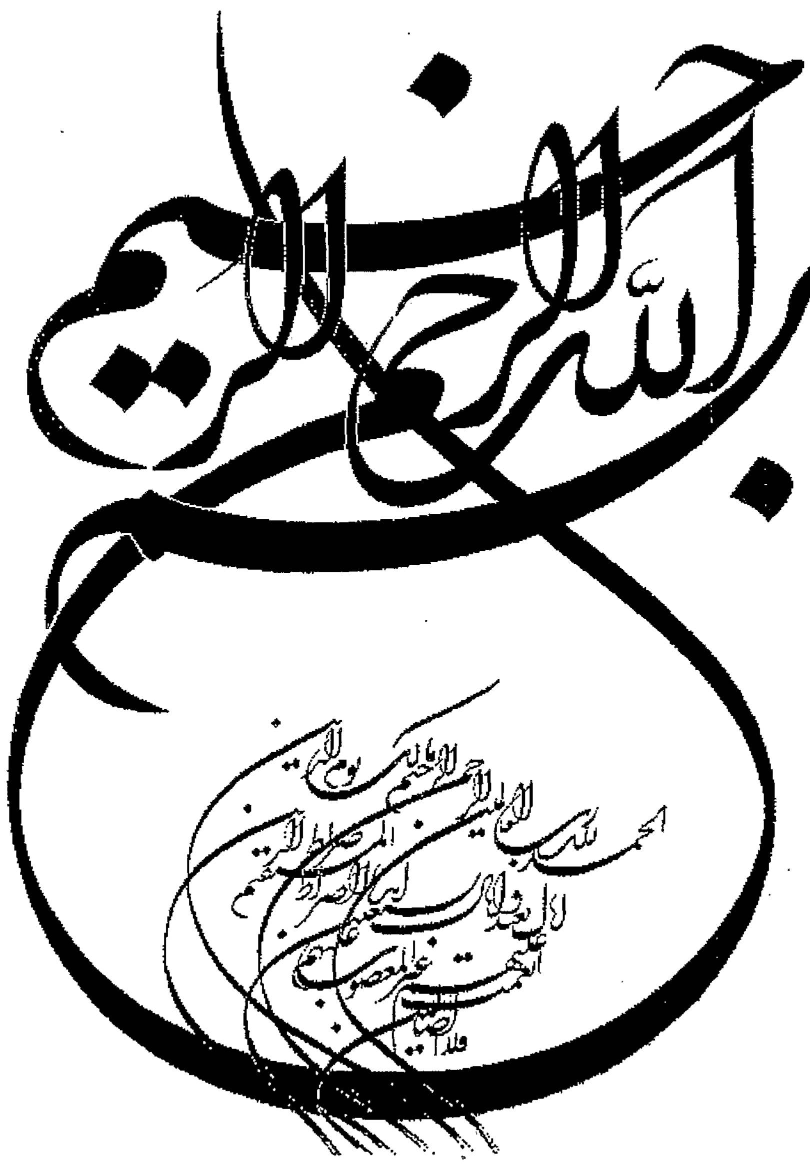

١٢٩٦٤٠ _ ٢٠٠٦٦٣٢

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

سیستمهای ریشه ی متناهی موضعی

استادان راهنما:

دکتر سعید اعظم

دکتر ملیحه یوسف زاده

پژوهشگر:

مریم رفیعی اصفهانی

مهرماه ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم مریم رفیعی اصفهانی

تحت عنوان:

سیستمهای ریشه موضعا متناهی

در تاریخ ... ۸۸/۷/۲۹..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی........ به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر سعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر ملیحه یوسف زاده	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر جواد اسدالهی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر ولی ا.. شاه سنایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

"حمد و سپاس خداوندی را که حمد را بهای نعمتش و پناه از بلای خود قرار داد و آن را وسیله ی رسیدن به بهشت های خویش و سبب افزایش احسان گردانید."

مولای مهربانی ها حضرت علی (ع)

سپاس خداوند متعال را که به نور مقدس خویش هدایتم کرد و با نور وجود انبیاء و اولیاء راه زندگی ام را روشن کرد و مهر و محبتش را در قلب دو موجود پاک، پدر و مادر، قرار داد تا مرا بپرورند و در همه حال یاریم کنند و علم و را أفقش را در وجود استادانی قرار داد تا مشعل راهم شوند و مسیر زندگیم را نورانی و هموار کنند.

در این جا از استاد راهنمای محترم و عزیزم جناب آقای دکتر سعید اعظم که فراتر از یک استاد مانند پدری مهربان و چون دریایی از علم با اخلاق و صبور، راهنما و یاور بنده بودند بسیار سپاس گزارم و امیدوارم خداوند در همه حال یاور شان باشد و هم چنین از استاد راهنمای گرامیم سرکار خانم دکتر ملیحه یوسف زاده به خاطر تمام راهنمایی ها و توصیه هایشان متشکرم و امیدوارم همیشه سرفراز باشند.

سپس، از داوران گرامی جناب آقای دکتر شاه سنایی و جناب آقای دکتر اسدالهی به خاطر حسن توجه و مطالعه این پایان نامه تشکر می کنم و از راهنمایی ها و تذکرات شان برای اصلاح این کار کمال تشکر را دارم.

در پایان، از تمام اساتید، کارمندان و دوستانی که با قلبی سرشار از مهر و با همتی بلند مرا یاری کردند تا چون قطره ای از دریای بی کران علم بنوشم و دلم را به نور علم روشن کنم، متشکر و سپاس گزارم.

تقدیم به

استاد عزیزم

دکتر سعید اعظم

و

پدر و مادر مهربانم

چکیده

در این پایان نامه به بررسی سیستم های ریشه ی متناهی موضعی در یک فضای برداری حقیقی می پردازیم. هدف این پایان نامه، توسعه ی مبانی نظری سیستم های ریشه ی متناهی موضعی است و درضمن، جنبه ی رسته ای سیستم های ریشه که به نظر می رسد تاکنون نادیده گرفته شده است را بیان می کنیم. در این پایان نامه به مطالعه ی حد مستقیم سیستم های ریشه ی متناهی موضعی می پردازیم. هم چنین، خواص تابعگونی و نمایش مزدوجی را برای گروه وایل نظیر یک سیستم ریشه ی متناهی موضعی بیان و اثبات می کنیم. در پایان، دیاگرام های دینکین نظیر سیستم های ریشه ی متناهی موضعی را دسته بندی می کنیم.

کلید واژه ها: زیر مجموعه ی کامل، زیرفضای کیپ، سیستم ریشه ی متناهی موضعی، تحویل ناپذیری و همبندی، گروه وایل، دیاگرام دینکین.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان‌نامه سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی را معرفی می‌کنیم و قصد داریم جنبه‌ی رسته‌ای[1] سیستم‌های ریشه را توسعه دهیم. بیشتر نتایجی که برای سیستم‌های ریشه‌ی متناهی ثابت شده است، برای سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی نیز برقرار است، هرچند اغلب نیاز به اثبات‌های متفاوتی از حالت متناهی است. سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی با سیستم‌های ریشه‌ی کزـمودی متفاوت است، زیرا یک سیستم ریشه‌ی متناهی موضعی R نامتناهی است اگروفقط اگر R یک فضای با بعد نامتناهی را تولید کند. روش مطالعه‌ی اصول موضوعی این نوع سیستم‌های ریشه اولین بار توسط Moody و همکارانش در مراجع [۲۳]، [۲۴] و [۲٦] ارائه شده است. به‌علاوه، تعمیم‌های دیگر توسط Bardy در مرجع [۲]، Bliss در مرجع [۳] و Hee در مرجع [۱٦] بیان شده‌اند. یادآور می‌شویم که سیستم‌های ریشه‌ی نامتناهی که در این پایان نامه در نظر گرفته شده با سیستم‌های ریشه‌ی آفین تعمیم‌یافته در مرجع [۱] و سیستم‌های ریشه‌ی جبرهای لی بیضوی در مراجع [۳۴] و [۳۵] متفاوت است. درواقع، اشتراک سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی و سیستم‌های ریشه‌ی آفین تعمیم‌یافته، سیستم‌های ریشه‌ی متناهی است. در ضمن، سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی در مطالعه‌ی جبرهای لی با بعد نامتناهی در مرجع [۱۹] نیز بیان شده‌اند. در سال ۱۹٦۱ توسط Schue در مرجع [۳٦] نشان داده شد که جبرهای نیم‌ساده دارای یک تجزیه‌ی فضای ریشه توسط سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی هستند و در سال ۱۹۹۳ توسط Neher در مرجع [۳۱]، نشان داده شد که برای دسته‌بندی سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی می‌توان از دسته‌بندی جبرهای

---

[1] caregorical

نیم‌ساده استفاده کرد. در سال ۱۹۹۶ Neher، جبرهای لی درجه‌بندی شده توسط سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی نامتناهی را در مرجع [۳۲] شرح داده و در سال ۲۰۰۳، Neher و Garcia در مرجع [۱۵]، ابرجبرهای لی درجه‌بندی شده توسط سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی را شرح دادند. کلاس خاصی از این نوع جبرها، جبرهای لی شکافته‌شدنی متناهی موضعی نیم‌ساده است که در سال ۱۹۹۹ توسط Stumme در مرجع [۳۷]، در سال ۲۰۰۱ توسط Neeb و Stumme در مرجع [۲۹] و در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۱ توسط Neeb در مرجع [۲۷] و [۲۸] مطالعه شده‌اند. در سال ۱۹۹۹، Dimitrov و Penkov در مرجع [۱۲]، این جبرهای لی و نمایش‌هایشان را از دید حدهای مستقیم جبرهای لی تحویلی با بعد متناهی مطالعه کرده‌اند.

این پایان‌نامه شامل شش فصل است. در فصل اول، رسته‌ی $\mathrm{SV_K}$ و زیرمجموعه‌های کامل و زیر فضاهای محکم و هم‌هسته و برخی تعاریف مقدماتی و قضایای مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، شروط متناهی موضعی، کرانداری و قضایای مربوط را بیان و اثبات می‌کنیم و هم‌چنین A—پایه‌ها را معرفی می‌کنیم.

فصل سوم مشتمل بر شش بخش است. در بخش اول، انعکاس‌ها و سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی را تعریف می‌کنیم. در بخش دوم، زیرسیستم‌ها و زیرسیستم‌های کامل را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی توسط تابع $b(n) = ۴n^۲$ کراندار می‌شوند. در بخش سوم، مفهوم تعامد را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم، ابتدا رسته‌ی RS و جادهی‌ها را معرفی کرده و در لم ۴.۳، شروط معادلی برای یک جادهی را بیان می‌کنیم. در بخش پنجم، خودریختی‌ها و تبدیلات خطی از نوع متناهی و گروه وایل را معرفی کرده و در لم ۵.۳، هم‌حاصل‌ضرب را در رسته‌ی RS بدست می‌آوریم. در بخش ششم، ابتدا مفهوم تحویل‌ناپذیری و همبندی را بیان می‌کنیم و سپس در گزاره‌ی ۸.۳، ثابت می‌کنیم که تحویل‌ناپذیری یک سیستم ریشه با همبندی آن سیستم ریشه معادل است و هم‌چنین هر سیستم ریشه را می‌توان به صورت جمع مستقیم مؤلفه‌های همبندی خودش نوشت. در گزاره‌ی ۹.۳، حد مستقیم سیستم‌های ریشه در رسته‌ی RSE را بدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم اگر یک خانواده از سیستم‌های

ریشه تحویل‌ناپذیر باشد، آن‌گاه حدشان نیز تحویل‌ناپذیر است و در نتیجه‌ی ۱۰.۳، نشان می‌دهیم که هر سیستم ریشه‌ی متناهی موضعی (تحویل‌ناپذیر)، حد مستقیم سیستم‌های ریشه‌ی متناهی (تحویل‌ناپذیر) است و برعکس.

فصل چهارم، شامل چهار بخش است. در بخش اول، فرم‌های دوخطی پایا و شروط معادل آن را بیان می‌کنیم و در قضیه‌ی ۲.۴، نشان می‌دهیم هر سیستم ریشه متناهی موضعی دارای یک ضرب داخلی پایاست و تحت شرایطی از هر شی رسته‌ی SV_K یک سیستم ریشه متناهی موضعی می‌سازیم. در گزاره‌ی ۵.۴، مقادیر ممکن برای نسبت دو طول ریشه را در یک سیستم ریشه متناهی موضعی تحویل‌ناپذیر بدست می‌آوریم. در بخش دوم، ریشه‌های کوتاه و بلند و ضرب داخلی پایای نرمال‌شده را تعریف می‌کنیم و سپس سیستم ریشه‌ی شبکه‌ای ساده و چند شبکه‌ای را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم، سیستم هم‌ریشه را معرفی می‌کنیم و در لم ۸.۴، نشان می‌دهیم فضای تولید شده توسط سیستم ریشه و سیستم هم‌ریشه‌ی نظیر آن یکریخت هستند و در قضیه‌ی اصلی این بخش با استفاده از مفاهیم رسته نکات جالبی در مورد سیستم‌های هم‌ریشه را ثابت می‌کنیم و درضمن نشان می‌دهیم که سیستم هم‌ریشه‌ی نظیر یک سیستم ریشه‌ی متناهی موضعی تحویل‌ناپذیر، تحویل‌ناپذیر است. در نتیجه‌ی ۱۲.۴، نشان می‌دهیم که سیستم هم‌ریشه‌ی نظیر یک سیستم ریشه‌ی شبکه‌ای ساده با آن سیستم ریشه یکریخت است و در نتیجه‌ی ۱۳.۴، نشان می‌دهیم که سیستم هم‌ریشه‌ی نظیر یک سیستم ریشه‌ی ۴ـشبکه‌ای با آن سیستم ریشه یکریخت است. در بخش چهارم، در مورد توسیع سیستم‌های ریشه‌ی متناهی موضعی حقیقی به یک میدان با مشخصه‌ی صفر صحبت می‌کنیم.

فصل پنجم شامل سه بخش است. در بخش اول، توپولوژی متناهی را تعریف می‌کنیم. در بخش دوم، گروه وایل بزرگ را معرفی می‌کنیم و در لم ۹.۵، انعکاس تعمیم یافته روی یک زیر مجموعه‌ی متعامد یک سیستم ریشه را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم، مفاهیم گروه وایل و گروه خودریختی را به حالت نامتناهی گسترش می‌دهیم و در قضیه‌ی ۱۳.۵، خواص تابعگونی گروه وایل را بیان و اثبات می‌کنیم. در نتیجه‌ی ۱۷.۵، نتایج جالبی در مورد تجزیه و طول ریشه‌ی یک عنصر گروه وایل را بیان

می‌کنیم، در قضیه‌ی ۲۱.۵، نشان می‌دهیم گروه وایل هر سیستم ریشه‌ی متناهی موضعی دارای نمایش مزدوجی است و در لم ۲۴.۵، نشان می‌دهیم سیستم ریشه‌ی نظیر به یک سیستم کاکستر نیز دارای نمایش مزدوجی است. در گزاره‌ی ۲۵.۵، گراف‌های کاکستر نظیر سیستم‌های کاکستر تحویل‌ناپذیر متناهی موضعی را دسته‌بندی می‌کنیم.

فصل ششم شامل سه بخش است. در بخش اول، پایه‌های ریشه و چند لم مربوط را بیان و اثبات می‌کنیم. در بخش دوم، دیاگرام‌های دینکین یک سیستم ریشه‌ی متناهی موضعی را تعریف می‌کنیم و در قضیه‌ی ۵.٦، نشان می‌دهیم گروه وایل نظیر یک سیستم ریشه که دارای پایه‌ی ریشه است، یک سیستم کاکستر است و در قسمت (پ) این قضیه، یک همریختی دیاگرام‌های دینکین را به یک جادهی بین سیستم‌های ریشه گسترش می‌دهیم. در بخش سوم، به دسته‌بندی دیاگرام‌های دینکین یک پایه‌ی ریشه‌ی تحویل‌ناپذیر و شمارا می‌پردازیم و خودریختی‌های آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

فصل ۱

رسته‌ی مجموعه‌ها در فضاهای برداری

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱ خانواده‌ای از اشیا را رسته‌ی $\mathbf{C}$ می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. برای هر دو شی A و B، مجموعه‌ای متناظر شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ نشان داده می‌شود به‌طوری‌که برای هر چهار شی A، B، C و D، که $(A,B)\neq(C,D)$، $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)\cap\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,D)=\emptyset$،

۲. برای هر سه شی A، B و C، تابع

$$.:\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B,C)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,C)$$

$$(g,f)\mapsto gf$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که

الف) برای هر چهار شی A، B، C و D، اگر $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$، $g\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B,C)$ و $h\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,D)$، آن‌گاه $h(gf)=(hg)f$،

ب) برای هر شی A، عضو $1_A\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,A)$ وجود داشته باشد که برای هر عضو $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ و هر عضو $g\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,A)$، $f1_A=f$ و $1_Ag=g$.

توجه کنید که هر عضو از $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ را یک ریختار از A به B می‌نامیم.

تعریف ۲.۱ فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته و $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از اشیا در رسته‌ی $\mathbf{C}$ باشد. یک شی $S=\prod_{i\in I} A_i$ همراه با خانواده‌ای از ریختارهای تصویری $\{\pi_i|\prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$، را حاصل‌ضرب خانواده‌ی $\{A_i\}$ می‌نامیم، هرگاه برای هر شی $B\in\mathbf{C}$ و هر خانواده از ریختارهای $\{f_i : B\longrightarrow A_i\}_{i\in I}$، یک ریختار یکتای $\theta : B\longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ وجود داشته باشد که برای هر $i\in I$، نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{tikzcd}
A_i & & \prod_{i\in I} A_i \arrow[ll, "\pi_i"'] \\
& B \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۳.۱ فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته و $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از اشیا در رسته‌ی $\mathbf{C}$ باشد. یک شی $S=\coprod_{i\in I} A_i$ همراه با خانواده‌ای از ریختارهای $\{\iota_i|A_i\longrightarrow \coprod A_i\}_{i\in I}$، را هم‌حاصل‌ضرب خانواده‌ی $\{A_i\}$ می‌نامیم، هرگاه برای هر شی $B\in\mathbf{C}$ و هر خانواده از ریختارهای $\{f_i : A_i\longrightarrow B\}_{i\in I}$، یک ریختار یکتای $\theta : \coprod_{i\in I} A_i\longrightarrow B$ وجود داشته باشد که برای هر $i\in I$، نمودار زیر جابه‌جایی است:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "\iota_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[dl, "\theta"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

تعریف ۴.۱ فرض کنید $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ دو رسته باشند. یک نگاشت $F:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{D}$ را تابعگون همورد می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) برای هر شی A از رسته‌ی $\mathbf{C}$، $F(A)$ شی‌ای از رسته‌ی $\mathbf{D}$ باشد،

۲) اگر $f:A\longrightarrow B$ یک ریختار در رسته‌ی $\mathbf{C}$ باشد، آن‌گاه $F(f):F(A)\longrightarrow F(B)$ یک ریختار در رسته‌ی $\mathbf{D}$ است،

۳) اگر $f:A\longrightarrow B$ و $g:B\longrightarrow C$ ریختارهایی دلخواه در رسته‌ی $\mathbf{C}$ باشند، آن‌گاه $F(g)F(f):F(A)\longrightarrow F(C)$ یک ریختار از رسته‌ی $\mathbf{D}$ است و

$$F(gf)=F(g)F(f),$$

۴) برای هر شی A از رسته‌ی $\mathbf{C}$، $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

تعریف ۵.۱ فرض کنید $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ دو رسته باشند. یک نگاشت $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ را تابعگون پادورد می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) برای هر شی A از رسته‌ی $\mathbf{C}$، $F(A)$ شی‌ای از رسته‌ی $\mathbf{D}$ باشد،

۲) اگر $f : A \longrightarrow B$ یک ریختار در رسته‌ی $\mathbf{C}$ باشد، آن‌گاه $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$ یک ریختار در رسته‌ی $\mathbf{D}$ است،

۳) اگر $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ ریختارهایی دلخواه در رسته‌ی $\mathbf{C}$ باشند، آن‌گاه $F(f)F(g) : F(C) \longrightarrow F(A)$ یک ریختار از رسته‌ی $\mathbf{D}$ است و

$$F(gf) = F(f)F(g),$$

۴) برای هر شی A از رسته‌ی $\mathbf{C}$، $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

تعریف ۶.۱ مجموعه‌ی Λ را مجموعه‌ی جهت‌دار می‌نامیم، هرگاه Λ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد به‌طوری‌که برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda$، عنصر $\nu \in \Lambda$ وجود داشته باشد که $\lambda \preceq \nu, \mu \preceq \nu$.

تعریف ۷.۱ فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته‌ی ملموس باشد. خانواده‌ی $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ را از اشیای رسته‌ی $\mathbf{C}$ درنظر می‌گیریم که با یک مجموعه‌ی جهت‌دار Λ اندیس گذاری شده است. برای هر $\mu, \lambda \in \Lambda$ که $\lambda \preceq \mu$، هرگاه ریختارهای $f_{\mu\lambda} : M_\lambda \longrightarrow M_\mu$ در شرایط زیر صدق کنند:

۱. برای هر $\lambda \in \Lambda$، $f_{\lambda\lambda} = \mathrm{Id}$،

۲. برای $\lambda \preceq \mu \preceq \nu$، $f_{\nu\mu} \circ f_{\mu\lambda} = f_{\nu\lambda}$.

$(M_\lambda, f_{\mu\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ را یک دستگاه مستقیم می‌نامیم.

تعریف ۸.۱ فرض کنید Λ یک مجموعه‌ی جهت‌دار و $(M_\lambda, f_{\mu\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ یک دستگاه مستقیم از یک رسته‌ی ملموس باشد. اجتماع مجزای خانواده‌ی $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ را با G نشان می‌دهیم. برای هر $x \in G$، $\alpha(x)$

را عنصر یکتای $\lambda \in \Lambda$ درنظر می‌گیریم که $x \in M_\lambda$. رابطه‌ی R را روی G تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که برای هر $x, y \in G$، xRy هرگاه یک عنصر $\nu \in \Lambda$ وجود داشته باشد که

$$f_{\nu\lambda}(x) \ = \ f_{\nu\mu}(y), \ \nu \succeq \lambda = \alpha(x), \ \nu \succeq \mu = \alpha(y).$$

رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی در G است. مجموعه‌ی خارج قسمتی $M = G/R$ را حد مستقیم دستگاه مستقیم $(M_\lambda, f_{\mu\lambda})$ می‌نامیم و آن را با $M = \varinjlim M_\lambda$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱ فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته باشد. $\mathbf{D}$ را یک زیررسته‌ی $\mathbf{C}$ می‌نامیم، هرگاه اشیای رسته‌ی $\mathbf{D}$ از اشیای رسته‌ی $\mathbf{C}$ باشد و ریختارهای رسته‌ی $\mathbf{D}$ که با $\mathrm{Hom}\mathbf{D}$ نمایش می‌دهیم، در شرایط زیر صادق باشد:

۱) اگر $A \in \mathbf{D}$، آن‌گاه $1_A \in \mathrm{Hom}\mathbf{D}$،

۲) اگر $f, g \in \mathrm{Hom}\mathbf{D}$ و fg در رسته‌ی $\mathbf{C}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه $fg \in \mathrm{Hom}\mathbf{D}$،

۳) اگر $f \in \mathrm{Hom}\mathbf{D}$ و $f : A \longrightarrow B$، آن‌گاه $A, B \in \mathbf{D}$.

به‌عبارت دیگر، $\mathbf{D}$ زیررسته‌ی $\mathbf{C}$ است، هرگاه $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$ و برای هر $A, B \in D$،

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B),$$

هم‌چنین، زیررسته‌ی $\mathbf{D}$ را یک زیررسته‌ی کامل از رسته‌ی $\mathbf{C}$ می‌نامیم، هرگاه برای هر $A, B \in \mathbf{D}$،

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B).$$

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید $\mathbf{C}$ یک رسته و A, B دو شی از رسته‌ی $\mathbf{C}$ باشد. ریختار $f : A \longrightarrow B$ را یک هم‌ارزی می‌نامیم، هرگاه ریختار $g : B \longrightarrow A$ در رسته‌ی $\mathbf{C}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $gof = 1_A$ و $fog = 1_B$.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ دو رسته و $T, S : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ دو تابعگون همورد باشد. یک نگاشت $g : S \longrightarrow T$ را تبدیل طبیعی می‌نامیم، هرگاه تابع g به هر شی $C \in \mathbf{C}$، ریختار $g_C : S(C) \longrightarrow T(C)$ از

رسته‌ی $\mathbf{D}$ را نظیر کند به‌طوری‌که برای هر ریختار $f : C \longrightarrow C'$ از رسته‌ی $\mathbf{C}$ نمودار زیر را در رسته‌ی $\mathbf{D}$ جابه‌جا کند:

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{g_C} & T(C) \\ {\scriptstyle S(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(f)} \\ S(C') & \xrightarrow[g_{C'}]{} & T(C') \end{array}$$

هرگاه برای هر $C \in \mathbf{C}$، تابع g_C یک هم‌ارزی باشد، g را یک هم‌ارزی طبیعی از تابعگون‌های S, T می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱ مجموعه‌ی همه‌ی جایگشت‌های مجموعه‌ی X را که با عمل ترکیب نگاشت‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد، گروه متقارن روی X می‌نامیم و این گروه را با $\mathrm{Sym}(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید G یک گروه و X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد که گروه G روی X عمل می‌کند. مجموعه‌ی $F \subseteq X$ را درنظر می‌گیریم. ثابت‌ساز نقطه‌ای F در G را با $G_{(F)}$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$G_{(F)} = \{x \in G | y^x = y,\ \forall y \in F\}.$$

(دراین‌جا $y^x := x^{-1}yx$.) توجه کنید $G_{(F)}$ زیرگروهی از G است.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و Λ یک مجموعه‌ی جهت‌دار باشد. هر تابع $f : \Lambda \longrightarrow X$ را یک تور در X می‌نامیم و تور f را با $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ نشان می‌دهیم جایی‌که $x_\lambda = f(\lambda)$. تور $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ را همگرا به نقطه‌ی $x \in X$ می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر همسایگی U از x، λ یی از Λ موجود باشد که برای هر $\lambda \preceq \nu$، $x_\nu \in U$.

قضیه ۱.۱ اگر X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد، آن‌گاه هر تور در X حداکثر به یک نقطه همگراست.

اثبات. به مرجع [۴۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۲.۱ فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع بین فضاهای توپولوژیک باشد. دراین‌صورت f پیوسته است اگروفقط اگر برای هر تور همگرای $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در X که به x همگراست، تور $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ در Y به $f(x)$ همگرا باشد.

اثبات. به مرجع [۴۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید G یک گروه باشد به‌طوری‌که با یک توپولوژی فضای توپولوژیک است. هرگاه نگاشت‌های

$$\begin{aligned} \rho_1 : G\times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \rho_2 : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1}, \end{aligned}$$

پیوسته باشند، G را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید G و H دو گروه توپولوژیک باشند. نگاشت $f : G \longrightarrow H$ را یک یکریختی گروه‌های توپولوژیک می‌نامیم، هرگاه f یکریختی گروه‌ها باشد و f و f^{-1} پیوسته باشند.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. یک تابع $f : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را که به هر زوج $(x,y)\in X\times X$ یک اسکالر $f(x,y)$ در $\mathbb{R}$ را نظیر می‌کند، یک فرم دوخطی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x,y,z\in X$ و $k\in\mathbb{R}$، شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} f(kx+y,z) &= kf(x,z)+f(y,z), \\ f(x,ky+z) &= kf(x,y)+f(x,z). \end{aligned}$$

فرم دوخطی f را متقارن می‌نامیم، هرگاه برای هر $x,y\in X$، $f(x,y)=f(y,x)$. فرض کنید $y\in X$، فرم دوخطی f را ناتباهیده می‌نامیم، هرگاه برای هر $x\in X$ که $f(x,y)=0$، $y=0$. فرم دوخطی f را معین