}$$

می‌باشد. به طور کلی، تضمینی بر وجود و منحصر به فردی جواب مسئله فوق با فرض اینکه f معین است، وجود ندارد. قضایای وجود، برای جواب‌های مسئله مقدار مرزی دونقطه‌ای نسبتا پیچیده هستند که در کتاب کلر [۱] آورده شده است. با توجه به اینکه حل تحلیلی برخی از معادلات دیفرانسیل اعم از معمولی و جزئی مقدور نمی‌باشد و یا به آسانی حل نمی‌شود از روش‌های عددی استفاده می‌کنیم.

حجم زیادی از منابع برای جواب‌های عددی مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی وجود دارد. برخی از تکنیک‌های معروف به کار رفته در حل این مسائل روش تفاضل متناهی، پرتابی، عناصر متناهی و روش چندشبکه‌ای، ... است. گذشته از این رویکردهای کلاسیک دسته مهم دیگری از روش‌های عددی وجود دارد که روش تقریب فضای توابع نامیده می‌شود و روش‌های ریلی ریتس، گالرکین و هم‌محلی را شامل می‌شود.

اخیرا توجه به مقایسه روش‌های عددی برای حل مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای افزایش یافته است. دقت و سرعت جواب‌های عددی معادله دیفرانسیل معمولی مقدار مرزی دونقطه‌ای در بسیاری از علوم مهم و کاربردهای مهندسی از جمله نظریه لایه مرزی، مطالعه لختی ستاره‌ای ، نظریه کنترل و بهینه سازی و شبکه جریان در زیست شناسی از اهمیت خاصی بر خوردار است. در این پایان‌نامه، برای حل مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای روش‌های گالرکین و هم‌محلی را به کار می‌بریم. روش‌های گالرکین و هم‌محلی برای معادلات دیفرانسیل معمولی بعلت مشخصه توابع پایه دارای خصوصیات برجسته هستند. همچنین، هنگام اجرای روش نیاز به هیچگونه

[۱] keller

تغییر و تبدیلی در حضور نقاط تکین نمی‌باشد و تنها به پارامترهای معادله دیفرانسیل خواه تکین یا غیرتکین وابسته است.
روش‌های گالرکین و هم‌محلی از انواع مختلف تابع آزمون از قبیل اسپلاین مکعبی، چندجمله‌ای‌ها و موجک‌ها، ... استفاده می‌کنند. در این پایان نامه، عناصر پایه روش‌های تقریبی گالرکین و هم‌محلی را تابع سینک در ترکیب با نگاشت همدیس مناسب در نظر می‌گیریم. خطای تقریب سینک برای یک تقریب n نقطه‌ای، همگرا به نسبت $O(exp^{-cn^{1/2}})$ هست (برای c ثابت و مثبت).

تابع سینک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{(\pi x)} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

در این پایان‌نامه، تعریف دیگری از تابع سینک را که به فرم $S(k,h)(x)$

$$S(k,h)(x) = \mathrm{Sinc}\frac{(x-kh)}{h} = \frac{\sin(\pi(x-kh)/h)}{\pi(x-kh)/h},$$

است، معرفی مي‌کنيم که در آن k و h ثابت‌های صحیح مثبت هستند. تقریب سینک بر اساس (تابع کاردینال ویتاکر) استوار است که برای تابع کراندار $f \in (-\infty, \infty)$ ، (تابع کاردینال ویتاکر) به صورت

$$C(f,h)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k,h)(x) f(kh),$$

تعریف می‌شود. بیشترین تحقیقات روی تابع کاردینال توسط ای.تی.ویتاکر [۲] انجام گرفته است. بعد از تحقیقات ویتاکر، تحقیق در این زمینه کند شده و بعد از مدتی تابع $C(f,h)$ یک بار دیگر در تحقیقات مهم در زمینه‌های کاربردی بخصوص استفاده در علوم مهندسی ظاهر گردید. به طوری که نقش کاربردی $C(f,h)$ در تئوری مخابرات (ارتباطات) نشان داده شد.

[۲] E.T. Whittaker

تابع اصلی ویتاکر اولین بار به وسیله ای.تی.ویتاکر ارائه شد. ایشان می‌خواست بداند که آیا کلاسی از توابع وجود دارند به طوری که مقادیری که می‌گیرند همان مقدار را در یک مجموعه از نقاط $A=\{kh\}_{k=-\infty}^{\infty}$ برای $h>0$ بگیرند. به عبارتی، اگر فرض کنیم تابع $F(x)$ بر بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد و مقدار تابع $F(x)$ در $x_1\in[a,b]$ برابر با α باشد، مقدار تابع $Fo\phi(x_1)$ (ترکیب تابع F با تابع ϕ) در مجموعه $A=\{\xi:\ \xi\in(-\infty,\infty)\}$ نیز برابر α است. وی در بررسی‌های خود نتیجه گرفت که این توابع با خصوصیت برترشان، که آن‌ها را از بقیه توابع متمایز می‌کند، وجود دارد. روش سینک توسط اف.استنجر [۳]حدود بیست سال پیش روی قضیه نمونه گیری ویتاکر-شانون-کتل نیکو [۴] برای توابع تام پایه‌گذاری شد. در سال ۱۹۸۱ ، استنجر فرمول‌های تقریب سینک را بر اساس تابع ویتاکر برای توابع بررسی و قضایای مربوط به این تقریب را مطالعه کرده است. لازم به ذکر است که روش سینک، توابع تام را به عنوان تابع آزمون که مزیت بیشتری نسبت به روش‌های کلاسیک که چندجمله‌ای‌ها را به کار می‌برند، دارد. برای مثال در حضور نقاط تکین، روش سینک دقت و سرعت همگرایی بهتری نسبت به روش چندجمله‌ای‌ها دارد. با توجه به اهمیت موضوع تقریب عددی سینک را به کار می‌گیریم.

هدف این پایان‌نامه، مقایسه روش‌های سینک- گالرکین و سینک -هم‌محلی برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم، دونقطه‌ای

$$\mu_2(x)y''(x)+\mu_1(x)y'(x)+\mu_0(x)y(x)=f(x,y),\quad a\le x\le b \qquad (۴.۱)$$

$$y(a)=y(b)=0, \qquad (۵.۱)$$

است، به طوری که $f(x,y),\mu_0(x),\mu_1(x),\mu_2(x)$ و $y(x)$ توابع تحلیلی هستند. یک مقایسه برای مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای تکین

$$(x^\sigma y')'=f(x,y),\quad 0<x<1 \qquad (۶.۱)$$

$$y(0)=A,\quad y(1)=B, \qquad (۷.۱)$$

به طوری که $\sigma\in(0,1)$ و A و B ثابت‌های متناهی هستند، انجام شده است. سرانجام، بر

[۳] F.Stenger
[۴] Whittaker-Shannon-Kotel'nikov

روی مثال‌های عددی نشان داده می‌شود اگرچه روش سینک-گالرکین معروف است ولی روش سینک-هم‌محلی اندکی نتایج بهتری را نشان می‌دهد. این مقدمه را با اشاره‌ای مختصر راجع به محتوای فصل‌های این پایان‌نامه به شرح ذیل به پایان می‌بریم.

در فصل دوم به معرفی معادله دیفرانسیل معمولی می پردازیم که با توجه به شرایط مرزی، به دو دسته مسائل مقدار اولیه (IVP) و مسائل مقدار مرزی (BVP) بخش‌بندی می‌شود. سپس مفاهیم مورد نیاز و شیوه‌های حل مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی را توصیف می‌کنیم.

در فصل سوم به معرفی پیش زمینه تئوری برای تابع سینک و ویتاکر می‌پردازیم همچنین در این فصل با کلاسی از توابع که در واقع مقدمه‌ای برای بدست آوردن تقریب سینک می‌باشد آشنا می‌شویم. این فصل که بر اساس مرجع[۲۷] می‌باشد، به معرفی فرمول‌ها و قضایای تقریب سینک و شیوه‌های مختلف تقریب، از طریق استفاده مستقیم تابع کاردینال برای دامنه‌های مختلف می‌پردازیم و با فرض تحلیلی بودن تابع F در نوار D_d برای درونیابی این تابع روی بازه‌های متناهی و نامتناهی نتایجی ارائه می‌کنیم. قانون درونیابی و کوادراتور از تابع کاردینال استخراج و نتایج بدست آمده تقریب در دامنه D_d را برای تقریب روی Γ در دامنه D تعمیم می‌دهیم. برای اینکار از نگاشت همدیس ϕ استفاده می‌کنیم به این صورت که برای تابع تحلیلی F در دامنه D داریم $\phi : D \to D_d$ در واقع تابع ϕ مرز Γ در D را بر خط حقیقی یعنی D_d نگاشت می‌کند و تابع پایه جدید $S(k,h)o\phi(x)$ برای تقریب روی Γ جانشین تابع پایه قبلی $S(k,h)(x)$ می‌گردد و نقاط درونیابی جدید $Z_k = \{\phi^{-1}(kh)\}_{-\infty}^{\infty}$ برای تابع F جایگزین نقاط $\{kh\}_{-\infty}^{\infty}$ در حالت قبلی می‌شوند.

در فصل چهارم مسئله مقدار مرزی مرتبه دوم، دونقطه‌ای در حالت خطی و غیرخطی را مد نظر قرار داده، تقریب سینک-گالرکین و سینک-هم‌محلی را برای دستگاه معادلات خطی و غیرخطی معرفی کرده و تقریب عددی سینک را با استفاده از روابط و قضایای فصل سوم برای این دسته از مسائل مقدار مرزی بدست می‌آوریم. همچنین همگرایی تقریب عددی سینک را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل پنجم با در نظر گرفتن مثال‌های مختلف، به طور عددی نتایج تحلیلی را که در فصل چهارم برای مسائل مقدار مرزی مرتبه دو، در حالت خطی و غیرخطی بدست آوردیم، مورد تائید قرار می‌دهیم.

فصل ۲
پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۲ حل عددی معادلات دیفرانسیل

از آنجایی که تمامی مسائل کاربردی و عملی منجر به یک دستگاه معادله دیفرانسیل می‌شوند، یکی از مباحث مهم ریاضیات، حل معادلات دیفرانسیل است. مبحث معادلات دیفرانسیل نه تنها یکی از زیباترین بخش‌های ریاضی است بلکه ابزاری اصلی در مدلسازی بسیاری از وضعیت‌های فیزیکی مانند دستگاه‌های فنر-جرم، مدارهای مقاومت-خازن-سلف، خم شدن تیرها، واکنش‌های شیمیایی و غیره نیز می‌باشد. این معادلات در بوم‌شناسی و اقتصاد نیز سودمندی خود را نشان داده‌اند. مسئله شکارچی-شکار یک نمونه کلاسیک از معادلات دیفرانسیل می‌باشد.

در ریاضیات محض وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل و یادگیری فنون و روش‌های تحلیلی برای بدست آوردن جواب آنها می‌شود. این کار با دسته‌بندی معادلات انجام می‌گیرد و نشان داده می‌شود که دسته خاصی از معادلات را می‌توان به روش تحلیلی حل کرد. اما، همانند وجود تابع اولیه برای توابع، معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی‌توان به روش‌های تحلیلی موجود جواب آنها را بدست آورد. حتی اگر بتوان، گاهی اوقات، بعضی معادلات دیفرانسیل ساده جوابی بسیار پیچیده دارند. به عنوان مثال، جواب مسأله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

که بعد از محاسبات زیادی بدست می‌آید، عبارت است از

$$\log_e(x^2+y^2) = 2arctg(\frac{y}{x}),$$

که اگر بخواهید به ازای مقدار مفروضی از x مقدار y را از آن بدست آورید، به زحمت خواهید افتاد. از این رو، استفاده از روش‌های عددی، حتی در مواردی که جواب تحلیلی موجود است توصیه می شود. توجه کنید که روش‌های تحلیلی معمولا نتیجه را بر حسب توابع ریاضی می‌دهند که اغلب رفتار وخواص تابع نیز واضح است اما یک حل آنالیز عددی همواره عددی است و نتایج عددی تقریبی هستند و می‌توان آن را به قدر مطلوب دقیق ساخت.

تعریف ۲.۱.۱. هر رابطه‌ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند. اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد معادله دیفرانسیل را معمولی نامیده و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل نسبی یا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامند.

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی از مرتبه m به صورت

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}, y^{((m)}) = 0, \tag{۲.۱}$$

یا

$$y^{(m)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}), \tag{۲.۲}$$

می‌باشد فرم (۲.۲) را فرم استاندارد معادله دیفرانسیل (۲.۱) می‌نامند. در این صورت بالاترین مشتق موجود، بر حسب مشتقات مراتب پایین‌تر و متغیر مستقل x نشان داده می‌شود. جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه m شامل m ثابت دلخواه مستقل است، برای تعیین این مقادیر ثابت m شرط در یک نقطه نیاز است که این‌ها را شرایط اولیه می‌نامند. معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را مسئله مقدار اولیه می‌نامند. بنابراین مسئله مقدار

اولیه مرتبه m -ام به صورت

$$
\begin{aligned}
&y^{(m)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}),\\
&y^{(p)}(x_0) = y_0^p, \quad p = 0, 1, \dots, m-1
\end{aligned} \tag{۳.۲}
$$

است، هرگاه m شرط مسئله برای تعیین مقادیر ثابت در بیش از یک نقطه داده شوند آنگاه این m شرط را شرایط مرزی می‌نامند. معادله دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی را مسئله مقدار مرزی می‌نامند. حال مفاهیم مورد نیاز برای حل مسئله مقدار اولیه را توصیف می‌کنیم.

۲.۲ مسائل مقدار اولیه [IVP]

مسئله مقدار اولیه مرتبه m، (۳.۲)، هم ارز بادستگاه m معادله مرتبه اول

$$
\begin{aligned}
y' = v_1' = v_2 \qquad & v_1(x_0) = y_0\\
v_2' = v3 \qquad & _2(x_0) = y_0'\\
\vdots \qquad & \vdots\\
v_{m-1}' = v_m \qquad & v_{m-1}(x_0) = y_0^{m-2}\\
v_m' = f(x, v_1, v_2, \dots, v_m) \; & v_m(x_0) = y_{0^{m-1}}
\end{aligned} \tag{۴.۲}
$$

است. می‌توان دستگاه معادله (۴.۲) را به فرم برداری

$$
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(x, v), \; V(x_0) = \eta \tag{۵.۲}
$$

نوشت، که در آن روابط

$$
\begin{aligned}
V &= [v_1 \; v_2 \; \dots v_m]^T\\
F(x, V) &= [v_2 \; v_3 \; \dots f(x, v_1, v_2, \dots, v_m)]^T,\\
\eta &= [y_0 \; y_0' \; \dots y_0^{m-1}]^T
\end{aligned}
$$

را داریم. بنابراین جهت حل دستگاه معادله (۴.۲) و به طبع آن حل مسئله مقدار اولیه مرتبه m -ام (۳.۲) کافیست مساله مقدار اولیه

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{۶.۲}$$

حل شود. لذا روش‌های عددی فقط برای حل مسئله مقدار اولیه (۶.۲) توضیح داده می‌شوند. با وجود این، قبل از اینکه جواب مسئله به صورت عددی تقریب شود، سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا مسئله داده شده دارای جواب است و در صورت وجود منحصر به فرد می‌باشد. جهت پاسخ به این سوال‌ها از قضیه (۱.۲.۲) استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنید شرایط زیر برای تابع $f(x,y)$ برقرار باشد*

۱) *$f(x,y)$ تابعی حقیقی است،*

۲) *$f(x,y)$ خوش تعریف و در بازه*

$$x \in [x_0, b]\ ,\ y \in (-\infty, \infty)$$

پیوسته است،

۳) *ثابت L وجود دارد به طوریکه برای هر $x \in [x_0, b]$ و برای هر دو مقدار y_1 و y_2 داریم:*

$$|f(x, y_1 - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|),$$

که در آن L را ثابت لیپ شیتس می‌نامند.

در این صورت، برای هر y_0 مسئله مقدار اولیه (۶.۲) به ازای هر $x \in [x_0, b]$ دارای جواب یکتای $y(x)$ است. همواره در حل عددی مسئله فرض می‌شود که مسئله داده شده دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که مشتقات جزئی $f(x,y)$ نسبت به x و y پیوسته است.

در این مختصر روش‌های عددی ساده‌ای را برای حل مسئله مقدار اولیه مورد بررسی قرار می‌دهیم که جملگی عدد مثبت و کوچکی چون h را اختیار می‌کنند و برآوردی از $y(x_0 + ih)$

را به ازای $i = 1, 2, 3, \ldots$ به دست می‌دهند. از این رو، فرض می‌کنیم y_i مقدار تقریبی $y(x_i)$ باشد و چند روش را برای محاسبه y_i مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اولین روشی که مطرح می‌کنیم روش بسط تیلر است. می‌دانیم که $x_{i+1} = x_i + h$ و بنابر بسط تیلر

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \ldots + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_i) + \ldots$$

برای پیدا کردن y_i یعنی تقریبی از $y(x_i)$ باید سری سمت راست را در نقطه‌ای قطع کنیم مثلا تا مشتق مرتبه p ام را نگهداریم. با فرض اینکه مشتقات جزئی $f(x, y)$ موجودند. با مشتقگیری متوالی از معادله (۶.۲) مشتقات دوم و بالاتر را بدست می‌آوریم. سپس هر یک از این مشتق‌ها در x_i حساب شده و ضرایب مختلف بدست می‌آیند و جواب با جدولی از مقادیر در نقاط شبکه‌ای بدست می‌آید. دقت روش به کوچکی h وبزرگی p بستگی دارد. اشکال روش تیلر آن است که اگر مشتق‌ها پیچیده شوند بکارگیری روش ممکن است، سخت شود و در این حالت تعیین خطا مشکل خواهد بود. روش سری تیلر با $p = 1$ روش اویلر نامیده می‌شود. روش اویلر یک روش یک گامی صریح می‌باشد و به مقادیر اولیه اضافی نیاز ندارد و یک تغییر در طول گام را به سهولت اجازه می‌دهد.

برای بدست آوردن جواب‌های دقیق‌تر برای برای مسئله مقدار اولیه عبارت (۶.۲) با محاسبه تابع $f(x, y)$ در نقاط کمتر می‌توان از یک دسته فرمول که توسط ریاضیدانان آلمانی به نام‌های رونگه و کوتا بدست آمده‌اند، استفاده کرد. روش‌های رونگه-کوتا از خطای برشی موضعی مرتبه بالای روش تیلر استفاده می‌کنند در حالی که محاسبه و ارزیابی مشتق‌های $f(x, y)$ را حذف می‌کنند و الگوریتم‌هایی ارائه می‌دهند که یک معادله دیفرانسیل را به طور کارا حل کرده و در ضمن با تقریب جواب دقیق بوسیله متناسب کردن n جمله اول بسط به سری تیلر هم‌ارزند. فرمول‌های مذکور دارای مراتب متفاوت هستند. بخصوص فرمول مرتبه چهار رونگه- کوتا بطور وسیعی کاربرد دارد. فرمول‌های رونگه-کوتا مفصل و پیچیده به نظر می‌رسند ولی در عمل به سادگی به کمک یک وسیله محاسباتی قابل استفاده هستند و خطای کمی نسبت به روش‌های دیگر دارند.

در روش‌هایی که تاکنون برای مسائل مقدار اولیه بررسی کردیم y_{i+1} بر حسب y_i بدست می‌آمد یعنی برای محاسبه تقریبی از $y(x_{i+1})$ تنها از اطلاعات موجود در نقطه x_i استفاده می‌شد

و تک گامی محسوب می‌شوند به همین خاطر این روش‌ها برای مسائلی از نوع (۶.۲) ایده‌آل هستند. اما وقتی y_1 بدست می‌آید، اطلاعات موجود در x_0 و x_1 را می‌توان به کار برد و به همین ترتیب با بدست آوردن y_i های جدیدتر می‌توان از اطلاعات بیشتری استفاده و y_{i+1} را حساب کرد. اگر مقادیر حساب شده را با دوراندیشی ذخیره کرده باشیم می‌توان از آن‌ها استفاده کرد. روش تیلر و روش رونگه-کوتا تک‌گامی هستند. اصولا در یک روش چندگامی با استفاده از مقادیر قبلی y و یا y' یک چندجمله‌ای تشکیل می‌دهیم که تابع مشتق را تقریب کند و آن را برای بازه بعدی برونیابی می‌کنیم. تعداد نقاط قبلی که مورد استفاده قرار می‌گیرند درجه چندجمله‌ای و در نتیجه مرتبه دقت فرمول حاصل را مشخص می‌کند. معمولا خطای کل روش حاصل مساوی h به توان درجه چندجمله‌ای به اضافه یک است.

ساختار کلی یک روش چندگامی [۱] به صورت

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \quad f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j}), \tag{۷.۲}$$

یا

$$\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \ldots + \alpha_k y_{n+k} = h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \ldots + \beta_k f_{n+k}), \tag{۸.۲}$$

است که در آن α_i ها مقادیر ثابت بوده و $\alpha_k \neq o$ است. فرض کنید y_n، y_{n+1}،...، y_{n+k-1} معلوم بوده و هدف تعیین y_{n+k} باشد. معادله (۸.۲) را می‌توان به فرم $y_{n+k} = h\beta_k f_{n+k} + g$ نوشت که در آن g معلوم است. روش چندگامی را صریح می‌نامند هرگاه $\beta_k = 0$ باشد و روش چندگامی را ضمنی می‌نامند هرگاه $\beta_k \neq 0$ باشد و مقدار y_{n+k} از روش تکراری بدست می‌آید.

[۱] Multistep Method

۳.۲ مسائل مقدار مرزی [BVP]

مسئله مقدار مرزی دونقطه‌ای کلی که در این بخش مورد بررسی قرار می‌دهیم شامل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به شکل

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b,$$

است به همراه شرایط مرزی

$$y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta.$$

قضیه زیر شرایط کلی که اطمینان می‌دهد جواب یک مسئله مقدار مرزی مرتبه دوم وجود دارد و منحصر به فرد است را بدست می‌دهد.

قضیه ۱.۳.۲. *فرض کنیم تابع f در مسئله مقدار مرزی*

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \;\; y(b) = \beta,$$

بر مجموعه

$$D = \{(x, y, y')|a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

پیوسته بوده و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ بر D پیوسته باشند. هرگاه

(۱) *به ازای هر $(x, y, y') \in D$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0$*

(۲) *یک ثابت M وجود داشته باشد که*

$$|\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')| \leq M, \quad (x, y, y') \in D \text{ به ازای هر}$$

آنگاه مسئله مقدار مرزی فوق جواب منحصر به فرد دارد.

می‌توان گفت روش‌های عددی که به طور وسیعی برای حل مسائل مقدار مرزی کاربرد دارند عبارت است از: تفاضل متناهی (FD) ، عناصر متناهی (FE) و به تازگی روش‌های طیفی. انتخاب روش، اغلب با توجه به پیچیدگی دامنه و دقت مورد نیاز صورت می‌گیرد که عامل‌های کلیدی می‌باشند.

روش تفاضل متناهی در محدوده وسیعی از دقت و دامنه‌های نسبتا پیچیده خوب عمل می‌کنند. این روش بسیار منطقی است زیرا مشتق خاصیت موضعی از تابع است. به طوری که در این روش مشتق‌ها را با تقریب‌های تفاضلی متناهی بر روی نقاط شبکه‌ای متساوی‌الفاصله جایگزین می‌کنیم وقتی این کار انجام شد جواب با حل یک مجموعه از معادلات همزمان بدست می‌آید.

برای مسائل یک بعدی، روش دیگری به نام روش پرتابی را می‌توان به کار برد و این به خاطر شباهتش به مسئله است که یک افسر توپخانه می‌خواهد هدفی را بزند با آن مواجه است. اگر دو تیر بیندازیم که یکی زیر هدف و دیگری بالای آن بخورد، ارتفاع قائم تفنگ را می‌توان یافت و این یعنی به یک ارتفاع میانی نزدیکتر خواهیم شد.

رده خاصی از مسائل مقدار مرزی روی یک ناحیه یک بعدی هست که تنها به ازای مقادیر خاصی از پارامتر مسئله جواب دارد. این مقادیر خاص را مقادیر مشخصه مسئله می‌نامند و این مسائل را مسائل مقدار مشخصه می‌خوانند. مسائل الاستیسیته و ارتعاش و برخی از مسائل آمار از این دسته هستند.

روش چندشبکه‌ای نیز برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی، بر گسسته‌سازی و تقریب بعدی مشتقات توسط فرمول‌های تفاضل متناهی است.

برای حل مسائل مقدار مرزی روش دیگری وجود دارد که مزیت‌های خاصی دارد و مهندسان به طور گسترده از آن استفاده می‌کنند. این روش، روش عناصر متناهی نامیده می‌شود و به خصوص در نواحی غیر منتظم با ارزش است.

یک مزیت روش عناصر متناهی بر روش‌های تفاضل متناهی سادگی نسبی آن در پرداختن به شرایط مرزی مسئله است. بسیاری از مسائل فیزیکی دارای شرایط مرزی هستند که شامل مشتقات است و در حالت کلی، مرز ناحیه شکل نامنظمی دارد. پرداختن به شرایط مرزی اینگونه مسائل با استفاده از تکنیک‌های تفاضل متناهی بسیار مشکل است، زیرا هر شرط مرزی شامل

یک مشتق باید بوسیله یک خارج قسمت تفاضلی در نقاط شبکه‌ای تقریب شود و شکل نامنظم مرز جا دادن نقاط شبکه‌ای را مشکل می‌کند. چون روش عناصر متناهی شامل شرایط مرزی به صورت انتگرال‌هایی در یک تابعی است که مینیمم می شود، اساس ساخت روند مستقل از شرایط مرزی خاص مسئله است.

روش‌های طیفی فراگیر هستند. روشی معمول برای کاربرد آن‌ها، تقریب زدن تابع مورد مشتق‌گیری، به صورت مجموعی از توابع پایه بسیار هموار به صورت زیر است:

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^{N} a_k \phi_k(x)$$

که در آن $\phi_k(x)$ مثلا نمایانگر چندجمله‌ای‌های چبیشف یا توابع مثلثاتی است. این روش توانایی‌های جالب توجهی دارد به طوری که برای توابع تحلیلی، کاهش خطا (وقتی N افزایش می‌یابد) با آهنگ نمایی، به جای آهنگ (بسیار کندتر) چندجمله‌ای صورت می‌گیرد.

در روش‌های طیفی، دو روش اصلی برای تعیین ضرایب بسط، یعنی a_k ها عبارت است از روش‌های گالرکین وهم‌محلی.

روش گالرکین: توابع پایه اصلی را در مجموعه جدیدی ترکیب کنید که در آن، تمامی توابع در شرایط مرزی صدق کنند. آنگاه لازم است که جمله باقیمانده، بر تعداد هر چه بیشتری از این توابع پایه جدید متعامد باشد.

روش هم‌محلی: لازم است a_k طوری انتخاب شود که شرایط مرزی ارضا شود، اما باقیمانده، را در تعداد هر چه بیشتری از نقاط هم‌محلی (که به طور مناسبی انتخاب شده) صفر کند.

فصل ۳
معرفی تابع سینک

در این فصل یادآوری از نمادها، تعاریف اولیه و یک بررسی اجمالی از روش سینک را ارائه می‌دهیم. همچنین به معرفی فرمول‌ها و قضایای تقریب سینک که کاربرد زیادی دارند، می‌پردازیم. لازم به ذکر است که در این فصل قسمت حقیقی تابع $F(z)$ را با $R(F(z))$ و قسمت موهومی را با $I(F(z))$ نمایش می‌دهیم.

۱.۳ پیش زمینه تئوری برای تابع سینک

صفحه مختلط

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\},$$

را در نظر می‌گیریم که $\mathbb{R}$ نمایش خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۳. یک تابع f در نقطه $z_0 \in \mathbb{C}$ مشتق پذیر نامیده می‌شود اگر

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right],$$

موجود باشد. تابع f در نقطه z_0 تحلیلی است اگر مشتق‌اش در هر نقطه از همسایگی z_0 موجود باشد. اگر f در $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد آنگاه f کامل نامیده می‌شود. اگر f در $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد اما در z_0 تحلیلی نباشد، آنگاه z_0 یک نقطه تکین رفع شدنی برای f می‌باشد.

تابع سینک برای $z \in \mathbb{C}$ به صورت

$$\operatorname{sinc}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi z)}{(\pi z)} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \tag{۱.۳}$$

دارای نقطه تکین رفع شدنی در $z_0 = 0$ است.

قضیه ۲.۱.۳. *تابع سینک یک تابع کامل است.*

برهان. تابع $\dfrac{\sin(\pi z)}{(\pi z)}$ به جز در نقطه $z_0 = 0$ همه جا تحلیلی است و z_0 نقطه تکین رفع شدنی است. چون مقدار حد $\dfrac{\sin(\pi z)}{(\pi z)}$ در نقطه تکین رفع شدنی $z_0 = 0$ برابر یک است، از این رو تابع سینک که به صورت بالا تعریف شده است در همه جا تحلیلی است و لذا کامل است. □

تعریف ۳.۱.۳. تابع $L(f)$ متعلق به فضای خطی $L^p(a,b)$ گوئیم، هرگاه تابع f روی (a,b) تعریف شده باشد و در رابطه زیر صدق کند.

$$\|f\|_p = \Big\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \Big\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad p \geqslant 1 \tag{۲.۳}$$

به طوری که نرم $\|.\|_p$ در شرایط زیر صدق می‌کند

(۱) $\|f\|_p = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$

(۲) $\|\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ برای $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

(۳) $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

فرض کنید H یک فضای خطی باشد، یک تابع $(.,.)$ از $H \times H$ به $\mathbb{C}$ یک ضرب داخلی نامیده می‌شود و روشی برای ضرب توابع در همدیگر می‌باشد که حاصل آن یک اسکالر است.

تعریف ۴.۱.۳. اگر H یک فضای خطی باشد و یک ضرب داخلی تعریف شده روی این فضا داشته باشیم و همچنین در این فضا نرم را به صورت $\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}}$ تعریف کنیم، آنگاه یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۵. یک مجموعه در فضای هیلبرت متعامد یکه نامیده می‌شود اگر داشته باشیم

$$(\xi_k, \xi_j) = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

تعریف ۳.۱.۶. (تبدیل فوریه) اگر $f \in L^1((R))$، آنگاه تبدیل فوریه f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt. \tag{۳.۳}$$

قضیه ۳.۱.۷. *فرض کنیم* $\beta_k \equiv (f, \xi_k)$ *ضرایب فوریه* f *متناسب با مجموعه متعامد یکه* $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *باشد. همچنین اگر تابع* f *دارای دوره تناوب* p *باشد،* $f(t+p) = f(t)$ *برای همه* $f \in L^2(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ *و* $t \in \mathbb{R}$ *سری فوریه* f *متناسب با* $\{\xi_k(t)\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{\frac{1}{\sqrt{p}} e^{2\pi ikt/p}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *برابر است با :*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi ikt/p}, \tag{۴.۳}$$

که در آن ضرایب فوریه به صورت زیر می‌باشد

$$a_k = \frac{\beta_k}{\sqrt{p}} = \frac{(f, \xi_k)}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p} \int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)e^{-2\pi ikt/p}. \tag{۵.۳}$$

در یک حالت خاص فرض می‌کنیم $f(t) = e^{-izt}$ *و* $f(t+p) = f(t)$ *که* $p = \frac{2\pi}{h}$ *باشد، ضرایب فوریه را به صورت زیر خواهیم داشت*