بسم الله الرحمن الرحیم

# دانشگاه پیام نور

## پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض - گرایش آنالیز

دانشکده علوم
گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:
## عملگرهای ابردوری با الحاق های ابردوری

استاد راهنما:
استاد دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:
خانم دکترفریبا ارشاد


نگارش:
مزبان حبیبی بابادی


مرداد ۱۳۸۸

# دانشگاه پیام نور

## بسمه تعالی

## تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : عملگرهای ابردوری با الحاق های ابردوری

که توسط مزبان حبیبی بابادی درمرکزشیرازتهیه وبه هیأت داوران ارائه گردیده است

موردتأییدمیباشد.تاریخ دفاع:۸۸/۵/۵ نمره: ۱۸/۵ درجه ارزشیابی:عالی

اعضای هیأت داوران:

| نام و نام خانوادگی | هیأت داوران | مرتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| 1- دکتر بهمن یوسفی | استاد راهنما | استاد | |
| 2- دکتر فریبا ارشاد | استاد مشاور | استادیار | |
| 3- دکتر احمد خاکساری | استاد داور | استادیار | |
| 4- دکتر حسین توللی | نماینده تحصیلات تکمیلی | دانشیار | |

تقدیم به:

به آنان که دوستشان داریم، اما در کنار ما نیستند

# پدر و مادر عزیزمان

که در قلبمان جای دارند

و یادشان تا ابد موجب آرامش دلهایمان است

باتشکر از استاد ارجمندم:

# استاد دکتر بهمن یوسفی

که به حق، فکر کردن را به ما آموخت، نه فکرها را

وسپاس فراوان از همسر گرانقدر و فرزند عزیزم:

## که سختی هجران در دوران تحصیل را، با من شریک شدند

و:

قدردانی ویژه از همه کسانیکه، بهر شکل، در تهیه، نگارش و تدوین این پایان نامه همکاری داشته اند

## چکیده

یکی از شاخه های مدرن ریاضی محض ، مطالعه ابردوری بودن عملگرهاست که توسط مطالعات جی.دی. بیرهوف ، در ارتباط با مدارهای عملگرها روی فضای توابع تام آغاز شد . این پایان نامه در چهار فصل تهیه شده است . در فصل اول به بیان پاره ای تعاریف و مقدمات خواهیم پرداخت که در فصول آتی مورد استفاده هستند . در ادامه این فصل نیز تاریخچه ای مختصر از عملگرهای ابردوری ارائه خواهیم داد . فصل دوم شامل دو بخش می باشد . در بخش اول به بررسی بردارهای ابر دوری و فرادوری پرداخته و پاره ای از ویژگی های آنها را بررسی کرده و زیر فضاهای پایا را معرفی خواهیم نمود و سپس محک ابردوری بیان می کنیم . در ادامه قضیه معیار ابردوری بودن را بیان و اثبات خواهیم کرد . در این فصل همچنین ثابت می کنیم، اگر تمام بردارهای ناصفر فضای هیلبرت برای عملگر $T$ ابردوری باشند ، آنگاه $T$ زیر مجموعه های پایای بسته و نا بدیهی ندارد . در بخش دوم این فصل زیر فضاهای پایای بردارهای ابردوری را برای حالت اسکالر حقیقی بررسی خواهیم نمود . در فصل سوم فضاهایی را بررسی می کنیم که یک عملگر ابردروی با دوگان ابردوری بر آن وجود دارد . در ضمن نشان می دهیم هر عملگر ابردوری روی فضای برداری موضعا محدب حقیقی ، دارای منیلفلد خطی پایای چگال از بردارهای ابردوری است . برای این کار با بیان قضیه سالاس یک چنین فضایی را معرفی می کنیم . با تعریف پایه شودر و پایه متقارن و پایه انقباضی به معرفی تعداد دیگری از فضاهایی می پردازیم که می توان عملگرهایی با الحاق های ابر دوری روی آن فضاها تعریف نمود . در فصل چهارم به بررسی عملگرهای مشتق ابردوری می پردازیم و برای این کار فضای توابع تام از یک متغیر مختلط ارائه شده با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیر مجموعه های فشرده صفحه را نیز مورد بررسی قرار می دهیم .

## فهرست مطالب

# فصل اول

# مقدمه

# عملگرهای ابردوری با الحاق های ابردوری

فصل اول شامل دو بخش می باشد . در بخش اول این فصل به بیان پاره ای تعاریف و مقدمات که در فصول آتی مورد استفاده هستند ، می پردازیم. در ادامه و در بخش دوم تاریخچه ای مختصر از عملگرهای ابردوری ارائه خواهیم داد . یادآوری می شود که در این فصل سعی بر آن بوده تا از ارائه ی تعاریف ساده و اثبات های اولیه که در کتب مختلف وجود دارد ، صرف نظر شود .

## ۱-۱ بخش اول

## قضایا و تعاریف مهم

۱-۱-۱ **قضیه هان- باناخ**[۱] : فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرمال باشد ، در اینصورت اگر $M$ یک زیر فضا از $\mathcal{X}$ بوده و $f \in M^*$ ، آنگاه تابع $F \in \mathcal{X}^*$ وجود دارد ، بطوری که :

$$\|F\| = \|f\| \quad , \quad F\big|_M = f$$

**اثبات** : رجوع شود به مرجع ۳۸ صفحه ۷۸ یا مرجع ۴۲ صفحه ۱۳۱ . □

۱-۱-۲ **نتیجه** : اگر $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد و $x \in \mathcal{X}$ آنگاه :

$$\|x\| = Sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{X}^*, \|f\| \leq 1\}$$

و نیز

$$\exists f_0 \in \mathcal{X}^* \quad s.t. \quad \|f_0\| \leq 1 \qquad \|x\| = |f_0(x)|$$

۱-۱-۳ **قضیه ی نمایش ریس**[۲] : فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای هاوسدورف[۳] موضعا فشرده و $\Lambda$ یک تابع خطی مثبت بر $C_c(\mathcal{X})$ باشد ، در اینصورت $\sigma$-جبری چون $m$ شامل همه ی مجموعه های

[۱] - Hahn – Banach Theorem
[۲] - Reisz Representation Theorem
[۳] - Hausdorff Space

بورل در $\mathscr{X}$ و همچنین یک اندازه مثبت منحصر بفرد $\mu$ بر $m$ وجود دارد که $\Lambda$ را با مفهوم زیر نمایش می دهد :

۱-۱-۳-۱) به ازای هر $f \in C_c(\mathscr{X})$ داریم : $\Lambda(f) = \int_X f d\mu$

۱-۱-۳-۲) به ازای هر مجموعه ی فشرده $K \subseteq \mathscr{X}$ داریم : $\mu(K) < \infty$ .

۱-۱-۳-۳) به ازای هر $E \in m$ داریم :

$$\mu(E) = \inf\{ \mu(V) : E \subseteq V \ \ , V \ \ is \ \ open \}$$

۱-۱-۳-٤) برای هر مجموعه باز $E \in m$ که $\mu(E) < \infty$ داریم :

$$\mu(E) = Sup\{\mu(K) : K \subseteq E \ \ , \ K \ \ is \ \ compact \}$$

۱-۱-۳-٥) اگر $E \in m$ و $A \subseteq E$ و $\mu(E) = 0$ آنگاه $A \in m$ .

**اثبات** : رجوع شود به مرجع ۴۲ صفحه ٥٦ یا مرجع ۳۸ صفحه ۱۱. □

۱-۱-٤ **تعریف مجموعه نرمال** : فرض کنید $C(G,\mathbb{C})$ مجموعه تمام توابع پیوسته از $G$ به $\mathbb{C}$ باشد ، در اینصورت گردایه $\mathrm{F} \subseteq C(G,\mathbb{C})$ را نرمال گویند ، هرگاه هر دنباله از توابع در $\mathrm{F}$ دارای زیر دنباله ای همگرا به تابعی مانند $g$ در $C(G,\mathbb{C})$ باشد .

۱-۱-٥ **تعریف مجموعه موضعا کران دار** : گردایه ی $\mathrm{F} \subseteq H(G)$ را موضعا کراندار گوئیم ، هرگاه برای هر نقطه ی $a \in G$ مقدار ثابت $M$ و گوی $B(a,r)$ در $G$ موجود باشد ، بطوری که برای هر $g \in \mathrm{F}$ و هر $z$ در $B(a,r)$ داشته باشیم : $|g(z)| \leq M$ .

# عملگرهای ابردوری با الحاق های ابردوری

۱-۱-٦ **تعریف $F$-فضا** : گوئیم $E$ یک $F$ - فضاست ، هرگاه $E$ یک فضای برداری متری تام باشد .

۱-۱-۷ **قضیه** : هر فضای باناخ یک $F$ - فضاست.

( با توجه به تعریف فضای باناخ این قضیه بدیهی است . )

۱-۱-۷-۱ **نتیجه** : چون هر فضای هیلبرت[٤] یک فضای باناخ است ، پس هر فضای هیلبرت نیز یک $F$ - فضاست .

۱-۱-۸-۱ **تعریف فضای بئر**[٥] : فضای $\mathcal{X}$ را یک فضای بئر می گویند ، هرگاه برای هر گردایه $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیر مجموعه های بسته و شمارش پذیر $\mathcal{X}$ که درون هر کدام در $\mathcal{X}$ تهی باشد ، $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ دارای درون تهی باشد .

۱-۱-۸-۲ **قضیه ( کاتگوری- بئر )** : فضای $\mathcal{X}$ یک فضای بئر است ، اگر و تنها اگر ، برای هر گردایه شمارش پذیر از زیر مجموعه های باز $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathcal{X}$ که هر کدام در $\mathcal{X}$ چگال باشد ، $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ نیز چگال باشد .

**اثبات** : رجوع شود به مرجع[۲] ٤ صفحه ۱۲۲. □

---
٤ - Hilbert space
٥ - Bair space

۱-۱-۹ **تعریف مدار پسرو** : منظور از یک مدار پسرو $x$ تحت دنباله $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر $L(E)$ مجموعه ی $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ در $E$ است ، بطوری که $x_0 = x$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $T_n(x_n) = x$ . بردار $x$ تحت دنباله $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq L(E)$ ممکن است مدار پسرو نداشته و یا بیش از یک مدار پسرو داشته باشد .

۱-۱-۹-۱) **مثال** : دنباله عملگرهای $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بصورت زیر درنظر می گیریم :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ T_n(x) = x$$

در این صورت مجموعه ی تک عضوی $\{x\}$ یک مدار پسرو برای $x \in \mathcal{X}$ تحت دنباله $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ می باشد ، زیرا :

$$x_0 = x_1 = \ldots \ \ , \ \ x_0 = T_1(x_1) = T_2(x_2) = \ldots = x$$

۱-۱-۹-۲) **مثال** : اگر $x \in \mathcal{X}$ برداری ناصفر بوده و به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ عملگر $T_m : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ عملگر ثابت صفر باشد ، آنگاه :

$$\left(\forall t \in \mathcal{X} \ , \ \forall m \in \mathbb{N} \ , \ T_m(\mathrm{t}) = 0 \ , \ \mathrm{x} \neq 0\right) \Rightarrow \left(T_m(t) = 0 \neq x\right)$$

یعنی $x$ تحت این دنباله مدار پسرو ندارد .

۱-۱-۱۰ **تعریف بردار ویژه و مقدار ویژه** : فرض کنیم $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ یک عملگر خطی باشد ، در اینصورت بردار ناصفر $x$ را یک بردار ویژه برای $T$ می نامیم ، هرگاه :

$$\exists \lambda \in \mathbb{F} \quad s.t. \quad Tx = \lambda x$$

در این حالت $\lambda$ را مقدار ویژه ی متناظر با بردار $x$ می گویند .

۱-۱-۱۱**قضیه :** فرض کنیم $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ یک عملگر خطی با ماتریس $A$ باشد ، در اینصورت $\lambda$ یک مقدار ویژه برای $T$ است ، اگر و تنها اگر ،

$$\det(A-\lambda I)=0$$

**اثبات :** رجوع شود به مرجع ٤٤. □

۱-۱-۱۲**تعریف طیف نقطه ای عملگر :** اگر $T$ یک عملگر خطی کران دار بر فضای $H$ باشد و $A\in B(H)$ ، آنگاه $\sigma_p(A)$ را برای نمایش طیف نقطه ای $A$ بکار می بریم ، و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\sigma_p(A)=\{\lambda : Ker(A-\lambda I)\neq\emptyset\}$$
$$=\{\lambda \text{ یک مقدار ویژه برای A است } \lambda\}$$

۱-۱-۱۳**تعریف :** فرض کنید $T\in B(\mathcal{X})$ ، در اینصورت مجموعه ی $\bigcup_{n\geq1}Ker(T^n)$ را هسته تعمیم یافته $T$ می گویند . یعنی

$$\left(\bigcup_{n\geq1}Ker(T^n)\right)=\{x\in\mathcal{X}:\exists n\in\mathbb{N}\ \ s.t.\ \ T^nx=0\}$$

۱-۱-۱٤**تعریف مدار یک بردار :** فرض کنیم $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ یک عملگر باشد ، در این صورت $Orb(T,x)$ را جهت نمایش مدار $x$ تحت عملگر $T$ بکار برده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$Orb(T,x)=\{x,Tx,T^2x,T^3x,\dots\}$$
$$=\{T^nx : n=0,1,2,3,\dots\}$$

۱-۱-۱۵**تعریف عملگر ابردوری** : عملگر پیوسته $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ را یک عملگر ابردوری گویند ، هرگاه $x\in\mathcal{X}$ وجود داشته باشد ، بطوری که مدار $x$ تحت $T$ در $\mathcal{X}$ چگال باشد . یعنی

$$\overline{Orb(T,x)}=Cl\big(Orb(T,x)\big)=\mathcal{X}$$

در این حالت $x$ را یک بردار ابردوری برای عملگر $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ می گویند . اگر عملگرهای $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ و $T':\mathcal{X}'\to\mathcal{X}'$ ابردوری باشند ، آنگاه عملگر $T$ را ابردوری دوگان می گویند . در ضمن اگر عملگر $T$ کراندار باشد ، آنگاه $T^*=T'$ .

۱-۱-۱۶**تعریف عملگر دوری** : فرض کنید $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ یک عملگر پیوسته باشد . در اینصورت اگر فضای خطی پدید آمده توسط $Orb(T,x)$ در $\mathcal{X}$چگال باشد ، آنگاه $x$ را یک بردار دوری برای $T$ می نامیم و عملگر $T$ را یک عملگر دوری می گویند .

توجه : با این تعریف هر بردار ابردوری یک بردار دوری است .

۱-۱-۱۷**تعریف عملگر فرادوری** : اگر ضرایب اسکالر اعضای $Orb(T,x)$ در $\mathcal{X}$ چگال باشد ، آنگاه $x$ را یک بردار فرا دوری ( سوپردوری ) برای $T$ نامیده و عملگر $T$ را یک عملگر فرادوری می گویند .

۱-۱-۱۸**تعریف زیر فضای ابردوری** : اگر هر عضو غیر صفر در زیر فضای $M$ از فضای $\mathcal{X}$ یک بردار ابردوری باشد ، آنگاه $M$ را یک زیر فضای ابردوری برای $\mathcal{X}$ می نامند .

۱-۱-۱۹ **تعریف دنباله ابردوری :** فرض می کنیم $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از عملگرهای کران دار خطی بر $\mathcal{H}$ باشد ، بردار $x$ را یک بردار ابردوری برای دنباله $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ می گوئیم ، هرگاه $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد . در این حالت دنباله $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ را دنباله ی ابردوری می گویند .

توجه : می توان گفت عملگر $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ ابردوری است ، اگر و تنها اگر، دنباله $\{T^n\}_{n=0}^{\infty}$ ابردوری باشد .

۱-۱-۲۰ **تعریف عملگر انتقال پسرو : فرض کنیم** $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\ell_2(\mathbb{Z})$ و پایه ی متعامد برای $\ell_2(\mathbb{N})$ بطور مشابه تعریف می شود . همچنین فرض کنیم $\omega=\{\omega_n\}$ دنباله ای از اعداد صحیح مثبت باشد .

الف : عملگر

$$S:\ell_2(\mathbb{N})\to\ell_2(\mathbb{Z})$$

با ضابطه

$$Se_1=0 \quad ; \quad Se_n=\omega_n e_{n-1} \quad , \ n>1$$

را انتقال پسرو یک جانبه وزندار می نامیم . همچنین دوگان $S$ یعنی $S^*$ بصورت زیر ارائه می شود

$$S^* e_n=\omega_{n+1}e_{n+1}$$

ب : عملگر

$$S:\ell_2(\mathbb{Z})\to\ell_2(\mathbb{Z})$$

با ضابطه

$$Se_n=\omega_n e_{n-1} \qquad , \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$$

را انتقال پسرو دو جانبه وزندار می نامیم .

۱-۱-۲۱ **تعریف عملگر انتقال پیشرو :**

الف : فرض کنید $\{e_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ پایه ی استاندارد برای فضای $\ell^2(\mathbb{Z})$ باشد . عملگر

$$S:\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z})$$

که بصورت

$$Te_n=\omega_n e_{n+1} \quad , \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

تعریف می شود ، یک عملگر انتقال پیشرو دوجانبه وزندار می نامند ، که دنباله کراندار $\{\omega_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ وزن های مثبت $T$ هستند .در ضمن الحاقی این عملگر بصورت زیر است

$$Te_n=\overline{\omega_{n-1}}e_{n-1} \quad , \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

ب : **فرض کنیم** $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\ell_2(\mathbb{Z})$ و $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه ی متعامد برای $\ell_2(\mathbb{N})$ و دنباله $\omega=\{\omega_n\}$ دنباله ای از اعداد صحیح مثبت باشد .عملگر

$$S:\ell^2(\mathbb{N})\to\ell^2(\mathbb{Z})$$

با ضابطه

$$Se_n=\omega_n e_{n+1}$$

را عملگر انتقال پیشرو وزندار یکطرفه می نامیم. دنباله $\omega=\{\omega_n\}$ وزن های مثبت $S$ هستند .

عملگر الحاقی این تبدیل بصورت زیراست

$$T^*e_n=\overline{\omega_n}.e_n \quad , \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

۱-۱-۲۲**تعریف پایه ی شودر**[۶] : دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$را در فضای باناخ $\mathcal{X}$یک پایه ی شودر گوئیم ، هرگاه برای هر $x\in\mathcal{X}$ یک دنباله یکتا از اسکالرها مانند $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود باشد ، بطوری که :

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$$

[۶] - Shouder Basis

## عملگرهای ابردوری با الحاق های ابردوری

۱-۱-۲۳**تعریف دنباله پایه ای :** دنباله ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای باناخ $\mathcal{X}$ یک دنباله پایه ای گوئیم ، هرگاه به ازای هر $x \in \overline{span(x_n)}$ یک دنباله یکتا از اسکالرها مانند $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود باشد بطوری که :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

۱-۱-۲۴**تعریف ثابت پایه ای :** فرض کنید دنباله ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله پایه ای در فضای باناخ $\mathcal{X}$ بوده و $P_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ عملگرهای تصویری با ضابطه

$$P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

باشند ،

در اینصورت عدد

$$M = \sup_n \|P_n\|$$

را ثابت پایه ای دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ می گویند .

۱-۱-۲۵**تعریف تابعک دو متعامدی :** فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ با پایه شودر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد ، در اینصورت به ازای هر $n$ ، تابعک خطی $x_n^*$ را با ضابطه ی

$$x_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = a_n x_n$$

تعریف می کنیم .

۱-۱-۲۶ **تعریف پایه انقباضی** : پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از فضای باناخ $\mathcal{X}$ را انقباضی گویند ، هرگاه $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه برای $\mathcal{X}^*$ باشد .

۱-۱-۲۷ **تعریف پایه بطور کلی کراندار** : پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از فضای باناخ $\mathcal{X}$ را بطور کلی کراندار می گوئیم ، هرگاه برای هر انتخاب از اسکالرها مانند $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ که در شرط

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$$

صدق می کند ، سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ همگرا باشد .

۱-۱-۲۸ **تعریف پایه نامشروط** : پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از فضای باناخ $\mathcal{X}$ را نا مشروط می گوئیم ، هرگاه به ازای هر $x \in \mathcal{X}$ بسط $x$ بر حسب $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، یعنی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ ، بطور نا مشروط همگرا باشد .

توجه : اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ در یکی از شرایط قضیه ۳-۱۰ صدق کند ، می گوییم سری بطوی نا مشروط همگراست . برای توضیحات بیشتر به مرجع ۱۸ مراجعه کنید .

۱-۱-۲۹ **تعریف دو پایه معادل** : دو پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $\mathcal{X}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $Y$ را معادل گوئیم ، هرگاه برای هر انتخاب از اسکالرها مانند $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ داشته باشیم

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n < \infty \right) \Leftrightarrow \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n < \infty \right)$$

۱-۱-۳۰ **تعریف پایه متقارن** : پایه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای باناخ $\mathcal{X}$ را یک پایه متقارن گوئیم ، هرگاه به ازای هر جایگشت $\Pi$ از اعداد طبیعی ، دنباله های $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{x_{\Pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ معادل باشند.

۱-۱-۳۰-۱) **تذکر** : اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه متقارن در فضای باناخ $\mathcal{X}$ باشد ، انگاه به ازای هر جایگشت $\Pi$ از اعداد طبیعی ، عملگر $V_\Pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ با ضابطه

$$V_\Pi(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{\Pi(n)}$$

یک عملگر کراندار است . به عنوان مثال فضای $\ell_p$ دارای یک پایه متقارن و انقباضی است .

۱-۱-۳۱ **تعریف مجموعه متعادل** : مجموعه ی $A \subseteq \mathcal{X}$ را متعادل گوئیم ، هرگاه به ازای هر $x \in \mathcal{X}$ و هر $a$ که $|a| \leq 1$ داشته باشیم $ax \in A$.

۱-۱-۳۲ **تعریف فضای شبه فشرده** : زیر مجموعه ی $A$ از فضای توپولوژیکی $V$ را شبه فشرده می گوئیم ، هرگاه $\overline{A}$ فشرده باشد .

۱-۱-۳۳ **تعریف بردار متناوب** : بردار $x$ را برای عملگر خطی و کراندر $T$ متناوب می گوئیم ، هرگاه عدد طبیعی $n$ وجود داشته باشد ، بطوری که $T^n x = x$ و $x$ را برای عملگر $T$ یک بردار شبه متناوب نامیم ، هرگاه مدار $\{T^n x\}$ شبه فشرده باشد . در حالت اول $T$ را یک عملگر متناوب و در حالت دوم آنرا شبه متناوب می گویند .

۱-۱-۳٤ **تعریف عملگر آشوبناک** : عملگر خطی و کراندار $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ را آشوبناک گویند ، هرگاه $T$ عملگری ابردوری باشد و $\mathcal{X}$ تحت $T$ زیر مجموعه ای چگال از بردارهای متناوب داشته باشد .

۱-۱-۳۵ **تعریف فضای** $H(\mathbb{C})$ : فضای توابع تام یک متغیره ی مختلط به همراه توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیر مجموعه های فشرده صفحه را با $H(\mathbb{C})$ نمایش می دهیم .

۱-۱-۳۶ **تعریف فضای** $H_{bc}(E)$ : فضای باناخ $E$ را در نظر بگیرید ، جبر فرچه بوسیله عنصرهایی از فضای دوگان $E^*$ با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی گوی های $E$ تولید می شود . فضای $H_{bc}(E)$ را شامل تمام توابع فشرده

$$f : E \longrightarrow \mathbb{C}$$

روی زیر مجموعه های کران دار $E$ در نظرمی گیریم و $H_{bc}(E)$ شامل همه توابع از نوع زیر است :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

که در آن

$$P_n \in \overline{Span\{\varphi^n : \varphi \in E^*\}} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\|P_n\|^{\frac{1}{n}} = (\sup_{\|x\| \prec 1} |P_n|)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

وقتی که $n \rightarrow \infty$ .

۱-۱-۳۷ **تعریف عملگر مشتق** : عملگر

$$\Phi : H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$$

با ضابطه

$$\phi(f) = Df$$

را عملگر مشتق می نامیم .