بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۲۶
دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه :

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض(هندسه)

عنوان

میدان های برداری هندسی در فضای مینکوسکی و کاربرد های آن

استادان راهنما

دکتر ابراهیم پور رضا

دکتر غفار فرزدی

استاد مشاور

دکتر محمد چایچی

پژوهشگر

مینا معینی

آذر ۱۳۸۶

حمد خدایی را که اول همه آثار هستی، اوست و قبل از او اولی نبوده، و آخری است بی آنکه پس از او آخری باشد. خدایی که

دیده بینندگان از دیدنش قاصر، و اندیشه و فهم وصف کنندگان از وصفش عاجز است. و سپاس خدای را به کل آن سپاسی که

نزدیکترین ملایکه به او، و پسندیده ترین ستایشگران آستان او وی را ستوده اند، سپاسی بالاتر از سپاس دیگر سپاسگزاران مانند برتری

پروردگارمان بر تمام مخلوقات، و او را سپاس و حمد در برابر تمام نعمت های او که به ما و بندگانش که در گذشته بوده اند و باقی بندگانش که

هستند و می آیند دارد، سپاسی به عدد تمام اشیا که دانش او بر آن احاطه دارد، سپاسی را که حدش را پایانی، و شماره آن را حسابی، و

پایان آن را نهایتی، و مدت آن را انقطاعی نباشد. سپاسی که باعث رسیدن به طاعت و بخشش او، و سبب رضا و خشنودی او، و

وسیله آمرزش او، و راه به سوی بهشت او، و پناه از انتقام او و ایمنی از غضب او، و یار و مددکار بر طاعت او، و مانع از

معصیت او، و کمک بر اداء حق و وظایف حضرت او باشد. سپاسی که به سبب آن در گروه نیک بختان از دوستانش در آییم،

و در سلک شهیدان به شمشیر دشمنانش قرار گیریم، که همانا حضرت او یاری دهنده و ستوده است.

صحیفه سجادیه دعای اول

معینی، آذر ۱۳۸۶

تقدیم به پدر و مادر عزیزتر از جانم

که بدون کمک و راهنمایی های شان

هیچ بودم

تقدیر وتشکر :

دل گرچه در این بادیه بسیار شتافت　　یک موی ندانست ولی موی شکافت

اندر دل من هزار خورشید بتافت　　آخر به کمال ذره‌ای راه نیافت

حال که با الطاف بی کران حضرت حق دوره کارشناسی ارشد را به اتمام می رسانم بر خود لازم می دانم از کلیه کسانی که در تهیه و تدوین این پایان نامه لطف و کمک خود را در مورد این جانب مبذول نموده اند صمیمانه قدر دانی بنمایم :

- به ویژه از آ قایان اساتید محترم راهنما **دکتر پور رضا** و **دکتر فرزدی**
- – همچنین از استاد مشاورم جناب آقای **دکتر چایچی**
- و با نهایت تشکر از جناب آ قای **دکتر تومانیان** به عنوان « استاد داورم » که هادی این جانب در طول دوره کارشناسی ارشد بوده اند .

از جناب آ قای **دکتر نقی پور** به خاطر زحماتی که در طی پیدا کردن منابع پایان نامه به خاطر این حقیر متحمل شده اند نهایت تشکر را دارم .

و با تقدیم تشکر به آ قایان **دکتر موسایی** و **دکتر باقری** که همواره از تجربیات گرانقدرشان در طول دوره کارشناسی برخوردار شدم .

در اینجا لازم می دانم از برادرانم مسعود و سعید به خاطر حمایت هایشان و کمک در پیدا کردن منابع پایان نامه و از خواهرانم مریم و مینوو همسر ایشان آقای میر شاهولد که همواره پشتیبان ومشوقم بوده اند قدر دانی نمایم .

ودر پایان از دوستان عزیزم خانم ها هایده قادری ، حمیده عین الله زاده ، مریم صالحی ، آ زاده فسنقری ، مهناز غفاری ، سمیه خالقی ، لیلا رضایی ، لیلا رضایی ، راحله فیروز نیا ، زهرا ملک ، اعظم فخر زاده ، عظیمه خاکباز ، زهرا نوروز علی وسایر عزیزانم سپاسگزارم .

غرض نقشی است کز ما باز ماند　　که هستی را نمی بینم بقایی

نام خانوادگی دانشجو: معینی نام: مینا

عنوان پایان نامه : میدان های برداری هندسی در فضای مینکوسکی و کاربرد های آن

اساتید راهنما : دکتر ابراهیم پور رضا-دکتر غفار فرزدی

استاد مشاور: دکتر محمد چایچی

مقطع تحصیلی:کارشناسی ارشد رشته:ریاضی محض گرایش:هندسه

دانشگاه :تبریز تاریخ فارغ التحصیلی:آذر ۱۳۸۶ تعداد صفحات:۸۸

کلید واژه ها: فضاهای مینکوسکی،میدان های برداري افین، خمینه های فینسلر ،هم ارزی همدیس، خمینه های بروالد.

چکیده:

در این پایان نامه به مطالعه فضاهای مینکوسکی ومیدان های برداری افین می پردازیم. ابر رویه مشخصه را معرفی و به عنوان متری روی آن متر فانک وابسته را معرفی می کنیم . در ادامه با اثبات گزاره ها و قضایایی خواص میدان های برداری افین که همزمان نسبت به متر فانک نیز افین می باشند را بررسی می کنیم و تحت قضیه ای کران بالایی برای جبر لی میدان های برداری افین ارایه می دهیم. که تساوی زمانی برقرار است که فضای مینکوسکی اقلیدسی باشد.

در ادامه خمینه های فینسلر ،خمینه های بروالدو خمینه های موضعا مینکوسکی را معرفی و خواص آنها را بیان می کنیم.

به عنوان کاربرد نتایج به حل مساله ماتسوموتو در مورد هم ارزی همدیس خمینه های بروالد و موضعا مینکوسکی می پردازیم ، که اثبات ما بر مبنای نظریه میدان های برداری همساز روی فضای مماسی خمینه های ریمنی یا به طور معادل روی خمینه های مینکوسکی می باشد.

وبه عنوان نتیجه اصلی بیان می کنیم خمینه های بروالد به طور بدیهی هم ارز همدیس می باشند مگر آنکه خمینه ها ریمنی باشند .

فهرست

عنوان	صفحه

فهرست

مقدمه

مقدمه

پایان نامه حاضر بر اساس مقاله ای تحت عنوان :

On geometric vector field s of Minkowski spaces and their applications

می باشد که توسط

Dr.Jzözef Szilasi

به نگارش در آمده است . این مقاله در مجله

Differential Geometry And its Application

شماره ٢٤ سال ٢٠٠٦ میلادی به چاپ رسیده است

هدف از این پایان نامه معرفی فضاهای مینکوسکی و بررسی میدان های برداری آفین است که همزمان نسبت به متر فانک نیز آفین می باشند

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است .

در فصل اول به معرفی مفاهیم و مقدمات اولیه می پردازیم ، در فصل دوم به بررسی بعد جبر لی میدان های برداری آفین پرداخته و همراه با اثبات چند قضیه ای کران بالایی برای بعد جبر لی میدان های برداری آفین بیان می کنیم و در فصل سوم به عنوان کاربرد نتایج بدست آمده به مساله ماتسوموتو پرداخته و نشان می دهیم که هم ارزی همدیس بین خمینه های بروالد بدیهی است مگر آنکه خمینه ها ریمنی باشند.

فصل اول:

بررسی منابع

در این فصل به معرفی مفاهیم اولیه ومقدماتی می پردازیم

در تمام طول پایان نامه فرض می کنیم M خمینه هموار ، n- بعدی وشمارای دوم است.

۱-۱مفاهیم کلاف های برداری

۱-۱-۱تعریف :سه تایی (E,π,M) را خمینه تاری می گوییم ، اگر Eو M خمینه و نگاشت $\pi:E\to M$ غوطه وری پوشا باشد ، در این صورت E را فضای کل ، π را نگاشت تصویر و M را فضای پایه می نامیم، برای هر $p\in M$ ، زیر فضای $E_p=\pi^{-1}(p)$ از E را تار روی p می نامیم.

به اختصار خمینه های تاری را با نماد نگاشت تصویر به کار می بریم بنابراین برای کلاف (E,π,M) نماد π را به کار می بریم.

۱-۱-۲ تعریف: فرض کنیم (E,π,M) خمینه تاری باشد ، نگاشت $S:M\to E$ را برش π می نامیم ، اگر در شرط $\pi o S=1_M$ صدق کند. برش های π را با نماد $\Gamma(\pi)$ نمایش می دهیم

۱-۱-۳ تعریف: خمینه تاری (E,π,M) را کلاف برداری از بعد k- می نامیم ، هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $p\in M$ ، تار E_p فضای برداری k- بعدی باشد .

۲) برای هر $p\in M$، همسایگی U از p و دیفیومورفیسم $\varphi:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$ وجود داشته باشد که $pr_1 o\varphi=\pi|\pi^{-1}(U)$، یعنی دیاگرام زیر جابجایی باشد :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi|\pi^{-1}(U)"'] & & U\times\mathbb{R}^k \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \mathrm{U} & \end{tikzcd}$$

۳) برای هر $q\in U$ نگاشت $\varphi_2:pr_2 o(\varphi|E_q):E_q\to\mathbb{R}^k$، ایزومورفیسم خطی باشد.

۱-۱-٤ تعریف: فرض کنیم (E,π,M) کلاف برداری از بعد k باشد و $f:N\to M$ نگاشت هموار باشد ، به هر $q\in N$ فضای برداری E_q را وابسته می کنیم با در نظر گرفتن $f^*E=\bigcup_{q\in N}E_q=\bigcup_{q\in N}\{q\}\times E_{f(q)}$ می توان بااستفاده از اطلس روی کلاف برداری π اطلسی ساخت که $(f^*E,f^*\pi,N)$ ، کلاف برداری از بعد k- روی N باشد . این کلاف برداری را کلاف عقب گرد[1] ، π ساخته شده توسط f می نامیم.

[1] Pull—back bundle

۱-۱-۵تعریف: فرض کنیم $TM=\bigcup_{p\in M} T_pM$ و $\tau_M:TM\to M$ با ضابطه $v\in T_pM\to\tau_M(v)=p$ باشد، انگاه (TM,τ_M,M) کلاف برداری مماسی از بعد ۲n است به طور دقیق تر یک ساختار هموار روی مجموعه TM وجود دارد طوریکه (TM,τ_M,M) یک کلاف می باشد و T_pM تار های ان است. به طوریکه در خواص زیر صدق می کند

۱)برای هر چارت $\left(U,(u_i)_{i=1}^n\right)$ روی M چارت القایی $\left(\tau^{-1}(U),(x^i,y^i)_{i=1}^n\right)$ را روی TM که $x^i=u^io\tau$ و $y^i:v\in\tau^{-1}(U)\to y^i(v)=v(u^i)$ می باشد انتخاب می کنیم

۲) فرض کنیم M,N دو خمینه هموار باشند و $f:M\to N$ نگاشت هموری باشد انگاه $f_*:TM\to TN$ نمایش نگاشت مماسی f است، که (f_*,f) نگاشت کلافی بین کلاف های مماسی (TM,τ_M,M) و (TN,τ_N,N) به صورت

$$\begin{array}{ccc} f_*:TM & \to & TN \\ \tau_M\downarrow & & \downarrow\tau_N \\ f:M & \to & N \end{array}$$

می باشد .

۱-۱-٦تعریف: برش های τ_M را میدان برداری روی M می نامیم بنابراین برای هر $p\in M$ ، بردار مماسی $X(p)=X_p$ از T_pM نگاشتی از $M\to TM$ می باشد که هموار است .

$C^\infty(M)$– مدول میدان های برداری روی M رابا نماد $\chi(M)$ نشان می دهیم در حقیقت هر میدان برداری X روی M به عنوان عملگر مشتق روی $C^\infty(M)$ تحت قانون

$$f\in C^\infty(M)\to Xf \qquad (Xf)(p)=X_{(p)}(f) \qquad \forall p\in M$$

عمل می کند و بر عکس هر عملگر مشتق روی $C^\infty(M)$ نوعی میدان برداری است .

۱-۱-۷تعریف:فرض می کنیم I یک بازه باز ناتهی در $\mathbb{R}$ باشد .

۱) اگر X میدان برداری روی خمینه M باشد ، خم $c: I \to M$ را خم انتگرال X گوییم

اگر $c' = Xoc$

۲) نگاشت هموار $\varphi : \mathbb{R}\times M \to M$ را دستگاه مکانیکی یا شار برای هر $p \in M$ و $s,t \in \mathbb{R}$

گوییم هر گاه : $\varphi(0,p) = p$ و $\varphi(s,\varphi(t,p)) = \varphi(s+t,p)$

۱-۱-۸تعریف: دوگان (T^*M,τ^*,M) از کلاف مماسی τ را کلاف کتانژانت می گوییم وبه طورخلاصه با τ^* نمایش می دهیم، $C^\infty(M)$ –مدول برش های τ^* را با $\Omega^1(M)$ که مدول ۱-فرمی ها روی M است نشان می دهیم.

برای هر تابع هموار f روی M ، نگاشت $X \in \chi(M) \to Xf \in C^\infty(M)$ عضوی از $(\chi(M))^*$ می باشد وبنابرین از ایزومورفیسم $\Omega^1(M) \cong (\chi(M))^*$ ۱- فرمی $df \in \Omega^1(M)$ ایجاد می شود به طوریکه به طوریکه : $\forall X \in \chi(M)$ $df(X) = Xf$

df را مشتق خارجی یا به طور ساده دیفرانسیل f می نامیم.

۱-۱-۹تعریف:فرض کنیم $X \in \chi(M)$ یک تانسور مشتق منحصر به فرد L_X روی M وجود دارد به طوریکه:

$$L_X f = Xf \qquad \forall f \in C^\infty(M)$$

$$L_X Y = [X,Y] \qquad \forall Y \in \chi(M)$$

عملگر L_X را مشتق لی نسبت به بردار X می نامیم .برای میدان های برداری X,Y روی M داریم

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

و اگر $\varphi : W \subset \mathbb{R}\times M \to M$ شار X باشد که ان را با φ_t نشان می دهیم داریم

$$L_X Y = [X,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\varphi_t)^{-1}_{\#}Y - Y\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y - (\varphi_t)_{\#}Y\right)$$

۱-۱-۱۰تعریف: فرض کنیم X میدان برداری روی خمینه M باشد اگر A یک k- فرمی روی M باشد.انگاه:

$$i_X A(X_2,\dots X_k) = A(X, X_2,\dots X_k) \qquad X_i \in \chi(M) \quad (2 \le i \le k)$$

$i_X A$را فرم دیفرانسیل پذیر از درجه k-۱ می نامیم که از درجه صفر به صورت زیر در می اید :

$$i_X f = 0 \qquad f \in C^\infty(M)$$

اگر $\alpha \in \Omega^1(M)$ باشد $i_X \alpha = \alpha(X)$ و برای $f \in C^\infty(M)$ ، $i_X df = X(f)$.

۱-۱-۱۱نتیجه: به طور خلاصه روابط زیر بین عملگر i_X و L_X برقرار می باشد با فرض اینکه X,Y میدان های برداری روی M می باشند :

$$i_X o i_Y + i_Y o i_X = 0 \Leftrightarrow [i_X, i_Y] = 0$$

$$L_X = L_X od + doi_X \Leftrightarrow L_X = [i_X, d]$$

$$i_{[X,Y]} = L_X o i_Y - i_Y o L_X \Leftrightarrow i_{[X,Y]} = [L_X, i_Y]$$

$$d_{[X,Y]} = L_X o L_Y - L_Y o L_X \Leftrightarrow L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

$$d^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[d,d] = 0$$

$$L_X od = doL_X \Leftrightarrow [L_X od] = 0.$$

۱-۱-۱۲تعریف: فرض کنیم (E,π,M) کلاف برداری از بعد k روی خمینه پایه n-بعدی M باشد. عملگر مشتق کواریان یا به طور ساده مشتق کواریان نگاشت $\nabla : \chi(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$ می باشد که $(X,\sigma) \to \nabla_X \sigma$. برای میدان های برداری X,Y روی M وبرشهای σ و σ_1 و σ_2 در $\Gamma(\pi)$ داریم:

$$\nabla_{X+Y}\sigma = \nabla_X \sigma + \nabla_Y \sigma$$

$$\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma$$

$$\nabla_X(\sigma_1+\sigma_2) = \nabla_X\sigma_1 + \nabla_X\sigma_2$$

$$\nabla_X(f\sigma) = (Xf)\sigma + f\nabla_X\sigma$$

$\nabla_X\sigma$ را مشتق کواریان σ نسبت به بردار X گوییم.

۱-۱-۱۳تعریف: انحنای R^∇ مشتق کواریان ∇ بر روی کلاف برداری (E,π,M) یک ۲- فرمی روی M است، که برای میدان های برداری X,Y روی M ومقطع σ در $\Gamma(\pi)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$R^\nabla(X,Y)\sigma = \nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma$$

می توان دید که نگاشت $(X,Y,\sigma)\in\chi(M)\times\chi(M)\times\Gamma(\pi)\to R^\nabla(X,Y)$ روی $C^\infty(M)$ خطی و نسبت به دو مولفه اول پاد متقارن می باشد.

تعاریف بعدی روی (E,π,M) کلاف برداری از بعد k روی خمینه پایه n-بعدی M می باشد.

۱-۲فرمها وتانسورها در امتداد تصویرکلاف مماسی

زیر فضاهای قائم[1]

۱-۲-۱تعریف :فرض کنیم $z\in E$ باشد فضای برداری $V_z(E)=\ker(\pi_*)_z\subset T_zE$ را زیر فضای قائم T_zE می نامیم. و بردار های $V_z(E)$ را به عنوان بر دار های قائم در z نام می بریم. نگاشت $(\pi_*)_z$ پوشامی باشد وداریم:

$$\dim V_z(E) = \dim T_zE - \dim T_{\pi(z)}M = n+k-n = k = rank\,\pi$$

برای هر $p\in M$ تار های E_p زیر خمینه از E می باشند ، نگاشت شمولیت $E_p\to E$ را با j_p نمایش می دهیم،در این صورت نگاشت $\pi o j_p$ نگاشت ثابت $E_p\to\{p\}$ می باشد ، بنابراین:

$$(\pi_*)_z\, o\left[(j_p)_*\right]_z = 0$$

۱- Vertical- subbundle

که $z \in E_p$. یعنی داریم $\operatorname{Im}\left[\left(j_p\right)_*\right]_z \subset \ker\left(\pi_*\right)_z = V_zE$ برای همه $z \in E_p$. از طرف دیگر نگاشت $\left[\left(j_p\right)_*\right]_z : T_zE_p \to T_zE$ یک به یک می باشد.

از این رو :

$$\dim \operatorname{Im}\left[\left(j_p\right)_*\right]_z = \dim T_zE_p = k = \dim V_zE$$

۱-۲-۲لـــم: بـــرای هـــر $p \in M$ و $z \in E_p$ داریـــم $V_zE = \operatorname{Im}\left[\left(j_p\right)_*\right]_z$ پـــس ایـــزو مورفیـــسم $V_zE \cong T_zE_p$ برقرار است.

اثبات:(ر.ک.[۱۶])

مجموعه $VE = \bigcup_{z \in E} V_zE$ از TE را در نظر می گیریم وفرض می کنیم V_π نگاشت تـصویر طبیعـی $VE \to E$ باشد که. $w \in V_zE \to V_\pi(w) = z$.

در این صورت VE دارای ساختار هموار منحصر بفردی است که $\left(VE, V_\pi, E\right)$ زیر کلاف برداری از TE می باشد. این کلاف برداری را کلاف قائم π یا کلافی در امتداد تار E_p می نامیم.

۱-۲-۳تعریـــــــــــف :نگاشـــــــــت $i : (z, z') \in E \times_M E \to i(z, z') = \left[\left(j_p\right)_*\right]_z \left(I_z\left(z'\right)\right)$ که $\left(p = \pi(z) = \pi(z')\right)$ و I_z نگاشت همانی روی $E_p = E\pi(z)$ در T_zE_p می باشـد، و ایـزو مـور فیسم بین کلاف های $\pi^*\pi \xrightarrow{i} V\pi$ را داریم و دیاگرام زیر نتیجه می شود :

$$\begin{array}{ccc} E \times_M E & \xrightarrow{i} & VE \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle V\pi} \\ E & \xrightarrow{1_E} & E \end{array}$$

این ایزومورفیسم را مورفیسم قائم بزرگ[۱] می گوییم.

۱ -Big vertical morphism

۱-۲-٤تعریف :کلاف $\pi^*\tau_M$ از کلاف مماسی τ_Mرا با π در نظر می گیریم، ایـن کـلاف را کـلاف مورب[۱] می نامیم که فضای تام کلاف مـورب $E\times_M TM$ و تـار هـای ا ن در نقطـه $z\in E$ فـضای برداری $T_{\pi(z)}M\cong\{z\}\times T_{\pi(z)}M$ است.

و دیاگرام جابجایی زیر را داریم:

$$\begin{tikzcd} E\times_M TM \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & TM \arrow[d, "\tau_M"] \\ E \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

که $p_1=\pi^*\tau_M=pr_1\big|_{E\times_M TM}$ و $p_2=pr_2\big|_{E\times_M TM}$ می باشد.

۱-۲-٥لم وتعریف :نگاشت $j:TE\to E\times_M TM$ که $w\in T_zE\to j(w)=\left(z,(\pi_*)_z(w)\right)$ یک نگاشت پوشا بین کلاف τ_Eوکلاف مورب $\pi^*\tau_M$ تعریف می کند.

حال با در نظر گرفتن نگاشت $i:E\times_M E\to TE$ دنباله

$$0\to E\times_M E\xrightarrow{i}TE\xrightarrow{j}E\times_M TM\to 0$$

یا

$$0\to\pi^*\pi\xrightarrow{i}\tau_E\xrightarrow{j}\pi^*\tau_M\to 0$$

بدست می اید که دنباله دقیق کوتاه از کلاف های برداری می باشد و ان را دنباله دقیق کوتاه سـاخته شده بر مبنای π می نامیم.

می توان پوشا بودن ویک به یک بودن i,j را به راحتی در مختصات موضعی بررسی کردو $\operatorname{Im} i=V_\pi$ است وبرای هر $z\in E$و بردار $w\in T_zE$

$$j(w)=\left(z,(\pi_*)_z(w)\right)=0\in\{z\}\times T_{\pi(z)}M\Leftrightarrow w\in V_zE$$

یعنی $\operatorname{Im} i=V_\pi=\ker j$ پس دنباله در τ_E دقیق می باشد .

۱-Transverse bundle

نکته :نگاشت $j:\tau_E \to \pi^*\tau_M$ را می توانیم به عنوان ۱-فرمی $\pi^*\tau_M$ مقدار روی E تفسیر کنیم و بنویسیم $j \in \Omega^1\left(E,\pi^*\tau_M\right)$

۱-۲-۶**تعریف برش های** کلاف قائم V_π را میدان برداری قائم روی E می نامیم و $C^\infty(E)$- مدول میدان های برداری قائم را با نماد $\chi^v(E)$ نمایش می دهیم .

۱)میدان برداری $\xi \in \chi(E)$ قائم است اگر وتنها اگر $0 \sim_\pi \xi$ یعنی $\pi_* 0\xi = 0 o \pi$ و کروشه لی دو میدان برداری قائم ، قائم است از این رو $\chi^v(E)$ زیر جبر لی $\chi(E)$ می باشد .

۲) $\xi \in \chi(E)$ قائم است اگر وتنها اگر برای هر $f \in C^\infty(M)$ داشته باشیم $\xi(fo\pi)=0$.

۳) با در نظر گرفتن مور فیسم قائم $i:E\times_M E \to VE$ نگاشت $C_E:E \to VE$ که $z \to C_E(z)=i(z,z)$ میدان برداری قائم است که آن را میدان برداری لیوویل روی E می نامیم

با به کار بردن چارت القایی $\left(\tau^{-1}(U),\left(x^i,y^i\right)_{i=1}^n\right)$ روی E داریم:

$$C_E\left|\pi^{-1}(U)\right.=\sum_{j=1}^k y^j\frac{\partial}{\partial y^j}$$

می توان نشان داد که C_E میدان سرعت شار $\varphi:E\times\mathbb{R}\to E$ با ضابطه $(t,z)\to e^t z$ می باشد.

٤) فرض کنیم $z \in E$ ثابت باشد انگاه نگاشت $i_z:u\in E_{\pi(z)} \to i_z(u)=i(z,u)\in V_z E$ ایزومورفیسم خطی است که ان را ترفیع قائم از $E_{\pi(z)}$ به $V_z E$ می نامیم.و برای $i_z(u)$نمایش $u^\uparrow(z)$ را به کار می بریم.

۵) ترفیع قائم برش σ، میدان برداری قائم $\sigma^v \in \chi(E)$ می باشد که با رابطه $\sigma^v(z)=\left[\sigma(\pi(z))\right]^\uparrow(z)\forall z\in E$ مشخص می شود .