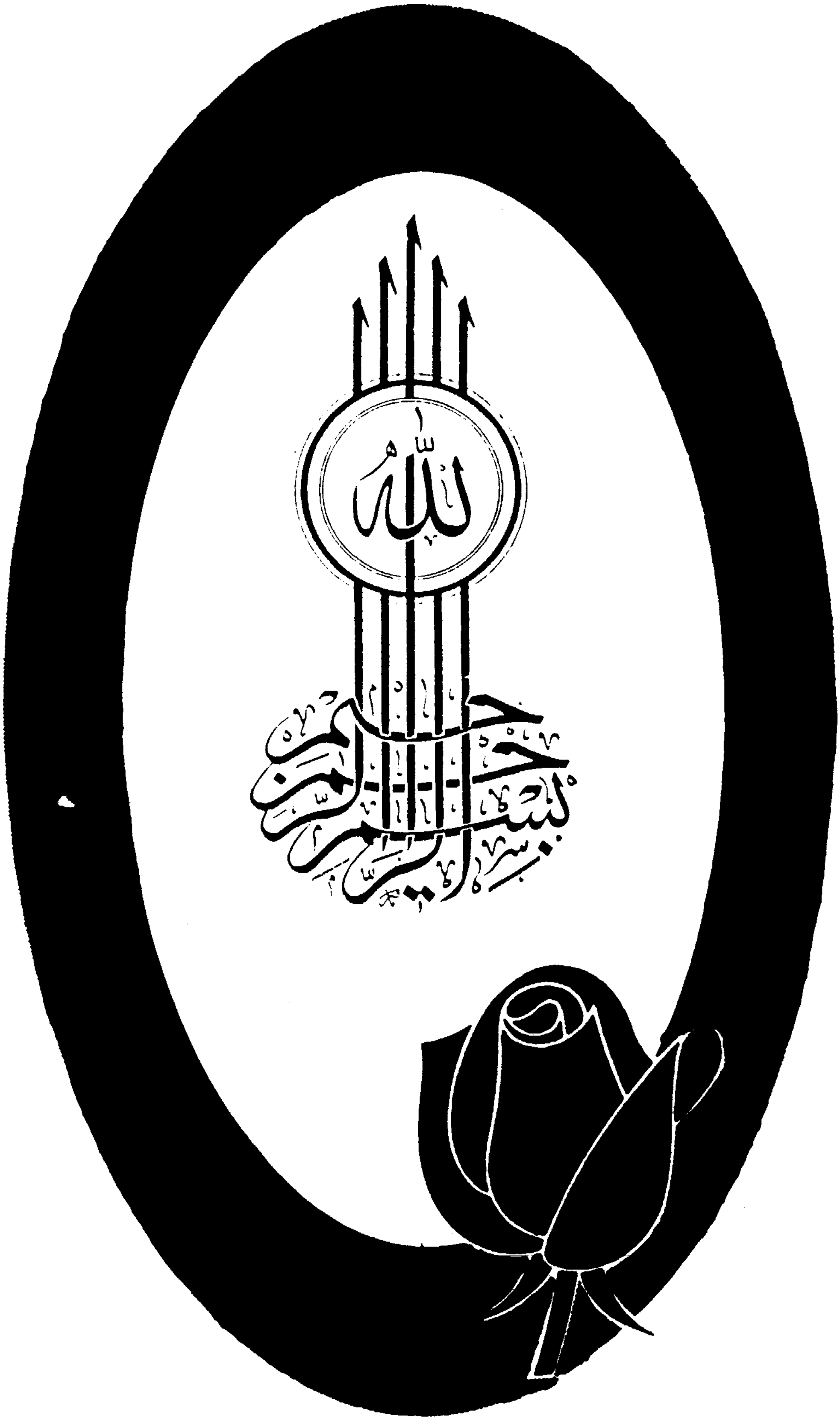
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکدهٔ علوم

# پایان نامه

جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی

موضوع

# حاصل ضرب $x$-گروهها

به راهنمائی:

استاد ارجمند: **آقای دکتر محمد رضا رجب زاده مقدم**

نگارش:

**مسعود اسماعیلی مود**

سال تحصیلی ۷۴ ـ ۱۳۷۳



حروفچینی لیزری از شرکت دانش ـ کار

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
ثبت مدارک
۱۳۷۸/۴/۲۰

بسمه تعالی

No: شماره:
Date: تاریخ:
پیوست:

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم - گروه ریاضی

Department of Mathematics
Ferdowsi University of Mashhad
P.O.Box 1159-91775,Mashhad
Islamic Republic of Iran

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ آقای مسعود اسماعیلی مود دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی در ساعتِ ۱۰ روزِ ۷۴/۶/۲۵ دراتاقِ شمارهٔ ۲۵ ساختمانِ خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضور امضاءکنندگان ذیل تشکیل‌گردید. پس‌از بررسی و نظر هیأت داوران، پایان‌نامه نامبرده بانمرهٔ نوزده‌و‌... (۱۹/-) موردتأیید قرارگرفت.

عنوان رساله : "حاصلضرب *-گروهها"

تعداد واحد : ۶ واحد

داور رساله : آقای دکتر اکبرحسنی
استادیار- گروه ریاضی - دانشگاه علم وصنعت

داور رساله : آقای دکتر محمود دیاسی
استادیار - گروه ریاضی - دانشگاه فردوسی مشهد

استاد راهنما : آقای دکترمحمدرضا رجب‌زاده مقدم
استاد - گروه ریاضی - دانشگاه فردوسی مشهد

مدیرگروه ریاضی : آقای دکتر اسداله نیکنام
استاد - گروه ریاضی - دانشگاه فردوسی مشهد

بلوار وکیل آباد - سه راه کوکا - خیابان شهیدباهنر - دانشکده علوم ۲ - صندوق پستی ۱۱۵۹-کد ۹۱۷۷۵ تلفن : ۸۱۷۷۴۹-۰۵۱
فاکس ۸۱۷۷۴۹-۰۵۱ ، پست الکترونیکی e-mail:math.sci@toos.um.ac.ir , Tel : 0098-51-817749 , Fax : 051-817749

تقدیم به:

پدر و مادرم

و با تقدیر از یاری همسرم

بسم الله الرحمن الرحیم

# لئن شکرتم لأزیدنکم

سپاس و ستایش خدا را که به ما نعمت بهترین دین یعنی اسلام، قرآن و ولایت ائمه اطهار علیهم السلام عطا فرمود و درود و سلام بر بهترین رسولان محمد مصطفی (ص)
که برگزیده آفریدگان است و رحمت بر عالمیان، سلام و درود بر اولیاء و اوصیاء آن حضرت که طریق سعادت نشان دادند و بر صلحاء امت اسلام و درود بر

شهیدان راه اعتلای اسلام بویژه امام شهداء

چه زیباست که گوشه‌ای از دانش آنها در جوار امام زمان عجل الله فرجه به عنوان علم و منبع حکمت باشد که خداوند رحیم و منان به وجه احسن ارزش آن را به توجه ما نیز
با چنین برکت و فزونی و توفیق به کارگیری همه آن در راه خدمت به اسلام و مردم عطا فرمود. نگارش این مجموعه مرهون حمایتهای بی دریغ
فرزانه امام جناب آقای ... ریاست محترم است که جا دارد مراتب امتنان عمیق خویش را نسبت به آن دانشور فاضل ابراز نمایم
همچنین از اساتید محترم جناب آقای دکتر محمدی و جناب آقای دکتر اکبری که نهایت عنایت را در مطالعه، اظهار نظر و
داوری در جلسه دفاعیه نمودند ابراز سپاسگزارم.

از طرفی بر خود لازم میدانم که از جناب آقای دکتر اسدالله بینام مدیر گروه ریاضی و تمام اساتیدی که طی دوران تحصیل چه در چند

و چه در مسجد شهید مشوق و راهنمای اینجانب بوده‌اند تشکر نمایم

کمکهای دوستان همدوره‌ای علی‌الخصوص آقایان سعیدی، جهانگیری، عباسپور، زمانی، مهدوی، پژمان، هوشنگی شایسته تقدیر

و همینطور مساعدتهای آقای رسول احسانی در تهیه منابع و مطالب، خانمهای رازی و صابری در حروفچینی است که جای تقدیر و تشکر

الهی تا بیرون این رساله قطعی دیگر از تحصیلم را به پایان رسانده‌ام، بر خود لازم میدانم که از پدر دانشمند و

مادر دلسوزم که زحماتشان را هیچگاه جبران‌کردنی نیست و همچنین از همسر مهربانم که بدون یاری ایشان انجام این کار ناممکن بود و همه جا صبر و شکیبایی

کمکهای مالیشان ممنون است قدردانی کنم

از برادر بزرگوارم آقای مهدی اسماعیلی که این رساله را با خط زیبایش مزین نموده و از شرکت کاردانش که حروفچینی کامپیوتری

این رساله را تقدیم می‌نمایم و از خانواده همسرم بخاطر کمکها و تشویقهای بی‌پایان سپاسگزارم

مسعود اسماعیلی

تابستان هزار و سیصد و هفتاد و هشت

# فهرست مندرجات

# مقدمه

رساله حاضر در شش فصل تنظیم گردیده است. نتایج بدست آمده در هر فصل توسط یک قضیه اساسی بیان شده در فصل مزبور هدایت می‌شوند. معمولاً فصول را با بیان چند حدس و احیاناً با طرح چند مسئله تحقیقی به پایان بوده‌ایم.

در فصل اول پیش نیازهای لازم در سراسر این رساله را فراهم آورده‌ایم. بدیهی است که برخی از مطالب این فصل عمومی بوده و در اکثر منابع قابل دسترس مانند [۴۹]، [۵۰] و [۵۱] پیدا می‌شوند. بدین منظور برای اثبات برخی از احکام و قضایا، منابع مورد نظر را ارجاع داده‌ایم.

در فصل دوم ابتدا خواص مقدماتی گروههای تجزیه شدنی را مورد بررسی قرار داده‌ایم که اکثر این مطالب را در بر گرفته از منابع [۳]، [۱۹]، [۵۶] و [۶۱] می‌باشند در این فصل به بررسی سئوالات زیر می‌پردازیم و در حالتهایی خاص به آنها پاسخ می‌گوئیم.

سئوال ۱: چه زیر گروههایی از گروه $G = AB$ تجزیه شدنی است؟

سئوال ۲: اگر گروه $G = AB$ حاصلضرب دو زیر گروه $A$ و $B$ باشد و $H \leq G$ آنگاه آیا

$(H)N_{B}(H)\ N_{G}(H) = N_{A}$

سئوال ۳: اگر گروه $G = AB$ حاصلضرب دو زیر گروه آبلی $A$ و $B$ باشد آنگاه آیا $G$ نیز آبلی است ؟

سئوال ۴: اگر گروه $G = AB$ حاصلضرب دو زیر گروه پوچتوان $A$ و $B$ باشد آنگاه آیا $G$ حل پذیر است ؟

در فصل سوم به بررسی این مطلب می‌پردازیم که اگر گروه $G = AB$ حاصلضرب دو زیر گروه $A$ و $B$ باشد به قسمی که $A$ و $B$ در شرط بیشین (یا کمین) صدق کنند آنگاه آیا $G$ نیز در شرط بیشین ( یا کمین)

صدق می‌کند؟

در فصل چهارم به دنبال جوابی برای این سئوال هستیم که اگر گروه $G = AB$ حاصلضرب دو زیر گروه $A$ و $B$ با رتبهٔ بدون متناهی ( یا رتبهٔ قسمت آبلی متناهی یا رتبهٔ پرفرمتناهی ) باشد آنگاه آیا $G$ نیز دارای همان رتبه می‌باشد در ادامه به بررسی این مطلب پرداخته‌ایم که اگر $x$ رده‌ای از گروهها باشد به قسمی که نسبت به زیر گروه، گروه خارج قسمت و توسیع بسته است و گروه $G = AB$ حاصلضرب دو $x$-گروه $A$ و $B$ باشد آیا $G$ هم یک $x$ گروه است ؟سپس به بررسی این خاصیت می‌پردازیم که اگر $H$ و $K$ $x$- زیر گروههایی نرمال از گروه دلخواه $G$ باشد آنگاه آیا حاصلضرب $HK$ نیز $x$ گروه است . دراین قسمت قضیه معروف فیتینگ و هیرش پلاتگین را که به سئوال فوق در حالتی که $x$ بترتیب رده گروههای پوچ توان باشند را عنوان می‌کنیم.در انتهای فصل چهارم به بحث در این مورد پرداخته‌ایم که با چه شرایطی زیر گروه فیتینگ و هیرش پلاتکین رادیکال از گروه تجزیهٔ شده $G = AB$، تجزیه شدنی است.

در فصل پنجم ابتدابه بررسی خواص مقدماتی زیر گروههایی زیر نرمال پرداخته‌ایم .سپس به دنبال جوابی برای این سئوال هستیم که اگر $H$ و $K$ دو زیر گروه زیر نرمال از گروه دلخواه $G$ باشند آنگاه با چه شرایطی زیر گروه تولید شده توسط $H$ و $K$ یعنی $<H , K>$ در $G$ زیر نرمال است. در ادامه این فصل به بررسی این سئوال پرداخته‌ایم که اگر $H$ زیر گروهی از گروه $G = AB$ باشد به قسمی که $H$ زیر نرمال $A$، و $B$ است آنگاه آیا $H$ در $G$ نیز زیر نرمال است ؟در فصل ششم نشان داده‌ایم که متناظر با هر تجزیه سه تایی به شکل $G = AB = AK = BK$ که در در آن $A$، $B$ و $K$ آبلی و $K$ نرمال است، حلقه‌ای رادیکال موجود است و به عکس متناظر باهر حلقهٔ رادیکال تجزیه‌ای سه‌تایی به شکل فوق موجود است.در انتهای این فصل به بررسی رابطهٔ نمای $A$ و $B$ با نمای گروه تجزیهٔ شدهٔ $G = AB$ پرداخته‌ایم.

# فصل اول

# پیشنیازها

دراین فصل به بیان تعاریف و نتایج مقدماتی مورد نیاز دراین پایان نامه می پردازیم.از اینرو نگاهی گذرا به مطالب خواهیم داشت

**تعریف ۱ـ۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه و $M$ زیر مجموعه‌ای ناتهی از $G$ باشد.به ازای هر $g\in G$ مجموعهٔ $M^g$ را چنین تعریف می کنیم.

$$M^g = \{g^{-1}mg \mid m\in M\}$$

مجموعهٔ $M^g$ را مزدوج $M$ در $G$ نامند.در حالتی که $M$ مجموعه‌ای تک عضوی باشد یعنی $M = \{m\}$ مختصراً می‌نویسیم $m^g$.پس $m^g = g^{-1}mg$

**تعریف ۱ـ۲.** فرض کنیم $G$ گروهی دلخواه و $M$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از $G$ باشد دراین صورت

$$N_G(M) = \{g\in G \mid M^g = M\}$$

را نرمال ساز $M$ در $G$ نامیم. درحالتی که $M$ زیرگروهی از $G$ باشد داریم $M\trianglelefteq N_G(M)$

**تعریف ۱ـ۳.** فرض کنیم $G$ گروهی دلخواه باشد. دراین صورت مرکز گروه $G$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Z(G) = \{z\in G : zg = gz \text{، به ازای هر } g \text{ در } G\}$$

واضح است که $Z(G)\trianglelefteq G$.

درگروه دلخواه $G$ قرار می دهیم $Z_0(G) = <1>$ ، $Z_1(G)=Z(G)$ و به طور عمومی تربه ازای هر $i\in N$ ، $Z_i(G)$ رابه استقراء به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$$

رشته

$$<1> = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq \ldots\ldots \subseteq Z_i(G) \subseteq \ldots\ldots \subseteq G$$

سری مرکزی بالایی[1] $G$ نامیده می شود.اگر به ازای $k$ ای

$$Z_k(G) = Z_{k+1}(G) = \ldots.$$

آنگاه $Z_k(G)$ ابر مرکز[2] $G$ نامیده می شود.

**تعریف ۱ـ۴.** فرض کنیم $x_1$ و $x_2$ عناصر گروه $G$ باشند.دراین صورت جابجاگر $x_1$ و $x_2$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$[x_1,x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$

به طور کلی یک جابجاگر ساده از وزن ($n > ۲$) به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می شود.

$$[x_1 ,x_2 ,\ldots, x_n] = [[x_1 ,x_2 ,\ldots,x_{n-1}] ,x_n]$$

حال فرض می کنیم $X_1$، $X_2$، ... و $X_n$ زیرمجموعه هایی از گروه $G$ باشند.زیرگروه جابجاگر $X_1$ و $X_2$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$[X_1,X_2] = <[x_1 ,x_2 ] \mid x_1 \in X_1 ,x_2 \in X_2>$$

وبه طور عمومی‌تر بااستقراء به ازای هر $n > ۲$

$$[X_1 ,X_2 ,\ldots, X_n] = [[X_1 ,X_2 ,\ldots,X_{n-1}] ,X_n]$$

---

1.Upper Central series

2.Upper Center

لم زیر به سادگی از تعریف بالا نتیجه می‌شود.

**لم ۱ـ۵.** فرض کنیم $G$ گروهی دلخواه و $x$ و $y$ و $z$ متعلق به $G$ باشند. دراین صورت

آ) $xy = yx[x,y]$

ب) $x^y = x[x,y]$

پ) $[x,y] = [y,x]^{-1}$

ت) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z] \quad , \quad [x,yz] = [x,z][x,y]^z$ (اتحادهای هال)

ث) $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1 \quad , \; [x,y,z^x][z,x,y^z][y,z,x^y] = 1$ (اتحادهای ویت)

ج) $[x,y^{-1}] = [y,x]^{y^{-1}}$

چون به ازای هر $x_1, x_2 \in G$، $[x_1, x_2]^{-1} = [x_2, x_1]$ درنتیجه به ازای هر $X_1, X_2 \subseteq G$،

$$[X_1,X_2] = [X_2,X_1]$$

**لم ۱ـ۶.** فرض کنیم $X$، $X_1$ و $X_2$ زیر مجموعه های گروه $G$ باشند و $H \leq G$. دراین صورت

آ) $$X_1^{X_2} = \langle x_1^{x_2} \mid x_1 \in X_1 , x_2 \in X_2 \rangle \leq G$$

ب) اگر $X^{\langle X,H \rangle}$ بستار نرمال $X$ در $\langle X ,H \rangle$ باشد(یعنی اشتراک تمام زیرگروههای نرمال $K$ از گروه $\langle X ,H \rangle, (X \subseteq K)$ آنگاه $X^H = X^{\langle X,H \rangle}$ و $X \subseteq X^H \trianglelefteq \langle X,H \rangle$

**برهان.** قسمت (آ) واضح است. برای اثبات (ب) بدیهی است که $X^H \leq X^{\langle X,H \rangle}$. به عکس فرض کنیم که

$$y = x^{x_1^{\alpha_1} h_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} h_2^{\beta_2} \dots x_n^{\alpha_n} h_n^{\beta_n}} \in X^{\langle X,H \rangle}$$

که $x, x_i \in X$ ، $h_i \in H$ و $\alpha_i , \beta_i \in Z$ ، $1 \le i \le n$ . بنابه (آ) چون $X^H$ زیرگروه است ، درنتیجه به ازای هر i که $1 \le i \le n$

$$(x^{x_i^{\alpha_i}})^{h_i^{\alpha_i}} \in X^H$$

یعنی $y \in X^H$. از اینرو $X^{<X,H>} = X^H$. بااستدلالی مشابه، قسمت دوم نیز به راحتی ثابت می‌شود.

**لم ۱ـ۷.** فرض کنیم X زیر مجموعهٔ گروه G و $K \le G$.دراین صورت

آ) $X^K = <X,[X,K]>$

ب) $[X,K]^K = [X,K]$

پ) اگر $K = <Y>$ آنگاه $[X,K] = [X,Y]^K$

**برهان** آ) بااستفاده از اتحاد $x^k = x[x,k]$ که $x \in X$ و $k \in K$ واضح است که $[X,K] \le X^K$. چون $X \subseteq X^K$ درنتیجه $<X ,[X,K]> \le X^K$. بعلاوه بنابه اتحاد فوق $X^K \le <X,[X,K]>$ .بنابراین

$$X^K = <X,[X,K]>$$

ب) بنابه تعریف بستارنرمال

$$[X,K]^K = <[x,k_1]^{k_2} \mid x \in X , k_1 k_2 \in K>$$

بنابه اتحاد هال

$$[x, k_1]^{k_2} = [x,k_2]^{-1}[x,k_1,k_2] \in [X,K]$$

از اینرو $[X,K]^K \le [X,K]$ بعلاوه $[X,K] \le [X,K]^K$ . بنابراین (ب) برقرار است.

پ ) چون $K = <Y> \supseteq Y$ درنتیجه $[X,Y] \le [X,K]$ از اینرو بنابه (ب)

$$[X,Y]^K \leq [X,K]^K = [X,K]$$

بنابراین کافی است نشان دهیم که $[X,K] \leq [X,Y]^K$ فرض کنیم $[x,k] \in [X,K]$ چون $K = <Y>$

درنتیجه با استفاده از اتحاد هال اثبات این قسمت واضح است.

**نتیجه ۱ـ۸.** فرض کنیم $H = <X>$ و $K = <Y>$ زیرگروههایی از گروه دلخواه $G$ باشند.در این صورت،

$$[H,K] = [X,Y]^{HK}$$

**برهان** : بنابه لم ۱ـ۷ (پ)

$$[H,K] = [X,K]^H = ([X,Y]^H)^k = [X,Y]^{HK}$$

**لم ۱ـ۹.**فرض کنیم $H$، $K$ و $L$ زیرگروههایی نرمال از گروه $G$ باشند.دراین صورت

$$[H,KL] = [H,K][H,L]$$

$$[HK,L] = [H,L][K,L]$$

برهان.بنابه اتحاد هال اثبات واضح است.

**لم ۱ـ۱۰.** فرض کنیم $r$ و $s$ اعدادی صحیح و مثبت باشند به قسمی که $r \leq s$ و $G_1, G_2, \ldots G_s$, $H$, $K$, زیرگروههایی نرمال از گروه $G$ باشند دراین صورت

$$[G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}, HK, G_{r+1}, \ldots, G_s] = [G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}, H, G_{r+1}, \ldots, G_s]$$

$$[G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}, K, G_{r+1}, \ldots, G_s]$$

**برهان.**اگر $r = s = 1$ آنگاه واضح است که حکم برقراراست.

حال فرض کنیم $r = s>1$ دراین صورت بنابه لم ۱ـ۹

$$[G_1 ,G_2 ,...,G_{r-1} ,HK] = [G_1,G_2,...,G_{r-1},H] [G_1,G_2,..,G_{r-1},K]$$

حال اگر $r = 1 < s$ آنگاه بنابه لم ۱ـ۹

$$[HK , G_2 , G_3 , ..., G_s] = [[HK , G_2] , G_3 , ... , G_s] = [[H , G_2][K, G_2], G_3 , ..., G_s]$$

$$= [[H , G_2 , G_3 ] [K , G_2 , G_3 ] , G_4 , .. , G_s]$$

باادامهٔ این روند به روش استقراء

$$[HK,G_2,...,G_s] = [H,G_2,....,G_s][K,G_2,....,G_s] \qquad (۲)$$

اکنون درحالت کلی فرض کنیم $1<r<s$.دراین صورت بنابه (۱) و(۲) داریم.

$$[G_1 , G_2 ,..., G_{r-1} , HK , G_{r+1} ,...,G_s] = [[G_1,G_2,...,HK] , G_{r+1} ,..., G_s]$$

$$= [[G_1 , G_2 ,..., G_{r-1} , H] [G_1 ,G_2 ,...,G_{r-1},K] , G_{r+1},...G_s]$$

$$= [[G_1 ,G_2 ,...,G_{r-1} , H] , G_{r+1},....,G_s] [[G_1 ,G_2 ,..,G_{r-1},K],G_{r+1},..,G_s]$$

$$= [G_1 , G_2 ,..., G_{r-1} , H , G_{r+1} ,...., G_s] [G_1 ,G_2 ,..., G_{r-1}, K, G_{r+1} , .., G_s]$$

از اینرو حکم برقراراست.

**تعریف ۱ـ۱۱.** فرض کنیم $G$ گروهی دلخواه و $H\leq G$ دراین صورت $H$ را یک زیرگروه مشخصهٔ[1] $G$ می‌نامیم هرگاه به ازای تمام خود ریختیهای $\varphi$ از $G$ داشته باشیم $\varphi(H)\leq H$

1.Characteristic