بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

(گرایش نظری)

مطالعه معادله دیراک و بررسی حل جبری آن

از:

لاله جهانگیری

استاد راهنما:

دکتر حسین پناهی

دی ماه ۱۳۸۸

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تمام محبت هایشان

تقدیر و تشکر:

اکنون که به پاس الطاف بی حد پروردگار این مرحله از زندگی را نیز پشت سر گذاشته ام بر خود لازم می دانم سپاس گذار تمام عزیزانی باشم که در پیمودن این راه یاریم نمودند.

از خانواده عزیزم که در تمام مراحل زندگی همراه و پشتیبان من بوده اند و هیچ گاه محبت هایشان را از من دریغ نکرده اند، از استاد بزرگوارم آقای دکتر حسین پناهی که راهنمایی هایشان همواره راهگشای من بوده و بی شک بسیاری از آموخته هایم را مدیون ایشان هستم و کار کردن در کنارشان یکی از شیرین ترین تجربه های من در زندگی بوده است. از آقای دکتر حسین فرج الهی و آقای دکتر رضا صفاری که زحمت داوری این پایان نامه را کشیده اند و همچنین آقای دکتر سعید مهدوی فر نماینده محترم تحصیلات تکمیلی که مراتب سپاس خود را نسبت به این اساتید بزرگوار ابراز می دارم. از تمامی دوستان خوبم که با بودن در کنارشان لحظاتی زیبا را تجربه کرده ام که برای همیشه در خاطرم باقی خواهد ماند.

فهرست مطالب

عنوان	شماره صفحه
چکیده فارسی	چ
چکیده انگلیسی	ح
۱. فصل اول: مقدمه	۱
۲. فصل دوم: تعاریف و مفاهیم پایه	۶
۲-۱) معادله موج نسبیتی برای ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$	۷
۲-۱-۱) مطالعه معادله دیراک	۷
۲-۱-۲) جریان احتمال و معادله پیوستگی	۹
۲-۱-۳) هموردایی معادله دیراک	۱۰
۲-۱-۴) حل معادله دیراک برای ذره آزاد	۱۳
۲-۲) ابرتقارنی و شکل ناوردایی	۱۵
۲-۳) فرمالیسم تابع اصلی و چندجمله ایهای متعامد	۱۸
۳. فصل سوم: حل مسئله دیراک-کولن با استفاده از مکانیک کوانتومی ابر تقارنی	۲۱
۳-۱) مقدمه	۲۲
۳-۲) معادله شعاعی دیراک	۲۲
۳-۳) مسئله دیراک-کولن و ابرتقارنی	۲۶
۳-۴) بررسی شرایط شکل ناوردایی مسئله دیراک-کولن	۲۹
۳-۵) توابع موج مسئله دیراک-کولن	۳۱
۴. فصل چهارم: معادله دیراک در یک میدان الکترومغناطیسی برای پتانسیل هایی با تقارن کروی	۳۴
۴-۱) مقدمه	۳۵
۴-۲) معادله دیراک برای پتانسیل های الکترومغناطیسی با تقارن کروی	۳۶
۴-۳) معادله دیراک و پتانیسل های شکل ناوردا با تقارن کروی	۳۹
۴-۳-۱) پتانسیل روزن-مورس I	۴۰
۴-۳-۲) پتانسیل روزن-مورس II	۴۲
۴-۴) طیف انرژی نسبیتی و توابع موج مرتبط با نمایش رودریگز چند جمله ایهای متعامد برای دو نمونه از پتانسیل های الکترواستاتیکی	۴۴
۴-۴-۱) پتانیسل نوسانگر شیفت داده شده دیراک	۴۴
۴-۴-۲) پتانسیل دیراک-مورس	۴۸
۵. فصل پنجم: معادله دیراک برای پتانسیل هایی با تقارن کروی و فرمالیسم تابع اصلی	۵۲
۵-۱) مقدمه	۵۳

چکیده

عنوان: مطالعه معادله دیراک و بررسی حل جبری آن

نگارنده: لاله جهانگیری

در این پایان نامه، ابتدا معادله دیراک به عنوان یک معادله موج نسبیتی مورد بررسی قرار گرفت و توابع موج اسپینوری آن بدست آمدند. سپس شرایط ابرتقارنی و شکل ناوردایی در مکانیک کوانتومی به عنوان یک روش جبری برای حل مسئله دیراک-کولن به کار برده شد. طیف انرژی و توابع موج با استفاده از فرمالیسم شکل ناوردایی و عملگر های نردبانی تعیین شدند. همچنین معادله دیراک برای یک اسپینور باردار درپتانسیل های الکترومغناطیسی با تقارن کروی در نظر گرفته شد به طوری که با حذف مشتقات مرتبه اول، این معادله به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شرودینگر گونه برای اسپینور بالا تبدیل می شود. با قرار دادن پتانسیل های الکترواستاتیکی و میدان های پیمانه ای متفاوت در این معادله و مقایسه آن با معادله شرودینگر با پتانسیل های شکل ناوردا، طیف انرژی و توابع موج محاسبه شدند. از طرف دیگر با جایگذاری دو نوع پتانسیل الکترواستاتیکی وابسته به اعداد کوانتومی n و m در معادله شرودینگر گونه حاصل و با استفاده از خواص ابرتقارنی و شکل ناوردایی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ریاضی فیزیک و معادلات دیفرانسیل وابسته آنها، توابع موج اسپینور بالا بر اساس نمایش رودریگز بیان شدند. در نهایت یک فرمالیسم کلی برای حل معادله دیراک با استفاده از مفهوم تابع اصلی ارائه شد. با استفاده از این روش معادله دیراک برای تعدادی از پتانسیل های الکترواستاتیکی که با قرار دادن انتخاب های متفاوت برای تابع اصلی و تابع وزن بدست می آیند، حل شد. توابع موج نیز بر اساس چندجمله ایهای رودریگز مربوط به هر حالت تعیین شدند.

واژه های کلیدی:

معادله دیراک، مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، شکل ناوردایی، پتانسیل های دقیقاً حل پذیر، تابع اصلی، نمایش رودریگز

Abstract

Title: Study of Dirac equation and its algebraic solution
Author: Laleh Jahangiry

In this thesis, first the Dirac equation have been considered as a relativistic wave equation and its spinor wave functions have been obtained. Then the supersymmetry and shape invariance conditions in quantum mechanics have been applied as an algebraic method to solve the Dirac-Coulomb problem. The energy spectrum and wave functions have been determined by using shape invariance formalism and ladder operators. Also the Dirac equation for a charged spinor in a spherically symmetric electromagnetic potential have been considered so that by eliminating the first order derivative, this equation transforms to a Schrodinger-like second order differential equation for upper spinor. By letting different electrostatic potentials and gauge fields in this equation and comparing that with Schrodinger equation for shape invariant potentials, the energy spectrum and wave functions have been obtained. On the other hand by substituting two kind of electrostatic potentials that depend on quantum numbers n and m in the obtained Schrodinger-like equation and using the supersymmetry and shape invariance properties of second order differential equations of mathematical physics and their associated differential equations, the upper spinor wave functions have been obtained in terms of Rodrigues representation. At the end a general formalism have been represented in order to solve Dirac equation via master function approach. By using this method, the Dirac equation have been solved for some electrostatic potentials which are obtained in terms of master function and weight function. The wave functions have been determined in terms of Rodrigues polynomials related to each cases.

Key words:
Dirac equation, Supersymmetry quantum mechanics, Shape invariance, Exactly solvable potentials, Master function, Rodrigues representation.

فصل اول

مقدمه

فصل اول: مقدمه

در سال ۱۹۲۸ و پس از ایجاد شک و تردیدهایی درباره معادله کلاین- گوردون[1]، دیراک[2] فیزیکدان بریتانیایی معادله موج نسبیتی معروف خویش را ارائه داد. در آن زمان تصور بر آن بود که نارسایی معادله کلاین- گوردون در ارائه یک چگالی احتمال مثبت به دلیل وجود مشتقات زمانی مرتبه دوم در این معادله است لذا دیراک معادله خویش را مانند معادله شرودینگر و با مشتقات زمانی مرتبه اول در نظر گرفت. از آنجایی که هر معادله موج در نسبیت باید تحت تبدیلات لورنتس[3] ناوردا باشد در نتیجه مشتقات فضایی ظاهر شده در این معادله نیز از مرتبه اول هستند. معادله دیراک در واقع معادله ای به فرم معادله شرودینگر برای محاسبه تابع موج ذرات با اسپین $\frac{۱}{۲}$ مانند الکترونها در مکانیک کوانتومی نسبیتی است که شامل قوانین و اصول مربوط به نظریه کوانتومی در نسبیت خاص است. این معادله توانست وجود پادذره ها را قبل از کشف آنها پیشگویی کرده و مقدار صحیح نسبت ژیرومغناطیس به صورت $g_s = ۲$ را نیز ارئه دهد.

از آنجایی که حل دقیق سیستم های کوانتومی نقش مهمی در مکانیک کوانتومی ایفا می کند امروزه بسیاری از پتانسیل ها در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی به صورت دقیق حل شده و طیف انرژی و توابع موج آنها به صورت دقیق بدست آورده شده است. در سالهای اخیر نیز تلاش های قابل ملاحظه ای برای مطالعه معادلات موج نسبیتی و بررسی اثرات نسبیتی آنها صورت گرفته که در این میان حل معادله دیراک به عنوان تعمیم نسبیتی این پتانسیل ها بسیار مورد توجه قرار گرفته است به طوریکه این معادله برای بسیاری از پتانسیل ها مانند نوسانگر[4][۱]، مورس[5][۲]، کولن[6][۳]، چاه پتانسیل دوگانه متقارن[7][۴]، ایکارت[8] [۵] و...به صورت دقیق حل شده است. همچنین معادله دیراک با جرم های مؤثر وابسته به مکان با در نظر گرفتن توزیع جرم های متفاوت با استفاده از روش های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است [۶و۷و۸]. یکی از روش های حل معادله دیراک استفاده از ابرتقارنی[9] و شکل ناوردایی[10] در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی است. ابرتقارنی با کار نیکلای[11] در سال ۱۹۷۶ [۹]

---

[1] Klein-Gordon
[2] Dirac
[3] Lorentz transformation
[4] Oscillator
[5] Morse
[6] Coulomb
[7] Symmetrical double-well potential
[8] Eckart
[9] Supersymmetry
[10] Shape invariance
[11] Nicolai

آغاز شد و در سال ۱۹۸۱ [۱۰] توسط ویتن[1] به صورتی زیبا فرمول بندی شد. این نظریه در مکانیک کوانتومی بدین صورت است که می توان هامیلتونی مربوط به دو سیستم را با استفاده از فاکتوریزه کردن[2] آنها به صورت حاصل ضرب دو عملگر دیفرانسیلی مرتبه اول به هم مرتبط کرد. بر اساس این تقارن دو هامیلتونی بجز حالت پایه دارای طیف یکسانی هستند و به پتانسیل های مربوط به آنها جفت پتانسیل ابرتقارنی[3] می گویند. پیشرفت قابل توجه دیگر در مطالعه سیستم های دقیقاً حل پذیر[4] معرفی مفهوم شکل ناوردایی توسط جندن اشتاین[5] در سال ۱۹۸۳ بود که توانست نشان دهد بسیاری از پتانسیل های حل پذیر مانند کلمب، نوسانگر، مورس و...شکل ناوردا هستند و ویژه مقادیر انرژی این پتانسیل ها را محاسبه کرد [۱۱]. اگر جفت پتانسیل ابرتقارنی از نظر شکل کاملاً یکسان بوده و فقط در پارامترهای ظاهر شده در آنها متفاوت باشند شکل ناوردا هستند. توابع موج و طیف انرژی مربوط به هامیلتونی هایی که در شرایط شکل ناوردایی صدق می کنند با استفاده از محاسبات پایه و فرآیند جبری به صورت دقیق تعیین می شوند. نظریه های مکانیک کوانتومی ابرتقارنی و شکل ناوردایی در سال های اخیر پیشرفت چشمگیری داشته و به عنوان یک روش جبری در حل سیستم های کوانتومی بسیار مورد توجه قرار گرفته است به طوری که به بسیاری از شاخه های دیگر فیزیک تعمیم داده شده است که از کاربردهای ویژه آن می توان در ماده چگال و فیزیک آماری و...نام برد.

از طرف دیگر آقایان جعفری زاده و فخری در سال ۱۹۹۶ توانستند که از طریق معرفی یک عملگر خودالحاقی خطی و قرار دادن شرایطی خاص برای آن به فرم کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بر اساس مفاهیم تابع اصلی[6] و تابع وزن[7] دست یابند و جوابهای این معادلات نیز به صورت نمایش رودریگز[8] چندجمله ایهای متعامد[9] ارائه شده است [۱۲]. پس از آن و در سال های ۱۹۹۷ و ۱۹۹۸ همین نویسندگان با استفاده از روش فاکتوریزه کردن معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بدست آمده بر اساس مفهوم تابع اصلی، توانستند نشان دهند که این معادلات مانند لاگر[10]، لژاندر[11]، ژاکوبی[12] و...و معادلات دیفرانسیل وابسته[13] آنها دارای شرایط ابرتقارنی و شکل ناوردایی هستند. که بر اساس این ویژگی می توان این معادلات را به صورت حاصل ضرب

[1]Witten
[2]Factorization
[3]Supersymmetric partner potentials
[4]Exactly solvable
[5]Gendenshtein
[6]Master function
[7]Weight function
[8]Rodrigues representation
[9]Orthogonal polynomials
[10]Laguerre
[11]Legendre
[12]Jacobi
[13]Associated differential equations

عملگرهای افزاینده و کاهنده فاکتوریزه کرد. در مقاله اول فرآیند فاکتوریزه کردن معادلات دیفرانسیل مربوطه و معادلات دیفرانسیل وابسته آنها نسبت به عدد کوانتومی اصلی n مورد بررسی قرار گرفته است [۱۳]. در مقاله دوم این فرآیند نسبت به عدد کوانتومی ثانوی m مطرح شده و نتایج جالبی نیز به دست آمده است به طوری که معادلات دیفرانسیل وابسته با اعمال تبدیلات تشابهی و تغییر متغیرهای مناسب به معادله شرودینگر با پتانسیل های شکل ناوردا تبدیل می شوند [۱۴]. به کاربردن نتایج حاصل از این فرآیند برای حل معادله دیراک در یک میدان الکترومغناطیسی می تواند جالب توجه باشد.

معادله دیراک برای یک اسپینور باردار در یک میدان الکترومغناطیسی چهار مؤلفه ای توسط الحیدری[۱] در سال ۲۰۰۱ مورد بررسی قرار گرفت به طوری که با در نظر گرفتن تقارن پیمانه ای[۲] و استفاده از تبدیل یکانی این معادله به یک معادله شرودینگر مانند تبدیل می شود که با قرار دادن پتانسیل های متفاوت و مقایسه آن با مسائل غیر نسبتی معروف، روابطی بین پارامترهای نسبیتی و غیر نسبیتی بدست می آید و در نهایت با استفاده از این روابط طیف انرژی و توابع موج مربوط به مسئله دیراک با پتانسیل هایی مانند روزن- مورس[۳]، ایکارت[۴]، اسکارف[۵] و پوشل- تلر[۶] تعیین می شوند [۱۵]. کاری که در این پایان نامه صورت گرفته است استفاده از مفاهیم تابع اصلی برای حل معادله دیراک در یک میدان الکترومغناطیسی است. در این کار سعی شده است که بین نتایج بدست آمده از مقاله الحیدری و مفاهیم بیان شده با استفاده از روش تابع اصلی ارتباط برقرار شود به طوری که این ارتباط منجر به حل معادله دیراک برای تعدادی از پتانسیل های یک بعدی و نشان دادن شرایط شکل ناوردایی حاکم بر آنها می شود.

در فصل دوم بعضی مفاهیم پایه مطرح می گردد. قسمت اول شامل معرفی معادله دیراک به عنوان یک معادله موج قابل قبول در نسبیت و بررسی حل تحلیلی آن برای ذره آزاد است. در قسمت دوم مفاهیم اصلی مربوط به ابرتقارنی و شکل ناوردایی در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی مورد بحث قرار می گیرد و فرآیند فاکتوریزه کردن و روابط حاکم بر جفت پتانسیل ابرتقارنی برای محاسبه ویژه مقادیر انرژی و توابع موج بیان می شود، که از این روابط در فصل سوم استفاده می شود. در قسمت سوم نیز فرم کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و معادلات دیفرانسیل وابسته با استفاده از مفهوم تابع اصلی بدست می آید و جواب های این معادلات نیز به صورت نمایش رودریگز چندجمله ایهای متعامد ارائه می شوند که در فصل چهارم و پنجم مورد استفاده قرار می گیرند. در فصل سوم مسئله دیراک- کولن به عنوان یک مثال دقیقاً حل پذیر در مکانیک کوانتومی نسبیتی

---

[1] Alhaidari
[2] Gauge symmetry
[3] Rosen-Morse
[4] Eckart
[5] Scarf
[6] Poschl-Teller

مورد بررسی قرار می گیرد. برای حل این مسئله از روش ابرتقارنی استفاده می شود به طوری که طیف انرژی و ویژه توابع بـا استفاده از شرایط شکل ناوردایی و معرفی عملگرهای نردبانی جدید تعیین می شوند. در فصل چهارم معادله دیـراک در یـک میدان الکترومغناطیسی-با پتانسیل هایی با تقارن کروی در نظر گرفته می شود و با استفاده از معادله شعاعی دیراک، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شرودینگر گونه برای تابع موج مؤلفه اسپینوری بالا بدست می آید که می توان این معادله را با قرار دادن انتخاب های متفاوت برای پتانسیل الکترواستاتیکی و میدان پیمانه ای حل کرد. همچنین این معادله برای دو نمونه از پتانـسیل های وابسته به اعداد کوانتومی n و m بررسی شده و شرایط شکل ناوردایی حاکم بر آنها نشان داده می شود. طیف انرژی و توابع موج بر اساس نمایش رودریگز چندجمله ایهای متعامد تعیین می شوند. در فصل پنجم سعی شده است که با توجـه بـه نتایج بدست آمده از فصل چهارم و ارتباط آن با مفاهیم تابع اصلی، یک فرمالیسم کلی برای حل معادله دیراک برای دسـته ای از پتانسیل های یک بعدی بدست آورده شود که نتایج حاصل شده از این روش به صورت یک جدول تنظیم شـده اسـت. در نهایت در فصل ششم نتیجه گیری و پیشنهادات مطرح می شود.

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم پایه

۲-۱) معادله موج نسبیتی برای ذرات با اسپین $\frac{۱}{۲}$

از آنجایی که معادله کلاین- گوردون به عنوان یک معادله موج نسبیتی مرتبه دوم برای ذرات بدون اسپین نتوانست به نتایج رضایت بخشی در ارائه یک چگالی احتمال مثبت دست یابد لذا تصور بر آن بود که بروز این مشکل به دلیل وجود مشتقات زمانی و فضایی مرتبه دوم در این معادله است. از اینرو دیراک تلاش کرد معادله موج مرتبه اولی را جایگزین آن کند به طوری که این معادله بتواند به نتایج نسبیتی قابل قبولی منجر شود. در این بخش ابتدا نحوه استخراج معادله ماتریسی دیراک و روابط حاکم بر آن بیان می شود و سپس نشان داده می شود که با نوشتن یک معادله پیوستگی برای آن می توان بر خلاف معادله کلاین- گوردون به یک چگالی احتمال مثبت دست یافت. چون هر معادله موج در نسبیت باید تحت تبدیلات لورنتس ناوردا باشد هموردایی معادله دیراک نیز مورد بررسی قرار می گیرد و در نهایت جوابهای آن در حالت آزاد به صورت توابع موج اسپینوری ارائه می شوند.

۲-۱-۱) مطالعه معادله دیراک

دیراک معادله خویش را به فرم معادله شرودینگر و با مشتقات فضایی و زمانی مرتبه اول به صورت زیر در نظر گرفت [۱۶و۱۷]:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi=\left(c\hat{\alpha}\cdot\hat{P}+\hat{\beta}m_0c^2\right)\psi$$
$$=\left(\frac{\hbar c}{i}(\hat{\alpha}_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\hat{\alpha}_2\frac{\partial}{\partial x^2}+\hat{\alpha}_3\frac{\partial}{\partial x^3})+\hat{\beta}m_0c^2\right)\psi\ , \qquad (۱-۲)$$

در رابطه بالا c سرعت نور، $\hat{P}$ عملگر اندازه حرکت، m_0 جرم در حال سکون و $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ ضرایبی هستند که باید تعیین شوند. از آنجایی که این معادله باید رابطه بین انرژی و اندازه حرکت برای ذره آزاد یعنی $E^2=P^2c^2+m_0^2c^4$ را برآورده کند در نتیجه تابع موج باید در معادله کلاین- گوردون زیر صدق کند:

$$(-\hbar^2c^2\nabla^2+{m_0}^2c^4)\psi=-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\ ,$$

با ضرب $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ در رابطه (۲-۱) خواهیم داشت:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\hbar c}{i}(\hat{\alpha}_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\hat{\alpha}_2\frac{\partial}{\partial x^2}+\hat{\alpha}_3\frac{\partial}{\partial x^3})+\hat{\beta}m_0c^2\right)\psi\ \ ,$$

که در این رابطه می توان با استفاده از معادله (۲-۱) به جای $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ عملگر $c\hat{\alpha}\cdot\hat{P}+\hat{\beta}m_0c^2$ را قرار داد:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\hbar^2c^2\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j+\hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\hbar m_0c^3}{i}\sum_{i=1}^{3}(\hat{\alpha}_i\hat{\beta}+\hat{\beta}\hat{\alpha}_i)\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+\hat{\beta}^2m_0^2c^4\psi\,.$$

مقایسه این رابطه با معادله کلاین- گوردون منجر به روابط زیر برای ضرایب $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ می شود:

$$\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j+\hat{\alpha}_j\hat{\alpha}_i=0\qquad i\neq j\;, \tag{۲-۲-الف}$$

$$\hat{\alpha}_i\hat{\beta}+\hat{\beta}\hat{\alpha}_i=0\;, \tag{۲-۲-ب}$$

$$\hat{\beta}^2=\hat{\alpha}_i^{\,2}=1\;. \tag{۲-۲-ج}$$

شرایط بالا تنها در صورتی برقرار هستند که $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$ به صورت ماتریس باشند در نتیجه تابع موج به صورت یک ماتریس ستونی با چندین مؤلفه در نظر گرفته می شود. هرمیتی بودن هامیلتونی در رابطه (۲-۱) ایجاب می کند که ماتریس های $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$ نیز هرمیتی باشند بنابراین دارای ویژه مقادیر حقیقی هستند. چون ویژه مقادیر مستقل ازپایه های نمایش است لذا ماتریس های $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$ را می توان به صورت نمایش قطری در نظر گرفت و از آنجایی که طبق رابطه (۲-۲-ج) $\hat{\beta}^2=\hat{\alpha}_i^{\,2}=1$ است، این ویژه مقادیر می توانند فقط مقادیر ۱ $\pm$ باشند. از طرف دیگر رابطه پادجابجایی (۲-۲-ب) ایجاب می کند که ماتریس های $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$ بدون تریس باشند لذا تعداد درایه ها با ویژه مقادیر مثبت و منفی در هر کدام از این ماتریس ها با هم برابر بوده و یا به عبارت دیگر دارای بعد زوج هستند [۱۶]. کمترین بعد زوج به صورت $N=۲$ نمی تواند درست باشد چون در این حالت فقط سه ماتریس پائولی وجود دارد که در روابط (۲-۲) صدق می کنند بنابراین ماتریس های $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$، ۴×۴ هستند. یکی از نمایش هایی که می تواند برای ماتریس های دیراک در نظر گرفته شود به صورت زیر است:

$$\hat{\beta}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\qquad \hat{\alpha}_i=\begin{pmatrix}0 & \hat{\sigma}_i\\ \hat{\sigma}_i & 0\end{pmatrix}\;, \tag{۲-۳}$$

که در آن $\hat{\sigma}_i$ها و I به ترتیب ماتریس های پائولی و ماتریس واحد ۲×۲ هستند. روابط (۲-۳) تنها یکی از انتخاب های ممکن برای ماتریس های دیراک هستند. هر دسته از ماتریس هایی که با استفاده از یک تبدیل یکانی $\hat{U}$ از ماتریس های اصلی $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$ به صورت $\hat{\beta}'=\hat{U}\hat{\beta}\hat{U}^{-1}$ و $\hat{\alpha}'_i=\hat{U}\hat{\alpha}_i\hat{U}^{-1}$ بدست آیند نیز می توانند به عنوان انتخاب های دیگری در نظر گرفته شوند زیرا در شرایط (۲-۲) صدق می کنند ولی چون تمام نمایش ها برای ماتریس های دیراک از نظر یکانی

معادل یکدیگر هستند لذا نتایج فیزیکی مستقل از انتخاب های خاصی است که برای این ماتریس ها در نظر گرفته می شود و فقط بعضی از نمایش ها ممکن است به محاسبات ریاضی ساده تری منجر شود [۱۶].

۲-۱-۲) جریان احتمال و معادله پیوستگی

در این بخش با بدست آوردن یک معادله پیوستگی از معادله دیراک، چاربردار چگالی جریان و احتمال تعیین می شوند. بدین منظور اگر معادله (۲-۱) را از سمت چپ در $\psi^{\dagger}$ به صورت زیر ضرب کنیم [۱۶]:

$$i\hbar\psi^{\dagger}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\psi^{\dagger}\hat{\alpha}_k\frac{\partial}{\partial x^k}\psi+m_0c^2\psi^{\dagger}\hat{\beta}\psi\ , \tag{۲-۴}$$

که در آن $\psi^{\dagger}=\begin{pmatrix}\psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^*\end{pmatrix}$. از طرف دیگر فرم الحاقی معادله (۲-۱) به صورت زیر است:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial t}=-\frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial x^k}\hat{\alpha}_k^{\dagger}+m_0c^2\psi^{\dagger}\hat{\beta}^{\dagger}, \tag{۲-۵}$$

که با ضرب ψ از سمت راست در این معادله و با توجه به هرمیتی بودن ماتریس های $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$ خواهیم داشت:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial x^k}\hat{\alpha}_k\psi+m_0c^2\psi^{\dagger}\hat{\beta}\psi\ . \tag{۲-۶}$$

کم کردن رابطه (۲-۶) از (۲-۴) منجر به معادله دیفرانسیل زیر می شود:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^{\dagger}\psi\right)=\frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\psi^{\dagger}\hat{\alpha}_k\psi\right)\ , \tag{۲-۷}$$

معادله بالا را می توان به صورت ساده تر زیر نوشت:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\ \vec{j}=0\ , \tag{۲-۸}$$

که در آن تعاریف زیر را برای ρ و $\vec{j}$ داریم:

$$\rho=\psi^{\dagger}\psi=\sum_{i=1}^{4}\psi_i^*\psi_i\ ,\qquad \vec{j}=c\psi^{\dagger}\hat{\alpha}\psi\ , \tag{۲-۹}$$

آنگاه با انتگرال گیری از طرفین معادله پیوستگی (۲-۸) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho d^3x=-\int_V\mathrm{div}\ \vec{j}d^3x=-\int_F\vec{j}\cdot df=0\ \Rightarrow\int_V\rho d^3x=\mathrm{const}\ . \tag{۲-۱۰}$$

در رابطه بالا V یک حجم معین و F سطح آن است. رابطه (۲-۹) نشان می دهد که ρ یک کمیت مثبت است بنـابراین بـا توجه به قانون بقای (۲-۸) می توان ρ را به عنوان چگالی احتمال در نظر گرفت. $\vec{j}$ نیز چگالی جریان احتمال نامیده مـی شود، بعلاوه $\{c\rho, \vec{j}\}$ چاربردار چگالی جریان و احتمال را تشکیل می دهند.

۲-۱-۳) هموردایی معادله دیراک

معادله (۲-۱) به فرمی نوشته شده است که قسمت های زمانی و فضایی از یکـدیگر جـدا شـده و هـر کـدام دارای ضـرایب متفاوتی هستند. در بعضی از ملاحظات مناسب تر است که معادله دیراک به فرم نوشتاری چهار بعـدی در نظـر گرفتـه شـود. بدین منظور با ضرب $\frac{\hat{\beta}}{c}$ از سمت چپ در معادله (۲-۱) خواهیم داشت [۱۶]:

$$\left(\hat{\beta} i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} + i\hbar \sum_{k=1}^{3} \hat{\beta}\hat{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial x^k} - m_0 c\right)\psi = 0 \ , \tag{۲-۱۱}$$

با قرار دادن تعاریف به صورت:

$$\hat{\gamma}^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i \ , \quad \hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} \ , \quad i = 1,2,3 \ , \tag{۲-۱۲}$$

از این به بعد برای سادگی ماتریس های γرا بدون علامت عملگر در نظر می گیریم. معادله (۲-۱۱) بـه فـرم سـاده تـر زیـر تبدیل می شود:

$$i\hbar\left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right)\psi - m_0 c\psi = 0 \ , \tag{۲-۱۳}$$

و یا:

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c\right)\psi(x) = 0 \ , \tag{۲-۱۴}$$

که در آن چاربردار $\{ct, x^1, x^2, x^3\}$ برای توصیف مختصات فضا-زمان به کار برده شده است. با توجه بـه روابـط (۲-۲) مربوط به ماتریس های دیراک، می توان رابطه پادجابجایی زیر را برای ماتریس های جدید γ به صورت زیر نوشت:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2Ig^{\mu\nu} \ , \tag{۲-۱۵}$$

که در آن I ماتریس واحد ۴×۴ و $g^{\mu\nu}$ متریک قطری با درایه های $(+,-,-,-)$ است. طبق رابطه (۲-۱۲) مشخص است که γ^iها ماتریس هایی یکانی و پادهرمیتی هستند در صورتی که γ^0 یکانی و هرمیتی است. نمایش ماتریس های γ بر اساس روابط (۲-۳) به صورت زیر است:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{۲-۱۶}$$

یک نظریه نسبیتی صحیح باید هموردای لورنتسی باشد به این معنا که شکل آن تحت انتقال از یک سیستم لخت به سیستم لخت دیگر ناوردا باقی بماند. دو مشاهده گر A و B در سیستم های لخت متفاوت یک رویداد فیزیکی یکسان را با مختصات فضا- زمانی مخصوص و متفاوت خود توصیف می کنند. اگر مختصات رویداد برای مشاهده گر A با x^μ و برای مشاهده گر B با x'^μ مشخص شود این دو مختصات توسط تبدیلات لورنتس به هم مرتبط می شوند:

$$x'^\nu = \sum_{\mu=0}^{3} a^\nu{}_\mu x^\mu , \tag{۲-۱۷}$$

معادله (۲-۱۷) یک تبدیل خطی همگن است و ضرایب a^ν_μ ظاهر شده در آن فقط به سرعت های نسبی و چرخش های فضایی دو چارچوب مرجع وابسته هستند و در رابطه تعامد زیر صدق می کنند:

$$a^\mu{}_\nu a_\mu{}^\sigma = \delta^\sigma_\nu . \tag{۲-۱۸}$$

هموردایی معادله دیراک شامل دو مورد زیر است:

الف) باید یک قانون صریحی وجود داشته باشد که بر طبق آن مشاهده گر B بتواند $\psi'(x')$ مربوط به خود را در صورت مشخص بودن $\psi(x)$ مربوط به مشاهده گر A محاسبه کند.

ب) بر اساس قانون نسبیت که یکسان بودن شکل ریاضی یک قانون فیزیکی در چارچوب های لخت را بیان می کند، $\psi'(x')$ نیز باید به عنوان یک جواب برای معادله دیراک در سیستم پریم دار به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$\left(i\hbar\gamma'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m_0 c\right)\psi'(x') = 0 , \tag{۲-۱۹}$$

که در آن ماتریس های γ'^μ نیز باید در روابط پادجابجایی زیرمشابه ماتریس های γ^μ صدق کنند:

$$\gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu = 2I g^{\mu\nu} ,$$

و همچنین:

$$\left(\gamma'^0\right)^\dagger = \gamma'^0, \quad \left(\gamma'^i\right)^\dagger = -\gamma'^i, \quad i = 1,2,3 ,$$