بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

فضای پیچیدگی مجموعه مرتب خطی مقدار

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا مطلبی

استاد مشاور:

دکتر قاسم نریمانی

پژوهشگر:

یوسف ابوالحسن پور

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم، مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم مدیون حضور سبز آنهاست...

و تقدیم به

همسر عزیزم که همواره در روزهای سخت مشوق و پشتیبان من بوده است.

تقدیر و تشکر:

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان حق او گزاردن نتوانند. خدای را بهر چه که او را نزدیکترین فرشتگانش و گرامیترین آفریدگانش و پسندیده‌ترین ستایش کنندگانش، ستوده‌اند. سپاسی که حمد آن را انتها، عدد آن را شمارش، به پایان آن دسترسی و مدت آن را بریدنی نیست.

در آغاز بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر مهربانم که در تمام مراحل زندگیم از هیچگونه تلاشی در راه تحصیل اینجانب دریغ نکرده و همواره مشوق من در ادامه تحصیل و چراغ هدایتی برایم بودند، صمیمانه تشکر کنم.

از استاد فرزانه و فرهیخته ام جناب آقای دکتر محمدرضا مطلبی که با صبر و بردباری در پیشرفت علمی من کوشیدند و با تجارب گرانمایه خود راهنما و راهگشای اینجانب بودند نهایت سپاسگذاری و قدردانی را دارم و برای ایشان آرزوی سلامتی و موفقیت روز افزون می‌کنم و همچنین از استاد با کمالات و فرهیخته‌ام جناب آقای دکتر قاسم نریمانی که همواره باعث دلگرمی اینجانب بودند نهایت تشکر را دارم. و در نهایت از استاد گرانقدر جناب دکتر محمدباقر فرشباف مقیمی که زحمت داوری و بازخوانی این رساله را بر عهده داشتند کمال سپاس و تشکر را دارم.

امیدوارم دوباره توفیق شاگردی این سه بزرگوار نصیب من گردد.

در پایان از زحمات اساتید محترم و دانشجویان عزیز دانشگاه محقق اردبیلی و بخصوص از هم‌اتاقی‌ها و دوستان عزیزم که در طی دوران تحصیل مشوق و همراه من بودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

یوسف ابوالحسن پور

شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: ابوالحسن پور **نام:** یوسف

عنوان پایان نامه :

فضای پیچیدگی مجموعه مرتب خطی مقدار

استاد راهنما: دکتر محمد رضا مطلبی
استاد مشاور: دکتر قاسم نریمانی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض
گرایش: آنالیز **دانشگاه:** محقق اردبیلی
دانشکده: علوم ریاضی **تاریخ دفاع :** ۹۱/٦/۲۱ **تعداد صفحات :** ٦۴

چکیده :
مفهوم مجموعه مرتب خطی مقدار، تابع صعودی اکید، شبه متریک، مزدوج یک شبه متریک و کامل‌دوسویی را تعریف کرده و نشان می‌دهیم توابع صعودی اکید شبه متریک ایجاد می‌کنند. همچنین مفهوم مجموعه مرتب خطی مقدار (X,φ) را تعریف نموده و ثابت می‌کنیم φ از (X,d_φ) به توی فضای شبه متریک $(\mathbb{R}^+,u)$ یک ایزومتری می‌باشد. در ادامه مفهوم کامل بودن مجموعه مرتب خطی مقدار را بیان کرده و نشان می‌دهیم کامل شده هر مجموعه مرتب خطی مقدار یک مجموعه مرتب خطی مقدار است. در نهایت فضای پیچیدگی دوگان مجموعه مرتب خطی را تعریف کرده و به خواص آن می‌پردازیم.

کلید واژه ها:
مجموعه مرتب خطی مقدار، تابع صعودی اکید، شبه متریک وزن‌پذیر، کامل اسمیت، فضای پیچیدگی دوگان، متریک بئر.

فهرست مندرجات

مقدمه

در سراسر این پایان نامه منظور از مجموعه مرتب خطی مقدار زوج (X,φ) بوده که X مجموعه مرتب خطی و φ تابعی حقیقی مقدار و صعودی اکید می‌باشد.

هدف اصلی ما بررسی فضای پیچیدگی یک مجموعه مرتب خطی مقدار می‌باشد. فضاهای پیچیدگی برای اولین بار توسط شلکنز[۱] در سال ۱۹۹۵ معرفی شدند. او توانست نشان دهد فضای پیچیدگی یک مجموعه مرتب خطی مقدار وزن‌پذیر و کامل اسمیت می باشد. همچنین خواصی مانند فشردگی، کرانداری کلی و پیش‌فشردگی را در این فضاها مورد بررسی قرار داد. فضاهای متریک جزئی و فضاهای شبه متریک وزن پذیر توسط متیوز[۲] در سال ۱۹۹۲در مرجع [۱۸] معرفی شدند. وی رابطه جالبی بین فضاهای متریک جزئی و فضاهای شبه متریک وزن پذیر بدست آورد که گوشه‌هایی از این نتایج در این پایان نامه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

تدوین و نگارش این پایان نامه مبتنی بر منابع (متیوز، ۱۹۹۴). و (الترا [۳] و همکاران، ۲۰۰٦). و (رمگورا [۴] و همکاران، ۲۰۰۳). و (رمگورا، ۱۹۹۹). می‌باشد که در سه فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

در فصل اول علاوه بر ارائه تعاریف و مقدمات مورد نیاز فصل‌های بعد، تابع d_φ را با استفاده از تابع صعودی φ بر مجموعه مرتب X معرفی کرده و نشان می‌دهیم d_φ یک شبه متریک بر X بوده و شبه متریک مزدوج آن حفظ‌کننده ترتیب است. همچنین شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت

[۱] Schellekens
[۲] Matthews
[۳] Oltra
[۴] Romaguara

آن یک شبه متریک، وزن‌پذیر می‌باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که تابع صعودی اکید φ یک ایزومتری از فضای شبه متریک $(\mathbb{R}^+, u)$ به توی فضای شبه متریک (X, d_φ) می‌باشد.

فصل دوم شامل دو بخش است که در بخش اول با استفاده از گزاره‌های بیان شده در فصل اول و چهار لم که در همین فصل ارائه می‌شوند، ثابت می‌کنیم هر مجموعه مرتب خطی مقدار یک کامل شده دوسویی منحصر بفرد دارد. همچنین چگونگی ساخته شدن $(\tilde{X}, d_{\tilde{\varphi}})$ را مطالعه کرده و نشان می‌دهیم کامل اسمیت است.

در بخش دوم با استفاده از این قضیه که کامل‌شده دوسویی هر فضای شبه متریک وزن‌پذیر یک فضای شبه متریک وزن‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم هر فضای شبه متریک جزئی دارای کامل شده دوسویی منحصربفرد می‌باشد. بعلاوه با ارائه قضایایی ارتباط بین فضای شبه متریک جزئی و فضای شبه متریک را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در فصل سوم فضای پیچیدگی یک مجموعه مرتب خطی مقدار را تعریف کرده و ثابت می‌کنیم وزن‌پذیر و کامل دوسویی می‌باشد و لذا کامل اسمیت است. همچنین کاربردهایی از فضای پیچیدگی همراه با یک مثال بیان می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

رابطه $\leq$ بر مجموعه دلخواه A را **ترتیب جزئی** گویند هرگاه به‌ازای هر $a,b,c \in A$ خواص زیر برقرار باشد

الف) اگر $a \leq b$ و $b \leq a$، آنگاه $a = b$.

ب) اگر $a \leq b$ و $b \leq c$، آنگاه $a \leq c$.

ترتیب خطی روی مجموعه ناتهی X ترتیبی (جزئی) مانند $\leq$ بر X است به طوری که به ازای هر $x,y \in X$ داشته باشیم $x \leq y$ یا $y \leq x$.

مجموعه مرتب خطی عبارت است از زوج $(X,\leq)$ به طوریکه X یک مجموعه ناتهی بوده و $\leq$ یک ترتیب (خطی) روی X باشد.

مجموعه ناتهی X **مرتب خطی** گفته می شود، هرگاه ترتیب جزئی $\leq$ بر X موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x,y \in X$ داشته باشیم $x \leq y$ یا $y \leq x$.

فرض کنید $(X,\leq)$ و $(Y,\sqsubseteq)$ دو مجموعه مرتب خطی باشند. نگاشت $f : X \to Y$ را صعودی گویند هرگاه $x \leq y$ رابطه $f(x) \sqsubseteq f(y)$ را ایجاب کند. هرگاه $(Y,\sqsubseteq) = (\mathbb{R}^+,\leq)$، که در آن $\leq$ همان ترتیب معمولی بر $\mathbb{R}^+$ می‌باشد، آنگاه f را صعودی (اکید) بر $(X,\leq)$ گویند.

تعریف ۱.۱. منظور از **متر** بر مجموعه X تابعی مانند $d : X \times X \to [\circ,+\infty)$ می‌باشد به طوری که به‌ازای هر $x,y,z \in X$ دارای خواص زیر باشد

الف) $d(x,y) = \circ$ اگر وتنهااگر $x = y$،

ب) $d(x,y) = d(y,x)$،

ج) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

قضیه ۲.۱ هر دنباله کراندار در $\mathbb{R}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا می‌باشد.

اثبات. رجوع شود به (بیرخف [۱]، ۱۹۸۴). ■

---
[۱] Birkhoff

قضیه ۳.۱ در فضای متریک (X,d) دنباله (x_n) همگرا به $a \in X$ است اگر و تنها اگر هر زیردنباله آن همگرا به a باشد.

اثبات. رجوع شود به (بیرخف، ۱۹۸۴). ■

تعریف ۴.۱. گردایه τ از زیرمجموعه‌های X **راتوپولوژی** در X گویند اگر τ دارای سه خاصیت زیر باشد

الف) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$،

ب) اگر به ازای $i = ۱, ..., n$ ، $X_i \in \tau$، آنگاه $X_۱ \cap X_۲ \cap ... \cap X_n \in \tau$،

ج) اگر $\{X_\alpha\}$ گردایه دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارش‌پذیر یا شمارش‌ناپذیر) باشد، آنگاه $\bigcup_\alpha X_\alpha \in \tau$.

اگر τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را **فضای توپولوژی** و اعضای τ را **مجموعه‌های باز** در X می‌نامند.

تعریف ۵.۱. یک **شبه متریک** بر X عبارت است از تابع حقیقی مقدار نامنفی d بر $X \times X$، بطوریکه به ازای هر $x, y, z \in X$ خواص زیر بر قرار باشند

الف) $d(x,x) = ۰$،

ب) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

در این پایان نامه، منظور از شبه متریک نما روی X، یک متر مانند d بر X می‌باشد بطوریکه $d(x,y) = d(y,x) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$.

هرگاه d یک شبه متریک بر X باشد آنگاه تحدید آن بر هر زیرمجموعه X را نیز با d نشان خواهیم داد. (X,d) را فضای شبه متریک گویند هرگاه X مجموعه‌ای ناتهی بوده و d یک شبه متریک بر X باشد.

تعریف ۶.۱. ترتیب متناظر $\leq_d$ برای فضای شبه متریک (X,d) به‌صورت زیر تعریف می‌شود $x \leq_d y$ اگر و تنها اگر $d(x,y) = ۰$.

تعریف ۷.۱. هر شبه متریک d بر مجموعه X، یک توپولوژی مانند $\tau(d)$ ایجاد می‌کند بطوریکه d–گوی های باز $\{B_d(x,r) : x \in X,\ r > 0\}$ پایه‌ای برای آن است، که در آن به ازای $x \in X$ و $r > 0$، $B_d(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.

تعریف ۸.۱. شبه متریک d را بر مجموعه مرتب $(X, \leq)$ **حفظ‌کننده** ترتیب گویند هرگاه رابطه $x \leq y$ نتیجه دهد $x \leq_d y$.

تعریف ۹.۱. هرگاه d یک شبه متریک بر X باشد، تابع d^{-1} را بر $X \times X$ به‌صورت $d^{-1}(x,y) = d(y,x)$ تعریف کرده و آن را **مزدوج** d می‌نامند. همچنین تابع d^s بر $X \times X$ به‌صورت $d^s(x,y) = d(x,y) \vee d^{-1}(x,y)$ تعریف می‌شود که در آن علامت $\vee$ به معنی سوپریمم می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱. شبه متریک d را بر X **کامل دوسویی** گویند، هرگاه d^s یک متریک کامل بر X باشد. دراین صورت (X,d) را فضای شبه متریک کامل دوسویی گویند.

مثال ۱۱.۱ شبه متریک بالایی u روی $\mathbb{R}$ به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(x,y) = (y-x) \vee 0$$

دراینصورت بنا به گزاره ۱۶.۱ زوج $(\mathbb{R},u)$ شبه متر کامل دوسویی می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید $\Re^\omega$ مجموعه تمام توابع از ω به $\Re$ باشد. به‌ازای $x,y \in \Re^\omega$ که $x : \omega \to \Re$ و $y : \omega \to \Re$، متریک تابع d_ρ روی $\Re^\omega \times \Re^\omega$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_\rho(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}[u(x(n),y(n)) \wedge 1].$$

d_ρ یک شبه‌متریک بر $\Re^\omega$ می‌باشد بطوریکه توپولوژی $\tau(d_\rho)$ که بوسیله d_ρ ایجاد می‌شود بر توپولوژی فضای حاصلضربی $\prod_{n\in\omega}(\Re^+,u)$ منطبق است.

به‌وضوح $d_\rho \leq d_C$ می‌باشد زیرا

$$d_\rho(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}[u(x(n),y(n)) \wedge 1]$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}[u(x(n), y(n)) \vee 0]$$
$$= d_C(x, y).$$

تعریف ۱.۱۳. یک متریک جزئی بر مجموعه ناتهی X عبارت است از تابع $P : X \times X \to [0, \infty)$ بطوریکه به‌ازای هر $x, y, z \in X$ خواص زیر برقرار باشند

الف) $x = y$ اگر و تنها اگر $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$ ،

ب) $p(x, x) \leq p(x, y)$ ،

ج) $p(x, y) = p(y, x)$ ،

د) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$.

زوج (X, p) را فضای متریک جزئی گویند هرگاه X مجموعه‌ای ناتهی بوده و p یک متریک جزئی بر X باشد.

تعریف ۱.۱۴. هر متریک جزئی p روی مجموعه X یک توپولوژی مانند $\tau(p)$ بر آن ایجاد می‌کند بطوریکه p–گوی های باز $\{B_p(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ پایه‌ای بر آن است به‌ازای $x \in X$ و $\varepsilon > 0$، $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$.

گزاره ۱.۱۵ هرگاه φ یک تابع صعودی بر مجموعه مرتب خطی $(X, \preceq)$ باشد، آنگاه تابع حقیقی مقدار d_φ بر $X \times X$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، یک شبه متر بوده و $(d_\varphi)^{-1}$ حفظ کننده ترتیب است

$$d_\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi(y) - \varphi(x) & x \leq y \ , \\ 0 & y \leq x \ . \end{cases}$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم d_φ شبه متر است. واضح است که $d(x, x) = 0$. حال نشان می‌دهیم $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. فرض کنید $z \leq x$. در اینصورت $d(x, z) = 0$ و درنتیجه $0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

حال فرض کنید $x \le z$. در این‌صورت اگر $z \le y$، آنگاه $x \le y$ پس خواهیم داشت

$$d(x,z) = \varphi(z) - \varphi(x) \le \varphi(y) - \varphi(x) = d(y,x)$$

در نتیجه $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ و چون $d(y,z) = 0$ پس حکم برقرار است. حال اگر $y \le z$ باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول . فرض کنید $y \le x$. هرگاه $x \le y$ باشد آنگاه $d(x,y) = 0$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$d(x,z) = \varphi(z) - \varphi(x) \ \le \ \varphi(z) - \varphi(y) = d_\varphi(y,z)$$

و لذا $d(x,z) \le d(y,x) + d(y,z)$ و چون $d(y,x) = 0$ پس حکم برقرار است.

حالت دوم. هرگاه $x \le y$، آنگاه داریم

$$d(x,z) = \varphi(z) - \varphi(x) = \varphi(z) - \varphi(y) + \varphi(y) - \varphi(x) = d(y,z) + d(x,y)$$

بنابراین $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ و لذا d_φ یک شبه متر بر X است.

حال ثابت می‌کنیم $(d_\varphi)^{-1}$ حفظ‌کننده ترتیب است، یعنی اگر $x \le y$ آنگاه $x \le_d y$. برای این منظور کافیست نشان دهیم $d_\varphi(x,y) = 0$. هر گاه $x \le y$ ، آنگاه $(d_\varphi)^{-1}(x,y) = d_\varphi(y,x) = 0$ و لذا $(d_\varphi)^{-1}$ حفظ‌کننده ترتیب می‌باشد. ■

گزاره ۱.۱۶ هرگاه φ تابعی صعودی (اکید) بر مجموعه مرتب خطی $(X, \preceq)$ باشد، آنگاه d_φ یک شبه متریک بر X است اگر و تنها اگر تابع φ صعودی اکید باشد.

اثبات. فرض کنید d_φ یک شبه متریک بوده و $x, y \in X$. بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می‌توان فرض کرد $x < y$. چون φ صعودی اکید است پس $\varphi(x) \le \varphi(y)$. اگر $\varphi(x) = \varphi(y)$ آنگاه $d_\varphi(x,y) = d_\varphi(y,x) = 0$ و لذا $x = y$ که تناقض است. بنابراین $\varphi(x) < \varphi(y)$.

برعکس، فرض کنید φ یک تابع صعودی اکید باشد. هرگاه $d_\varphi(x,y) = d_\varphi(y,x) = 0$، آنگاه $\varphi(x) = \varphi(y)$ وچون φ صعودی اکید است پس $x = y$. ■

مثال ۱۷.۱ تابع همانی id را روی $(\mathbb{R}^+, \leq)$ در نظر بگیرید. واضح است که d_{id} همان شبه متریک بالایی u بر $\mathbb{R}^+$ است، در واقع $d_{id}(x,y) = (y-x) \vee 0$.

مثال ۱۸.۱ فرض کنید $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$. تابع $\varphi_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را به‌صورت $\varphi_a(x) = ax$ تعریف می‌کنیم. واضح است که φ_a یک تابع صعودی اکید بوده و شبه‌متریک d_{φ_a} را به‌صورت زیر ایجاد می‌کند

$$d_{\varphi_a}(x,y) = \begin{cases} a(y-x) & x \leq y \ , \\ 0 & x > y \ . \end{cases}$$

تعریف ۱۹.۱. فضای شبه متریک (X,d) **وزن‌پذیر** گفته می‌شود، هرگاه تابعی مانند $w : X \to \mathbb{R}^+$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x,y \in X$ داشته باشیم

$$d(x,y) + w(x) = d(y,x) + w(y).$$

تابع w را تابع وزنی برای (X,d) و شبه متریک d را وزن‌پذیر توسط w گوییم . به عنوان مثال $(\mathbb{R}^+, u)$ توسط تابع همانی روی $\mathbb{R}^+$ وزن‌پذیر می‌باشد.

گزاره ۲۰.۱ هرگاه φ تابع صعودی اکید بر مجموعه مرتب خطی $(X, \preceq)$ باشد، آنگاه d_φ یک شبه متریک وزن‌پذیر با تابع وزن φ است.

اثبات. فرض کنید $x,y \in X$ و $x \leq y$. در این‌صورت داریم

$$d_\varphi(x,y) + \varphi(x) = \varphi(y) - \varphi(x) + \varphi(x) = \varphi(y)$$

و چون $d_\varphi(y,x) = 0$ پس $d_\varphi(x,y) + \varphi(x) = d_\varphi(y,x) + \varphi(y)$ و در نتیجه d_φ یک شبه متریک وزن‌پذیر است. ■

تعریف ۲۱.۱. **مجموعه مرتب خطی مقدار** عبارت است از زوج (X, φ) که در آن X یک مجموعه مرتب خطی بوده و φ تابعی اکیدا صعودی است.

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهای شبه متریک باشند. تابع $f:(X,d)\to(Y,e)$ را یک **ایزومتری** گویند هرگاه به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $e(f(x),f(y))=d(x,y)$. واضح است که هر ایزومتری از (X,d) به توی (Y,e) نگاشتی یک به یک است. هرگاه یک ایزومتری از (X,d) به (Y,e) موجود باشد، گویند (X,d) و (Y,e) ایزومتریک هستند.

گزاره ۲۳.۱ فرض کنید (X,φ) یک مجموعه مرتب خطی مقدار باشد در اینصورت φ ایزومتری از فضای شبه متریک (X,d_φ) به فضای شبه متریک $(\mathbb{R}^+,u)$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $x,y\in X$. هرگاه $x\leq y$، آنگاه $\varphi(x)\leq\varphi(y)$ ، درغیر این‌صورت داریم $\varphi(y)\leq\varphi(x)$. بنابراین در هر حالت خواهیم داشت

$$u(\varphi(x),\varphi(y))=(\varphi(y)-\varphi(x))\vee \circ=d_\varphi(x,y).$$

■

تعریف ۲۴.۱. فضای شبه متریک (X,d) **کامل‌پذیر اسمیت** است، اگر و تنها اگر هر دنباله $K-$کشی چپ در (X,d) یک دنباله کشی در (X,d^s) باشد.

دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را در (X,d) $K-$**کشی چپ** گویند، هرگاه به ازای هر $\varepsilon>\circ$ ، $k\in\mathbb{N}$ موجود باشد به طوریکه به ازای هر m و n با شرط $k\leq n\leq m$ رابطه $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ برقرار باشد.

تعریف ۲۵.۱. مجموعه A را درفضای متریک (X,d) **چگال** گویند هرگاه $\overline{A}=X$.

تعریف ۲۶.۱. فضای شبه متریک (X,d) **کامل اسمیت** است اگر و تنها اگر هر دنباله $K-$کشی چپ در (X,d) دارای نقطه حدی در (X,d^s) باشد.

تعریف ۲۷.۱. فضای شبه متریک (Y,q) کامل‌شده دوسویی فضای شبه متریک (X,d) گفته می‌شود هرگاه (Y,q) یک فضای شبه متریک کامل دوسویی باشد به طوریکه (X,d) با زیرفضایی چگال از فضای متریک (Y,q^s) ایزومتریک باشد.

تعریف ۲۸.۱. مجموعه مرتب خطی مقدار (X, φ) را **کامل دوسویی** گویند، هرگاه d_φ یک شبه متریک کامل دوسویی بر X باشد.

تعریف ۲۹.۱. هرگاه (X, φ) و (Y, ψ) دو مجموعه مرتب خطی مقدارباشند،آنگاه نگاشت صعودی مانند $h : X \to Y$ را ایزومتری گویند هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ ، $\psi(h(x)) = \varphi(x)$.

تبصره ۳۰.۱ هرگاه $h : (X, \varphi) \to (Y, \psi)$ ایزومتری باشد، آنگاه h یک به یک است. بنابراین h و $h^{-۱}$ نگاشت‌های صعودی اکید می‌باشند.

تعریف ۳۱.۱. دو مجموعه مرتب خطی مقدار (X, φ) و (Y, ψ) را ایزومتریک گویند هرگاه یک ایزومتری مانند h از X به‌توی Y موجود باشد.

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید (X, d) فضای شبه متریک و X^ω مجموعه تمام توابع از ω به X باشد. $x \in X$ را ثابت در نظر گرفته و به‌ازای هر $f, g \in \beta_x$ تعریف می‌کنیم

$$\beta_x = \{f \in X^\omega \mid \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}\ d^s(x, f(n)) < +\infty\}.$$

و

$$d_{\beta_x}(f, g) = \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}\ d(f(n), g(n)).$$

همچنین d_{β^s} بصورت زیر می‌باشد

$$d^s_{\beta_x}(f, g) = \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}\ d^s(f(n), g(n)).$$

زیرا

$$\begin{aligned} d^s_{\beta_x}(f, g) &= d^s_{\beta_x}(f, g) \vee d^s_{\beta_x}(g, f) \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}\ d(f(n), g(n)) \vee \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}\ d(g(n), f(n)) \\ &= \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n}\ d^s(f(n), g(n)). \end{aligned}$$

توجه کنید که به‌ازای هر $x \in X$، $\beta_x \neq \emptyset$. زیرا تابع f_x که به‌ازای هر $n \in \omega$ بصورت زیر تعریف می‌شود، متعلق به β_x است.

$$f_x : \omega \to X, \quad f_x(n) = x$$

بعلاوه d_{β_x} یک شبه متریک روی β_x بوده و به‌ویژه به‌ازای هر $f, g \in \beta_x$ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\ d^s(f(n), g(n)) \ \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\ d^s(f(n), x) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\ d^s(x, g(n)) < +\infty.$$

تعریف ۳۳.۱. فرض کنید (X, d) یک فضای شبه‌متریک باشد. دراینصورت شبه‌متریک d_X به‌ازای هر $f, g \in X^\omega$ بر $X^\omega \times X^\omega$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$d_X(f, g) = \sup\{\ d(f(n), g(n)) \mid n \in \omega\ \}.$$

گزاره ۳۴.۱ فرض کنید (X, d) فضای شبه متریک باشد. در اینصورت (X^ω, d_X) فضای شبه متریک کامل دوسویی خواهد بود.

اثبات. برای اثبات رجوع کنید به (کونزی [۱]، ۲۰۰۱). ■

تعریف ۳۵.۱. فضای شبه متریک (X, d) دارای ماکسیمم $x_0 \in X$ است هرگاه ترتیب متناظر با آن دارای ماکسیمم باشد یعنی به‌ازای هر $x \in X$، $x \leq_d x_0$.

[۱] Kunzi

فصل ۲

بررسی کامل اسمیت بودن مجموعه های مرتب خطی مقدار

۱.۲ کامل اسمیت بودن مجموعه های مرتب خطی مقدار

در این بخش با استفاده از گزاره‌های ۱۵.۱و ۱۶.۱و ۲۰.۱و ۲۳.۱ و لم‌های ۷.۲ و ۸.۲ و ۱۵.۲ و ۱۶.۲ که در همین فصل ارائه می‌شوند، ثابت خواهیم کرد هر مجموعه مرتب خطی مقدار یک کامل شده دوسویی منحصر بفرد دارد. همچنین چگونگی ساخته شدن $(\tilde{X}, d_{\tilde{\varphi}})$ را مطالعه کرده و نشان می‌دهیم کامل اسمیت است.

تعریف ۱.۲. مجموعه مرتب خطی مقدار کامل دوسویی (Y,ψ) را**کامل‌شده دوسویی مجموعه مرتب خطی مقدار**(X,φ) گویند، هرگاه (X,φ) با زیرفضایی از (Y,ψ) ، که در زیرفضای متریک $(Y,(d_\psi)^s)$ چگال است ایزومتریک باشد.

قضیه ۲.۲ فضای شبه متریک (X,d) کامل اسمیت است اگر و تنها اگر کامل دوسویی و کامل‌پذیر اسمیت باشد.

اثبات. فرض کنید (X,d) کامل دوسویی و کامل‌پذیر اسمیت باشد. نشان می‌دهیم (X,d) کامل اسمیت است. فرض کنید (x_n) دنباله $k-$کشی چپ در (X,d) باشد. چون (X,d) کامل‌پذیر اسمیت است بنابراین (x_n) دنباله‌ای کشی در (X,d^s) بوده و چون (X,d) کامل دوسویی است لذا (X,d^s) فضای متریک کامل می‌باشد. پس (x_n) در (X,d^s) دارای نقطه حدی بوده و لذا (X,d) کامل اسمیت است.

برعکس ، فرض کنید (x_n) دنباله $k-$کشی چپ در (X,d^s) باشد. چون (X,d) کامل اسمیت است لذا (x_n) دنباله‌ای $k-$کشی در (X,d) می‌باشد . لذا (x_n) دارای نقطه حدی در (X,d^s) بوده و درنتیجه (X,d) کامل دوسویی است. حال اگر (x_n) را دنباله‌ای کشی در (X,d) درنظر بگیرید، آنگاه چون (X,d) کامل اسمیت است لذا دارای نقطه حدی در (X,d^s) بوده و درنتیجه (x_n) دنباله‌ای کشی در (X,d^s) می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت (x_n) دنباله‌ای $k-$کشی در (X,d^s) بوده و لذا (X,d) کامل‌پذیر اسمیت است. ■