بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش کاربردی

عنوان:

روش‌های نقطه درونی برای حل مسائل مکمل خطی

استاد راهنما:
دکتر حسین منصوری

استاد مشاور:
دکتر مریم زنگی آبادی

ارائه دهنده:
محمد پیرحاجی

خرداد ۸۹

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

تقدیم به روح پدرم.

تشکر و قددانی

خداوند بزرگ را به خاطر الطاف، نعمت‌های بی‌شمار و توفیق ادامه‌ی تحصیل شکر گزارم و بر خود واجب می‌دانم از زحمات و الطاف بندگانش در راه تحقق کوچک ترین ثمره دوران تحصیلم قدردانی نمایم.

صمیمانه ترین مراتب سپاس خود را به استاد گرامی آقای دکتر حسین منصوری تقدیم نموده، که حضور ایشان به عنوان یک پشتوانه علمی همیشه مرا در پیچ و خم‌های راه علم یاری کرده است و آن چه که در این پژوهش به دست آوردم بی‌مدد ایشان هیچ است.

از خانم دکتر زنگی‌آبادی که زحمت مشاوره‌ی این پایان نامه را بر عهده گرفتند و از نظرات ارزشمندشان مرا بهرمند ساختند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از داوران گرامی آقایان دکتر ؟ و دکتر ؟ که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

مراتب قدر دانی خود را از استاد گرامی آقای ؟ نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی دانشکده به عمل می آورم.

در پایان از دوستان و همکلاسی‌های عزیزم که در این مدت مرا صمیمانه همراهی کردند، سپاسگزارم و از خداوند متعال موفقیت روز افزون آنان را خواهانم.

چکیده

مساله مکمل خطی، مساله یافتن جفت بردار $(x, s) \in R^{2n}$ می‌باشد به طوری که

$$s = Mx + q, \quad x^T s = 0, \quad (x, s) \geq 0.$$

هر جفت مساله برنامه ریزی خطی اولیه — دوگان و یا برنامه ریزی محدب درجه دوم را می‌توان به فرم یک مساله مکمل خطی نوشت(ببینید $Kojima$[۱۴]). مسائل مکمل خطی از مسائل موازنه اقتصادی، بازی‌های غیر مشارکتی و مسائل انتقال ترافیک ناشی می‌شوند.

روش‌های زیادی برای حل مسائل مکمل خطی موجود می‌باشد که از این میان روش‌های نقطه درونی توجه بیشتری را نسبت به سایر روش‌ها به خود جلب کرده است. با ارائه مقاله $Karmarkar$[۹]، روش‌های نقطه درونی برای مسائل برنامه ریزی خطی به طور جدی مورد مطالعه قرار گرفتند. چند سال بعد مسائل مکمل خطی نظر قابل توجهی از محققان را به علت ارتباط نزدیکی که با مسائل برنامه ریزی خطی داشت، به خود جلب کرد. روش‌های نقطه درونی، نه تنها به خاطر عملکرد تئوری بلکه به خاطر کاربردهای عملی آنها شناخته شده می‌باشند. در این میان، روش نقطه درونی اولیه— دوگان نسبت به سایر روش‌های نقطه درونی مناسب‌تر می‌باشد.

یک تفاوت بین روش‌های نقطه درونی مطابق با این که آیا آنها روش‌های نقطه درونی شدنی یا روش‌های نقطه درونی نشدنی هستند، موجود می‌باشد. روش‌های نقطه درونی شدنی از یک نقطه اکیداً شدنی شروع می‌شوند و شدنی بودن را در طول الگوریتم حفظ می‌کنند. به دست آوردن نقطه

اولیه شدنی در همه روش‌های نقطه درونی غیر بدیهی می‌باشد. از طرف دیگر، روش‌های نقطه درونی نشدنی با یک نقطه دل خواه مثبت شروع می‌شوند و با نزدیک شدن به جواب بهین، شدنی بودن تأمین می‌شود.

در این پایان نامه یک روش نقطه درونی شدنی و نشدنی جدید برای حل مساله مکمل خطی ارائه داده، ثابت می‌کنیم پیچیدگی الگوریتم ارائه شده منطبق بر بهترین کران تکرار به دست آمده برای مسائل مکمل خطی می‌باشد.

کلمات کلیدی

مساله مکمل خطی، روش نقطه درونی شدنی، روش نقطه درونی نشدنی، مسیر مرکز، شکاف دوگان، جهت جستجو، الگوریتم، نرم افزار مطلب.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

فضای برداری اقلیدسی n بعدی	$\mathbb{R}^n$
فضای ماتریس‌های حقیقی $n \times n$	$\mathbb{R}^{n\times n}$
متعلق است به	$\in$
متعلق نیست به	$\notin$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
اجتماع	$\bigcup$
اشتراک	$\bigcap$
ترانهاده ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	A^T
مولفه (i,j) ام از ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	A_{ij}
بردار همه یک	e
ماتریس واحد در فضای مناسب	I
پارامتر باریر یا پارامتر شکاف دوگان	μ
مقدار اولیه از μ	μ°
$i-$ امین مولفه از بردار x	x_i
ترانهاده بردار x	x^T
نرم اقلیدسی از بردار x	$\|\|x\|\|$
نرم بی‌نهایت از بردار x	$\|\|x\|\|_\infty$
مولفه بیشینه‌ی x	$x_{\max}$
مولفه کمینه‌ی x	$x_{\min}$

Δx	جهت جستجو در فضای x
Δs	جهت جستجو در فضای s
ϵ	پارامتر دقت
θ	در تغییر μ استفاده می‌شود
$v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$	بردار واریانس
e	برداری که همه‌ی مولفه‌های آن ۱ می‌باشد
τ	پارامتر اندازه
$\log(t)$	لگاریتم طبیعی از t
(P)	مساله برنامه ریزی خطی در فرم استاندارد
(D)	مساله دوگان از (P)
LCP	مساله مکمل خطی
F	مجموعه شدنی از مساله مکمل خطی
S_{++}	مجموعه نقاط درونی ناحیه شدنی مساله مکمل خطی
S_{cp}	مجموعه جواب از مساله مکمل خطی
X	ماتریس قطری که روی قطر آن مولفه‌های بردار x قرار دارد
S	ماتریس قطری که روی قطر آن مولفه‌های بردار s قرار دارد
$S_{cen}(\alpha)$	همسایگی $\alpha-$ مرکز

پیشگفتار

مساله مکمل خطی مساله یافتن جفت بردار $(x,s) \in \mathbb{R}^{2n}$ می‌باشد به طوری که

$$s = Mx + q, \quad x^T s = 0, \quad (x,s) \geq 0.$$

برای حل مسائل مکمل خطی روش‌های زیادی پیشنهاد شده است که از این میان، روش‌های نقطه درونی مناسب‌تر می‌باشند. اولین بار روش‌های نقطه درونی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی توسط $Karmarkar$[۹] ارائه داده شده است. این روش‌ها خود به دو زیر شاخه روش‌های نقطه درونی شدنی و روش‌های نقطه درونی نشدنی تقسیم می‌شوند.

توسیع روش‌های نقطه درونی شدنی از مسائل برنامه ریزی خطی به مسائل مکمل خطی در بسیاری از موارد موفقیت آمیز بوده است (ببینید [۶,۲۵,۲۶]). اخیراً $Peng$[۲۱,۲۲] و همکارانش یک روش شدنی اولیه — دوگان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ارائه و سپس آن را به مسائل مکمل خطی توسیع داده‌اند. کران تکرار به دست آمده توسط این نویسندگان برای مسائل مکمل خطی به ترتیب برای روش‌های گام کوتاه و گام بلند، $O(\sqrt{n}) \log \frac{n}{\varepsilon}$ و $O(\sqrt{n} \log n) \log \frac{n}{\varepsilon}$ می‌باشد که در حال حاضر بهترین کران تکرار به دست آمده برای حل این نوع مسائل می‌باشد.

$Lustig$[۱۷] و $Tanabe$[۲۸] اولین کسانی بودند که روش نقطه درونی نشدنی را برای مسائل برنامه ریزی خطی ارائه دادند. $Kojima$[۱۵] و همکارانش اولین کسانی بودند که همگرایی روش نقطه درونی نشدنی را برای مسائل برنامه ریزی خطی به اثبات رساندند. $Zhang$[۳۲] اولین کسی بود که یک روش اولیه — دوگان نشدنی با پیچیدگی $O(n^2 \log \frac{1}{\varepsilon})$، برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ارائه داد. همچنین $Mizuno$[۲۰] و $Potra$[۲۳,۲۴] یک روش اولیه — دوگان نشدنی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با پیچیدگی $O(n \log \frac{1}{\varepsilon})$ ارائه دادند.

بهترین کران تکرار به دست آمده برای حل مسائل مکمل خطی با روش نقطه درونی نشدنی توسط $Potra$[۲۵] ارائه داده شده است. این کران تکرار برابر است با

$$O\Big(n\log\frac{\max\Big\{(x^\circ)^T s^\circ, ||r^\circ||\Big\}}{\epsilon}\Big).$$

در کران بالا (x°, s°) و r° به ترتیب معرف نقطه شروع الگوریتم و بردار باقیمانده متناظر با نقطه شروع می‌باشد.

در این پایان نامه به مطالعه روش‌های نقطه درونی برای حل مسائل مکمل خطی می‌پردازیم. به همین منظور مباحث خود را در هفت فصل به صورت زیر تنظیم کرده‌ایم.

در فصل اول، به طور مختصر به معرفی مساله برنامه ریزی خطی و دوگان آن می‌پردازیم و روش‌های حل مساله برنامه ریزی خطی را ارائه می‌دهیم.

در فصل دوم الگوریتم‌های زمان – چند جمله‌ای را به طور کلی معرفی کرده، شرط توقف این الگوریتم‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل سوم دو نوع الگوریتم زمان – چند جمله‌ای (الگوریتم‌های معرفی شده در [۱۲]) برای حل مسائل مکمل خطی معرفی کرده، پیچیدگی این الگوریتم‌ها را محاسبه می‌کنیم.

در فصل چهارم یک روش نقطه درونی شدنی جدید با گام کامل نیوتن برای حل مسائل مکمل خطی ارائه داده، نشان می‌دهیم پیچیدگی الگوریتم ارائه داده شده منطبق بر بهترین کران تکرار به دست آمده برای روش‌های نقطه درونی شدنی می‌باشد.

در فصل پنجم یک روش نقطه درونی نشدنی جدید برای حل مسائل مکمل خطی معرفی کرده ، ثابت می کنیم پیچیدگی الگوریتم ارائه داده شده منطبق بر بهترین کران تکرار به دست آمده برای روش‌های نقطه درونی نشدنی می‌باشد.

در فصل ششم بعد از بیان جزئیات الگوریتم نقطه درونی نشدنی ارائه شده در فصل پنجم، چند مثال عددی را به کمک نرم افزار مطلب حل می‌کنیم و جواب بهین را برای هریک از مثال‌ها به دست

می آوریم.

در فصل هفتم نتیجه کلی مطالب آورده شده در این پایان نامه را بیان کرده، با ارائه پیشنهاداتی در مورد روش‌های حل مسائل مکمل خطی این فصل را به پایان می‌بریم.

فصل ۱

مختصری از مسائل برنامه ریزی خطی

اهداف کلی

اهداف مورد نظر برای ارائه‌ی این فصل را می توان به طور کلی به صورت زیر بیان کرد:

۱ — معرفی مساله برنامه ریزی خطی.

۲ — معرفی روش‌های حل مساله برنامه ریزی خطی.

۳ — معرفی دوگان یک مساله برنامه ریزی خطی.

۱.۱ مقدمه

مساله‌ی برنامه ریزی خطی مساله‌ای با کمینه سازی یا بیشینه سازی یک تابع خطی، همراه با محدودیت‌های خطی به صورت مساوی یا نامساوی می‌باشد. شروع برنامه ریزی خطی از سال ۱۹۴۱ با تحقیقات اقتصاددان معروف *Leontief*، همراه می‌باشد. پیشرفت فن برنامه ریزی خطی و حل آن مدیون [۲]*Gorge Dantzing* ریاضی‌دان معروف و همکاران وی می‌باشد. اولین روش برای حل این نوع مسائل، روش سیمپلکس بود که در سال ۱۹۴۷ توسط [۲]*Gorge Dantzing* ارائه شد. روند انجام الگوریتم سیمپلکس بدین شکل بود که از یک نقطه رأسی شدنی شروع می‌شد و برای بهبود مقدار تابع هدف در جهت نقاط رأسی شدنی مجاور حرکت می‌کرد. این روند تا زمانی که مقدار تابع هدف جاری بهتر از مقدار تابع هدف در مرحله قبل باشد، ادامه می‌یافت. هرچند *Klee* و *Menty* در [۱۱] ثابت کردند که پیچیدگی روش سیمپلکس در بدترین حالت از نوع نمایی است ولی این روش، هم چنان تنها روش برای حل مسائل برنامه ریزی خطی بود.

اولین الگوریتم زمان — چند جمله‌ای در سال ۱۹۷۹ توسط [۱۰]*Khachiyan* ارائه شد. او همچنین ثابت کرد که مسائل برنامه ریزی خطی کلاسی از مسائل حل پذیر در زمان — چند جمله‌ای است. یعنی برای هر نمونه از مساله، زمان مورد نیاز برای محاسبه جواب، از بالا به یک چند جمله‌ای کراندار می‌باشد.

۲.۱ مساله‌ی برنامه ریزی خطی

یک مساله‌ی برنامه ریزی خطی، مساله‌ی بهینه سازی تابع هدف خطی با متغیرهای تصمیم $x_1, x_2, ..., x_n$، همراه با محدودیت‌های خطی به فرم مساوی یا نامساوی می‌باشد. در حالت استاندارد یک مساله‌ی برنامه ریزی خطی به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\min \quad Z \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

فرم ماتریسی این مساله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min\ Z &= c^T x \\ (P) \qquad Ax &= b, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

که در آن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in R^{m\times n},$$

و

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in R^m, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in R^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$$

می‌باشند. توجه داشته باشیم که در تعریف مساله (P) هر گاه محدودیت‌ها از نوع بزرگ‌تر یا مساوی باشند، در این صورت مساله را یک مساله برنامه ریزی خطی از نوع متعارفی می‌نامند.

۱.۲.۱ اصطلاحات اساسی

در این قسمت چندین تعریف اساسی در مسائل برنامه ریزی خطی استاندارد را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ جواب شدنی

بردار x را یک جواب شدنی برای مساله‌ی برنامه ریزی خطی گویند هر گاه بردار x در روابط $Ax = b$ و $x \geq 0$ صدق کند.