۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

تعمیم نظریه ی فضاهای انتقال پایا برای گروههای موضعا فشرده آبلی

استاد راهنما

دکتر قاسم نریمانی

استاد مشاور

دکتر عباس نجاتی

پژوهشگر

نسرین توکلی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به:

ای پدر از تو هر چه بگویم باز هم کم می آورم. خورشیدی شدی و از روشنایی ات جان گرفتم و در ناامیدی ها نازم را کشیدی و لبریزم کردی از شوق..

اکنون حاصل دستان خسته ات رمز موفقیتم شد. به خودم تبریک می گویم که تو را دارم و دنیا با همه ی بزرگیش مثل تو ندارد...

و تو ای مادر، ای شوق زیبایی نفس کشیدن، ای روح مهربان، هستی ام.

تو رنگ شادی هایم شدی و لحظه هایت را به تمام وجود وقف من کردی و عمری خستگی ها را به جان خریدی، تا اکنون توانستی طعم خوش پیروزی را به من بچشانی.

پروردگارا...

نه می توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شده، سیاه کنم و نه برای دستهای پینه بسته شان، که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم...

پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

و تقدیم به مهربان فرشتگانم، خواهرانم

که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های زندگیم مدیون حضور سبز آنهاست.

سپاس‌گزاری...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر قاسم نریمانی ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده آن‌ها، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر عباس نجاتی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

نسرین توکلی

تابستان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: توکلی نام: نسرین

عنوان پایان‌نامه: تعمیم نظریه ی فضاهای انتقال پایا برای گروههای موضعا فشرده آبلی

اساتید راهنما: دکتر قاسم نریمانی

استاد مشاور: دکتر عباس نجاتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: محقق اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۱ تعداد صفحه:۵۱

کلیدواژه‌ها: ۱ - فضاهای انتقال پایا. ۲ - گروههای موضعا فشرده آبلی. ۳- تابع برد. ۴- تارسازی.

چکیده

در این پایان نامه ما نظریه فضاهای انتقال پایا را به گروههای موضعا فشرده آبلی گسترش می دهیم. ابتدا فضاهای H- پایا را برای زیر گروه گسسته ی شمارش پذیر H از گروه موضعا فشرده آبلی G معرفی می کنیم که مفهوم تابع برد و تکنیک های تارسازی در این زمینه معتبر هستند. در ادامه ی این تعمیم ما ویژگی قاب ها و پایه های ریس این فضاها را با گسترش نتایج گذشته که برای گروه $\mathbb{R}^d$ و زیر گروه $\mathbb{Z}^d$ شناخته شده بودند، ثابت می کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

یک فضای انتقال پایا (SIS) زیر فضای بسته ی $L^2(\mathbb{R})$ است که تحت انتقال اعداد صحیح پایا است. تبدیل فوریه ی فضای انتقال پایا یک زیر فضای بسته است که تحت مدولاسیون اعداد صحیح پایا است.

فضاهای که تحت مدولاسیون اعداد صحیح پایا هستند، فضاهای پایای مضاعف نامیده می شوند. هر نتیجه روی فضاهای پایای مضاعف می تواند به یک نتیجه ی معادل در فضاهای انتقال پایا از طریق تبدیل فوریه، تبدیل شود. فضاهای پایای مضاعف توسط هلسون [1] [۷] و سرینی واسان [2] [۱۰، ۱۶] در دهه ی ۶۰ در زمینه ی عملگرهای مرتبط به آنالیز هارمونیک مورد مطالعه قرار گرفته است. فضاهای انتقال پایا در مسائل و برنامه های کاربردی از اهمیت فراوانی برخوردار است. این نظریه در ۲۰ سال اخیر بخصوص در نظریه تقریب سازی، نمونه گیری، موجک ها و قاب ها گسترش فراوانی داشته است. آنها به عنوان مدل در بسیاری از مشکلات در پردازش سیگنال و تصویر به کار می روند.

هلسون به منظور درک ساختار فضاهای انتقال پایای مضاعف به معرفی مفهوم تابع برد پرداخت. این یک ابزار ضروری در توسعه ی مدرن این نظریه شد [۱، ۳، ۴، ۱۴].

توابع برد، فضاهای انتقال پایا را بطور کامل طبقه بندی می کنند، و یکسری از تکنیک ها که در ادبیات به عنوان تارسازی شناخته شده اند را فراهم می کنند، این تکنیک ها به ما اجازه می دهند تا یک دید متفاوت و عمیق از این فضاها داشته باشیم. تکنیک های تارسازی در فضاهای انتقال پایا با تولید متناهی از اهمیت بسزایی برخوردارند. از ویژگی های اصلی این فضا این است که می توانند به وسیله انتقال اعداد صحیح از تعداد متناهی توابع تولید شوند.

[1] Helson
[2] Srinivasan

استفاده از تابع برد به ما اجازه می دهد تا مشکلاتی که روی فضاهای انتقال پایا با تولید متناهی است را به مسائل جبرخطی انتقال دهیم. فضاهای انتقال پایا به متغییرهای متعددی که به طور بدیهی تحت گروه $\mathbb{Z}^d$ غیر قابل تغییر هستند، به خوبی قابل تعمیم است.

وقتی با دقت به این نظریه می نگریم واضح می شود که این تئوری براساس عملگرهای گروه جمعی $\mathbb{R}^d$ و عملگرهای زیرگروه $\mathbb{Z}^d$ است.

چهارچوب گروه موضعا فشرده آبلی دارای چندین مزیت است. ابتدا به این دلیل دارای اهمیت است که یک نظریه معتبر برای گروههای کلاسیک مانند $\mathbb{Z}^d$ و $\mathbb{T}^d$ و $\mathbb{Z}_n$ است. همچنین در مسائل کاربردی مثل تعمیم تبدیل فوریه روی گروههای موضعا فشرده آبلی و تئوری کلووینک [۳] از اهمیت زیادی برخوردار است.

از سوی دیگر گروههای موضعا فشرده آبلی تعدادی از نتایج مختلف را درون یک چهارچوب کلی جمع و یکپارچه می کنند. این حقیقت مارا قادر به تجسم روابط پنهان بین قسمت های مختلف این نظریه می کند که در فهم بهتر و عمیق تر فضاهای انتقال پایا به ما کمک می کند.

ما در این پایان نامه نظریه فضاهای انتقال پایا در گروههای موضعا فشرده آبلی را توسعه می دهیم، تاکید ما بر روی توابع برد و تکنیک های تارسازی است.نظم موضوعات در $\mathbb{R}^d$ بخصوص در بونیک [۴] [۱] دنبال می شود. در [۱۲] نویسندگان در زمینه گروههای موضعا فشرده آبلی مطالعاتی انجام داده اند، بخصوص در زمینه فضاهای انتقال پایا که فضاهای انتقال پایا تولید شده به وسیله یک تابع منحصر بفرد هستند. اگر چه کل تئوری توضیح داده نمی شود.

این مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است.

در فصل اول به بیان تعاریف و مقدمات می پردازیم. در فصل دوم به پیشینه ی گروههای موضعا فشرده آبلی و مجموعه ی از علائم پایه ی نیاز داریم. در فصل سوم به بررسی فضای H− پایا و کاربرد تابع برد می پردازیم. در فصل چهارم خصوصیات قاب ها و پایه های ریس را روی فضاهای H− پایا بیان می کنیم.

[۳] Kluvanek
[۴] Bownik

فصل ۱

مفاهیم اولیه و مقدمات

۱.۱ تعاریف و مقدمات

الف. بطور کلی در این پایان نامه مجموعه ی اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ ، مجموعه ی اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ ، مجموعه ی اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ و مجموعه ی اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نشان می دهیم.

ب. گروههای کلاسیک آنالیز فوریه:

۱. گروه جمعی $\mathbb{R}$ از اعداد حقیقی با توپولوژی طبیعی.

۲. گروه جمعی $\mathbb{Z}$ از اعداد صحیح.

۳. گروه جمعی، حقیقی به پیمانه ی 2π یا معادل آن گروه مستدیر $\mathbb{T}$.

تعریف ۱.۱.۱. فرض می کنیم G یک مجموعه ی غیر تهی باشد، G را به همراه عمل دوتایی $*$ یک گروه می نامیم هرگاه در اصول زیر صدق کند.

۱. بسته باشد.

یعنی به ازای $a, b \in G$ ، $a * b \in G$.

۲. شرکت پذیر باشد.

یعنی به ازای $a, b, c \in G$ ، $(a * b) * c = a * (b * c)$.

۳. وجود عضو خنثی.

یعنی به ازای $a \in G$ عنصری مانند $e \in G$ موجود باشد، بطوریکه $a * e = e * a = a$.

۴. وجود عضو قرینه.

یعنی به ازای هر $a \in G$ یک عنصر منحصر به فرد مانند $b \in G$ موجود باشد، بطوریکه $a * b = b * a = e$.

تعریف ۲.۱.۱. گردایه τ از زیر مجموعه های، مجموعه X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره مند باشد.

۱. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

۲. به ازای $i = ۱, \ldots, n$، اگر $i \in \tau$ آنگاه: $V_۱ \cap V_۲ \cap \ldots\ldots \cap V_n \in \tau$

۳. هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایه ی دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش پذیر، یا شمارش ناپذیر) باشد آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$. فضای توپولوژیک را با (X, τ) نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری بوده و τ یک توپولوژی در آن باشد، فضای (X, τ) را فضای برداری توپولوژیک گویند هرگاه:

۱. به ازای هر $x \in X$، $\{x\}$ نسبت به توپولوژی τ بسته باشد.

۲. دو عمل جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

تعریف ۴.۱.۱. فضای توپولوژیک (X, τ)، فضای هاسدورف است هرگاه برای هر $x, y \in X$ با شرط $x \neq y$ همسایگی های U_x, V_y موجود باشند به قسمی که: $U_x \cap V_y = \emptyset$.

تعریف ۵.۱.۱. زیر مجموعه ی A از یک فضای توپولوژیک (X, τ) فشرده است هرگاه هر پوشش باز برای A، زیر پوششی متناهی داشته باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فضای توپولوژیک X را موضعا فشرده نامیم هرگاه صفر دارای یک همسایگی باشد که بستارش فشرده است.

تعریف ۷.۱.۱. نگاشت f میان دو فضای توپولوژیکی X و Y، یک هم ریختی است هرگاه:

۱. f یک به یک و پوشا باشد

۲. f پیوسته باشد

۳. f^{-1} پیوسته باشد.

دو فضای هم ریختی خواص توپولوژیکی یکسان دارند.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید V فضای برداری روی میدان F باشد و S زیر مجموعه ی V باشد. پوچساز S عبارت است از

تابعک های خطی f روی V که به ازای هر $\alpha \in V$، $f(\alpha) = 0$:

$$S^{\circ} = \{f \mid f(\alpha) = 0, \forall \alpha \in S\}.$$

تعریف ۹.۱.۱. فضای دوگان فضای توپولوژیک، یک فضای برداری X^* است که عنصرهایش تابع های خطی و پیوسته بر X هستند و

$$X^* = \{\Lambda : X \longrightarrow F\}$$

که Λ خطی و پیوسته است.

تعریف ۱۰.۱.۱. نگاشت T از فضای برداری X به توی فضای برداری Y را یک تبدیل خطی نامند هرگاه به ازای هر $x, x_1, x_2 \in X$ و هر اسکالر α:

۱. $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

۲. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

تعریف ۱۱.۱.۱. مجموعه $E \subseteq X$ را چگال نامند هرگاه $\bar{E} = X$.

تعریف ۱.۱.۱۲. گردایه ی m از زیر مجموعه های مجموعه ی X را یک σ -جبر در X نامیم اگر m از خواص زیر بهره مند باشد:

۱. $X \in m$.

۲. هرگاه $A \in m$ آنگاه $A^c \in m$ که در آن A^c همان متمم A در X است.

۳. هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $A_n \in m$ آنگاه $A \in m$.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد کوچکترین σ -جبر مانند β در X هست بطوریکه هر مجموعه ی باز در X متعلق به β است. اعضای β رامجموعه ی بورل در X نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۴. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، فرض می کنیم J_n مجموعه ی باشد که عنصرهایش اعداد صحیح $1, 2, 3, \ldots, n$ اند. همچنین J را مجموعه ی تمام اعداد صحیح مثبت می انگاریم. A متناهی است هرگاه به ازای n ی، $A \sim J_n$. مجموعه ی تهی نیز متناهی است.

تعریف ۱.۱.۱۵. A نامتناهی است هرگاه متناهی نباشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. مجموعه $E \subseteq X$ را کراندار نامیم هرگاه:

$$\exists M \in X, \quad \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad | x | \leq M.$$

تعریف ۱.۱.۱۷. اگر X فضای هاسدورف بطور موضعی فشرده و m، σ -جبر تمام مجموعه های بورل باشد. در این صورت اندازه ی تعریف شده بر m را یک اندازه ی بورل می نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض می کنیم $f \in \mathcal{F}(X, \mathcal{P})$ بستار $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. را تکیه گاه [1] f گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۹. مجموعه ی متشکل از تمام توابع پیوسته مانند $f : x \longrightarrow \mathbb{C}$ با تکیه گاه فشرده را با $C_c(x)$ نشان می‌دهیم.

[1] support

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض می کنیم G یک گروه موضعا فشرده آبلی باشد، شبکه یکنواخت H از G یک زیر گروه گسسته G است بطوریکه گروه خارج قسمتی G/H فشرده است.

تعریف ۲۱.۱.۱. یک مقطع G/H، یک مجموعه از نماینده های این خارج قسمت است که یک زیر مجموعه C از G شامل دقیقا یک عنصر از هر همدسته است.
بنابراین هر عضو $x \in G$ دارای یک نمایش منحصر به فرد به شکل $x = c + h$ است که $c \in C$ و $h \in H$.

تعریف ۲۲.۱.۱. یک فضا شمارای دوم نامیده می شود هرگاه توپولوژیش دارای پایه شمارا باشد. بطور واضح فضای توپولوژی T شمارای دوم است اگر گردایه ی شمارای $u = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه های T وجود داشته باشد. بطوریکه هر زیر مجموعه ی باز T را بتوان عضوهایی از اجتماع زیر خانواده ی u نوشت.

تعریف ۲۳.۱.۱. اگر τ یک توپولوژی بر X باشد، آنگاه (X, τ) را فضای توپولوژیکی می نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱. اگر m یک σ -جبر بر X باشد، آنگاه (X, m) را یک فضای اندازه پذیر می نامیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. اگر (X, m) و (Y, τ) و $f : X \longrightarrow Y$ باشد، تابع f را اندازه پذیر می نامیم هرگاه به ازای هر مجموعه ی باز در Y مانند W، $f^{-1}(W)$ در X اندازه پذیر باشد یا بعبارت دیگر

$$\forall \ W \in \tau \ \ \Rightarrow \ \ f^{-1}(W) \in m$$

.

تعریف ۲۶.۱.۱. اگر $(X, \sum)$ فضای اندازه و B فضای باناخ و F همان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، تابع $f : X \longrightarrow B$ اندازه ی ضعیف گفته می شود اگر برای هر تابع خطی و پیوسته ی $g : B \longrightarrow F$ تابع $gof : X \longrightarrow F : x \longrightarrow g(f(x))$ با رابطه $\sum$ اندازه پذیر و σ -جبر بورل روی F باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر H یک فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی $\langle \circ , \circ \rangle$ باشد و H با نرم $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ فضای نرم دار کامل گردد، یعنی هر دنباله ی کوشی در آن همگرا باشد، آنگاه H را فضای هیلبرت می نامند.

تعریف ۲۸.۱.۱. یک مجموعه از بردارهای U_α در فضای هیلبرت H، که در آن α در مجموعه ی اندیس گذاری مانند I تغییر می کند، متعامد یکه نام دارد هرگاه:

$$\begin{cases} \langle U_\alpha, U_\beta \rangle = ۱ & \alpha = \beta \\ \langle U_\alpha, U_\beta \rangle = ۰ & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

و به ازای هر $\alpha \in I$، $\| U_\alpha \| = ۱$

مجموعه های متعامد یکه ی ماکزیمال را اغلب پایه متعامد یکه می نامیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض می کنیم G یک گروه موضعا فشرده آبلی باشد و L یک شبکه ی یکنواخت در G باشد، زیر فضای بسته ی $V \subseteq L^۲(G)$ فضای انتقال پایا نامیده می شود هرگاه

$$f \in V \quad \Longrightarrow \quad T_k f \in V$$

برای هر $k \in L$ که برای هر $x \in G$، T_k عملگر انتقال به صورت زیر است:

$$T_k f(x) = f(k^{-۱}x).$$

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض می کنیم G یک گروه موضعا فشرده آبلی باشد و Γ دوگان گروه G است. روی تابع معین $f \in L^۱(G)$ تبدیل فوریه را بصورت زیر تعریف می کنیم. برای $\gamma \in \Gamma$ داریم:

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(x, -\gamma) \mathbf{d} m_G(x).$$

قضیه ۳۱.۱.۱. ([۱۵] قضیه ۱.۲.۵) *اگر گروه موضعا فشرده ی آبلی G، گسسته باشد، دوگان آن یعنی Γ، فشرده است. و اگر G، فشرده باشد، Γ، گسسته است.*

لم ۳۲.۱.۱. ([۱۵] لم ۲.۱.۳) *اگر Λ پوچساز H باشد، آنگاه H پوچساز Λ است.*

قضیه ۳۳.۱.۱. ([۱] قضیه ۲.۳) *فرض می کنیم $A \subset L^۲(\mathbb{R}^n)$ شمارش پذیر باشد. آنگاه*

۱. *$E(\mathcal{A})$ یک قاب با ثابتهای A و B است اگر و فقط اگر $\{\mathcal{T}\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{A}\} \subset l^۲$ به ازای تقریبا هر $x \in \mathbb{T}^n$ یک قاب با ثابت های A و B باشد. به علاوه $E(\mathcal{A})$ یک قاب پایه ی (اصلی) است اگر و فقط اگر $\{\mathcal{T}\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{A}\} \subset l^۲$ به ازای تقریبا هر $x \in \mathbb{T}^n$ یک قاب پایه ی (اصلی) باشد.*

۲. $E(\mathcal{A})$ یک خانواده ی ریس با ثابت های A و B است اگر و فقط اگر $\{\mathcal{T}\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{A}\} \subset l^2$ به ازای تقریبا هر $x \in \mathbb{T}^n$ یک خانواده ی ریس با ثابت های A و B باشد. به علاوه $E(\mathcal{A})$ یک پایه ی ریس است اگر و فقط اگر $\{\mathcal{T}\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{A}\} \subset l^2$ به ازای تقریبا هر $x \in \mathbb{T}^n$ یک پایه ی ریس l^2 باشد.

توجه داریم که $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. است.

قضیه ۳۴.۱.۱. ([۱] قضیه ۳.۳) *فرض می کنیم V یک فضای انتقال پایا ی $L^2(\mathbb{R}^n)$ باشد. آنگاه V را می توان تجزیه شده به عنوان مجموع متعامد زیر در نظر گرفت.*

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S(\varphi_i),$$

که φ_i یک مولد متعامد $S(\varphi_i)$ است و برای $i \in \mathbb{N}$، $\sigma(S(\varphi_{i+1})) \subset \sigma(S(\varphi_i))$. و به علاوه برای $i \in \mathbb{N}$ و به ازای تقریبا هر $x \in \mathbb{T}^n$ داریم

$$dim_{S(\varphi_i)}(x) = \parallel \mathcal{T}\varphi_i(x) \parallel .$$

و

$$dim_V(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \parallel \mathcal{T}\varphi_i(x) \parallel .$$

قضیه ۳۵.۱.۱. (قضیه ی همگرایی تسلطی). *فرض می کنیم (X, m) فضای اندازه پذیر و μ یک اندازه مثبت بر m باشد. و فرض می کنیم $\{f_n\}$ دنباله ی از توابع مختلط اندازه پذیر بر X باشد و $f_n \longrightarrow f$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$*

اگر $\varphi \in L^1(\mu)$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $\mid f_n \mid \leqslant \varphi$ و برای $f \in L^1(\mu)$ داریم:

$$lim \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

تعریف ۳۶.۱.۱. نسبت $(\sim)$ در مجموعه غیر خالی S یک تریب جزئی نامیده می شوند. هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\forall a \in S, \quad a \sim a$

۲. $\forall a,b \in S, \quad a \sim b\ ,\ b \sim a \implies a = b$

۳. $\forall a,b,c \in S, \quad a \sim b\ ,\ b \sim c \implies a \sim c$

تعریف ۳۷.۱.۱. تریب جزئی $(\sim)$ در مجموعه ی S ترتیب کلی نامیده می شود هرگاه هر دو عضو S قابل مقایسه باشند.

$\forall a,b \in S\ ,\ a \sim b$ یا $b \sim a$

لم ۳۸.۱.۱. *(لم زرن). [۲] فرض می کنیم $(S,\sim)$ یک مجموعه مرتب شده ی جزئی باشد، اگر هر $A \subseteq S$ ، که با نسبت $(\sim)$ مرتب شده ی کلی در S است، دارای کران بالا باشد، آنگاه S دارای یک عضو ماکسیمال است.*

(a کران بالا S است هرگاه $\forall x \in S\ ,\ x \leqslant a$)

قضیه ۳۹.۱.۱. *(قضیه توسیع تیتسه [۳]) در توپولوژی قضیه تیتسه بیان می کند که اگر X فضای توپولوژی نرمدار و $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ نگاشت پیوسته برای زیرمجموعه ی A از X به توی اعداد حقیقی باشد آنگاه نگاشت پیوسته $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد با*

$$F(a) = f(a).$$

برای همه ی $a \in A$. F توسیع پیوسته ی f نامیده می شود.

قضیه ۴۰.۱.۱. *(قضیه استون وایراشتراس [۴]) فرض می کنیم S یک فضای فشرده باشد و فرض می کنیم A یک جبر از توابع پیوسته حقیقی مقدار روی S با نقاط جداکننده مانند P_1 و P_2 باشد. اگر $P_1 \neq P_2$. وجود دارد $f \in A$ بطوریکه:*

$$f(P_1) \neq f(P_2).$$

[۲] Zorn
[۳] Tietze
[۴] Stone-Weierstrass

آنگاه بستار یکنواخت $\overline{A}$ از A، یک جبر $e^R(S)$ از همه توابع پیوسته حقیقی مقدار روی S است. یا یک جبر از همه توابع حقیقی مقدار به یک نقطه ی تنهای P_∞ که در S صفر می شود، است.

$e^R(S)$ یک جبر جابجایی روی میدان اعداد حقیقی است.

نکته ۴۱.۱.۱. (نتیجه قضیه استون وایراشتراس) اگر G فشرده باشد،

چند جمله ی مثلثاتی روی G بصورت یک زیر جبر چگال روی $\mathcal{C}(G)$ است.

این نتیجه می دهد،که اگر G فشرده باشد، چند جمله ی مثلثاتی در $L^P(G)$ که $۱ \leqslant P \leqslant \infty$ چگال است. که $\mathcal{C}(G)$ مجموعه همه توابع پیوسته مختلط مقدار روی G است.

قضیه ۴۲.۱.۱. (قضیه پلانشرل [۵]) چون اندازه ی لبگ $\mathbb{R}^۱$ نا متناهی است، $L^۲$ زیر مجموعه ی $L^۱$ نیست. و لذا تعریف تبدیل فوریه مستقیما برای هر $f \in L^۲$ قابل اعمال نمی باشد. اما اگر $f \in L^۱ \cap L^۲$، تعریف، قابل اعمال است. معلوم می شود که $f \in L^۲$. حال به بیان قضیه می پردازیم.

به هر $f \in L^۲$ می توان تابع $\widehat{f} \in L^۲$ را طوری مربوط کرد که خواص زیر برقرار باشند.

۱. هرگاه $f \in L^۱ \cap L^۲$ آنگاه $\widehat{f}$ تبدیل فوریه f است.

۲. به ازای هر $f \in L^۲$،

$$\| \widehat{f} \|_۲ = \| f \|_۲ .$$

۳. نگاشت $\widehat{f} \longrightarrow f$ یک یکریختی فضاهای هیلبرت از $L^۲$ به روی $L^۲$ است.

۴. رابطه ی متقارن زیر بین f و $\widehat{f}$ وجود دارد.

$$\Psi_A = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(t) e^{ixt} \mathrm{d}m(t).$$

$$\varphi_A = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} \mathrm{d}m(x).$$

وقتی $A \longrightarrow \infty$ داریم:

$\| \Psi_A - f \|_۲ \longrightarrow ۰$. و $\| \varphi_A - \widehat{f} \|_۲ \longrightarrow ۰$.

[۵] Plancherel

قسمت آخر، قضیه انعکاس L^2 نامیده می شود.

قضیه ۴۳.۱.۱. (قضیه انعکاس) هرگاه $f \in L^1$ و $\widehat{f} \in L^1$ و

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{ixt} \mathrm{d}m(t).$$

که $x \in \mathbb{R}^1$، آنگاه $g \in C_0$ و $f(x) = g(x)$ تقریبا همه جا برقرار است.

قضیه ۴۴.۱.۱. (قضیه لوسین [۶]) فرض می کنیم f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X با اندازه ی μ باشد. و $\mu(A) < \infty$. $f(x) = 0$ اگر $x \notin A$ و $\varepsilon > 0$. در این صورت تابعی مانند $g \in C_c(X)$ هست بطوریکه

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

بعلاوه می توان طوری ترتیب داد که

$$sup_{x \in X} \mid g(x) \mid \leq sup_{x \in X} \mid f(x) \mid .$$

[۶] Lusin

فصل ۲

گروههای موضعا فشرده آبلی و کاربردهای آن

۱.۲ پیشینه ی گروههای موضعا فشرده آبلی

در این قسمت برخی از نتایج پایه ای شناخته شده برای نظریه ی گروههای موضعا فشرده آبلی را که در این مقاله به آنها نیاز داریم، بررسی می کنیم. به این ترتیب نتایجی را که در بخشهای بعدی کاربرد دارند، مرتب می کنیم.
به غیر از مفاهیم ضروری، بیشتر مفاهیم حذف شده اند. برای شرح جزئیات و اثبات ها به مراجع [۸]، [۹] و [۱۵] رجوع شود.

۲.۲ معرفی گروههای موضعا فشرده آبلی

در سرتاسر این مقاله G گروه هاسدورف موضعا فشرده آبلی است و Γ یا $(\widehat{G})$ دوگان گروه G است. بطوریکه:

$$\Gamma = \{\gamma : G \longrightarrow \mathbb{C} \text{ ؛ است } G \text{ یک مشخصه پیوسته روی } \gamma\}$$

این مشخصه، خود یک تابع است بطوریکه:

۱. به ازای هر $x \in G$، $\mid \gamma(x) \mid = 1$.

۲. به ازای هر $x, y \in G$، $\gamma(x+y) = \gamma(x) \cdot \gamma(y)$.

بنابراین این مشخصه ها به توابع نمایی $\gamma_t(y) = e^{۲\pi ity}$ در حالت $G = (\mathbb{R}, +)$ تعمیم داده می شوند. چون در این زمینه هر دو ساختار توپولوژیکی و جبری با هم وجود دارند، اگر یک ایزومورفیسم توپولوژیکی از G به توی G' موجود باشد، گوییم گروه های G و G' یک یکریختی توپولوژیکی هستند و می نویسیم $G \approx G'$. که این ایزومورفیسم جبری یک هومومورفیسم است.
قضیه زیر برخی حالات مهم درباره ی گروههای موضعا فشرده آبلی را بیان می کند.

قضیه ۱.۲.۲. *فرض می کنیم G یک گروه موضعا فشرده آبلی و Γ دوگان گروه G باشد. آنگاه*

۱. *گروه دوگان Γ با عملیات $(\gamma+\gamma')(x) = \gamma(x)\gamma'(x)$ یک گروه موضعا فشرده آبلی است.*

۲. *دوگان گروه Γ یعنی $(\widehat{\Gamma})$ یک یکریختی توپولوژیکی به G با شناسه ی*
$\phi_x \in \widehat{\Gamma} \;\leftrightarrow\; x \in G$ ، است. که $\phi_x(\gamma) := \gamma(x)$

۳. *G گسسته (فشرده) است اگر و فقط اگر Γ فشرده (گسسته) باشد.*

برهان. برای مشاهده ی اثبات به مرجع [۱۵] رجوع شود. □

به عنوان یک نتیجه از بخش ۲ قضیه ۱.۲.۲ مناسب است که از نماد (x, γ) برای عدد مختلط $\gamma(x)$ استفاده نماییم. این بدان معناست که γ وابسته به x و برعکس x وابسته به γ است.
حال مثالهای پایه ی بیشتری که مربوط به آنالیز فوریه است بیان می کنیم.
معمولا فاصله ی $[۰, ۱)$ را با $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \;,\; \mid z \mid = ۱\}$ نشان می دهیم.

مثال ۲.۲.۲. *(۱) در حالتی که $G = (\mathbb{R}^d, +)$ است، گروه دوگان Γ هم $(\mathbb{R}^d, +)$ با شناسه ی $\gamma_x \in \Gamma \;\leftrightarrow\; x \in \mathbb{R}^d$ است، که $\gamma_x(y) = e^{۲\pi i\langle x,y\rangle}$.*

(۲) برای حالت $G = \mathbb{T}$، گروه دوگان، یک یکریختی توپولوژیکی به $\mathbb{Z}$ است. برای هر $k \in \mathbb{Z}$، با $\gamma_k \in \Gamma$ داریم $\gamma_k(\omega) = e^{۲\pi ik\omega}$.