بسم الله الرحمن الرحیم

کلیه حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری‌های ناشي از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه رازی است.

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان :

مطالعه فضاهای متریک مخروطی و قضایای نقطه ثابت در آن‌ها از طریق روش اسکالرسازی

استاد راهنما:

دکتر علی فرج‌زاده

نگارش:

مینا شاه‌علی

شهریور ۹۰

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نام دانشجو:
مینا شاه‌علی

تحت عنوان :

مطالعه‌ی فضاهای متریک مخروطی و قضایای نقطه ثابت در آن‌ها از طریق روش اسکالرسازی

در تاریخ   توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه   به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر علی فرج‌زاده   با مرتبه‌ی علمی   امضاء:

استاد داور داخل گروه   دکتر سیده مرضیه قویدل   با مرتبه‌ی علمی   امضاء:

استاد داور خارج گروه   دکتر هوگر قهرمانی   با مرتبه‌ی علمی   امضاء:

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی فرج‌زاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.
همچنین از استاد گرانقدر سرکار خانم دکتر سیده مرضیه قویدل که به عنوان داور داخلی قبول زحمت فرمودند و جناب آقای دکتر هوگر قهرمانی که زحمت داوری خارجی این رساله را متقبل شده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مینا شاه‌علی
شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

فضای متریک مخروطی تعمیمی از فضای متریک معمولی می‌باشد که در قرن بیستم معرفی شده است. تاکنون، قضایای نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک متعددی در فضاهای متریک مخروطی، اثبات و ارائه شده است. در این پایان‌نامه با جایگزین کردن فضای برداری توپولوژیک به جای فضای باناخ حقیقی در مجموعه مقدار متر مخروطی، تعمیمی از فضای متریک مخروطی را بیان می‌کنیم که با عنوان فضای متریک مخروطی برداری توپولوژیک معرفی گردیده است. سپس از طریق یک تابعک غیرخطی اسکالرساز که روی یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب و هاسدورف تعریف شده است، متر مخروطی برداری توپولوژیک را به متر معمولی انتقال داده و نشان می‌دهیم که فضای متریک مخروطی برداری توپولوژیک و فضای متریک معمولی از نظر توپولوژیکی دارای خواص یکسان می‌باشند. هم‌چنین با درنظر گرفتن یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف و مخروطی از آن که دارای درون ناتهی است، تابعک مینکوفسکی متناظر به یک مجموعه‌ی مطلقاً محدب و جاذب را معرفی می‌کنیم و با استفاده از این تابعک، میان فضای متریک مخروطی برداری توپولوژیک و فضای متریک معمولی هم‌ارزی برقرار می‌کنیم و بعضی از قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های شبه انقباضی در فضای متریک مخروطی را بیان و اثبات می‌نماییم. به این ترتیب، بسیاری از نتایج نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های انقباضی و شبه‌انقباضی در فضای متریک مخروطی، می‌تواند با استفاده از روش اسکالرسازی (یعنی انتقال متر مخروطی برداری توپولوژیک به متر معمولی با استفاده از یک تابع اسکالرساز) به دست آید. هدف این پایان‌نامه پیدا کردن روشی ساده تر برای اثبات قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک مخروطی می‌باشد.

کلمات کلیدی: *فضای متریک مخروطی، فضای متریک مخروطی برداری توپولوژیک، نقطه ثابت، نگاشت شبه انقباضی.*

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیشگفتار

تاکنون تعمیم‌های متعددی از فضای متریک وجود داشته است. یک مورد از این تعمیم‌ها، فضای متریک مخروطی می‌باشد که به عنوان فضای k-متریک نیز شناخته شده است. این نوع فضاها در قرن بیستم توسط چندین نویسنده روسی، با جایگزین کردن یک فضای باناخ مرتب به جای مجموعه‌ی اعداد حقیقی به عنوان مجموعه مقادیر یک متر، معرفی گردیدند. مقالات [۳۱]، [۴۴]، [۴۷] و [۴] گویای این مطلب می‌باشند.
فضاهای نرم‌دار مرتب و مخروط‌ها کاربردهای متعددی در ریاضیات کاربردی دارند. به عنوان مثال در استفاده از روش تقریب نیوتن [۳۰-۲۷] و در نظریه‌ی بهینه‌سازی [۱۸].
در سال ۲۰۰۷ هانگ و ژانگ [1] مجدداً فضاهای متریک مخروطی را با در نظر گرفتن مخروط نرمال، معرفی کردند و کوشی بودن و همگرایی دنباله‌ها را در شرایط نقاط درونی مخروط مورد بررسی قرار دادند و بعضی از قضایای نقطه ثابت از جمله اصل انقباض باناخ را برای نگاشت‌های انقباضی در فضای متریک مخروطی نرمال بیان و اثبات کردند. پس از آن نویسندگان دیگری قضایای نقطه ثابت را در فضای متریک مخروطی مورد مطالعه قرار دادند. از جمله، ایلیچ و راکوسویچ [2] [۲۳]، رضاپور و همبرانی [3] [۳۷]، عباس و روادیز [4] [۲]، واعظپور و راجا [5] [۳۵]، ارشد، اعظم و وترو [6] [۱۰]، کادلبورگ، رادنوویچ و راکوسویچ [7] [۲۸]، لودارسزیک، پلبانیک و دولینسکی [8] [۴۶] و ... نتایج نقطه ثابت برای فضاهای متریک مخروطی را به اثبات رساندند. این نتایج در حل معادلات خطی و مشتق و انتگرال کاربرد دارند.
هم چنین قضایای نقطه ثابت مشترک برای فضاهای متریک مخروطی توسط وترو [9] [۴۵]، ارشد،

---

[1] Huang, Zhang

[2] Ilić, Rakočević

[3] Rezapour, Hamlbarani

[4] Abbas, Rhoades

[5] Vaezpour, Raja

[6] Arshad, Azam, Vetro

[7] Kadelburg, Radenović, Rakočević

[8] Włodarczyk, Plebaniak, Dolinski

[9] Vetro

اعظم و بگ [۱] [۹]، دی باری و وترو [۲] [۱۱] و [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت. کاربردهای این نتایج در نظریه‌ی معادلات انتگرال و نظریه‌ی توپولوژیکی سیستم‌های دینامیکی بردارمقدار، چشم‌گیر می‌باشد که در مراجع [۱۰]، [۴۳] و [۴۶] بررسی شده است.

در سال ۱۹۷۴ چریچ [۳] [۱۵] برای اولین بار، مفهوم نگاشت شبه‌انقباضی را معرفی کرد و قضیه‌ی نقطه ثابت برای این قبیل نگاشت‌ها را به اثبات رساند. سپس نتایج چریچ توسط کادلبورگ، رادنوویچ و راکوسویچ [۲۸]، ایلیچ و راکوسویچ [۴] [۲۳]، برای فضای متریک مخروطی تعمیم داده شد. همچنین قضیه‌ی نقطه ثابت چریچ توسط ایوانوو [۵] [۲۴]، دنس [۶] [۱۶]، آراندلوویچ، راجوویچ و کیلیباردا [۷] [۸] برای نگاشت‌های شبه‌انقباضی غیرخطی در فضای متریک تعمیم داده شد.

در سال ۲۰۱۰، وی شی دو [۸] [۱۹] با جایگزین کردن فضای برداری توپولوژیک به جای فضای باناخ حقیقی، فضای متریک مخروطی tvs را معرفی کرد و یک هم‌ارزی میان متر معمولی و متر مخروطی tvs برقرار نمود و به این ترتیب نشان داد که قضایای نقطه ثابت در فضای متریک مخروطی tvs را می‌توان با روشی ساده‌تر (با انتقال متر مخروطی به متر معمولی متناظرش) اثبات نمود.

این پایان نامه با اقتباس از چهار مقاله ی اصلی [۱۹]، [۳]، [۲۹]، و [۷] به مطالعه فضاهای متریک مخروطی و بررسی بعضی از قضایای نقطه ثابت در این فضاها می‌پردازد و شامل سه فصل می‌باشد.

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی بیان شده است.

فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول که برگرفته از مقاله‌ی [۱۹] است، فضای متریک مخروطی tvs را معرفی می‌کنیم و به وسیله‌ی تابعک‌های غیرخطی اسکالرساز، متر مخروطی tvs را به متر معمولی انتقال می‌دهیم. در بخش دوم که از مقاله‌ی [۳] گرفته شده است، قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ را برای فضای متریک مخروطی tvs ارائه می‌دهیم. در بخش سوم نیز که برگرفته از مقاله‌ی [۷] است، قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های شبه‌انقباضی غیرخطی که روی فضای متریک مخروطی tvs تعریف شده‌اند را اثبات می‌کنیم.

فصل سوم شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول از طریق تابعک‌هایی به نام تابعک مینکوفسکی،

---

[۱] Arshad, Azam, Beg

[۲] Di Bari, Vetro

[۳] Ćirić

[۴] Ilić, Rakočević

[۵] Ivanov

[۶] Danes

[۷] Aranđelović, Rajović, Kilibarda

[۸] Wei-Shih Du

متر مخروطی tvs را به متر معمولی منتقل می‌کنیم و سپس در بخش دوم، به اثبات قضایای نقطه ثابت در فضای متریک مخروطی با استفاده از متر معمولی متناظرشان می‌پردازیم. مطالب این فصل برگرفته از مقاله‌ی [۲۹] می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند را بیان می‌کنیم.
فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم اولیه آنالیز و توپولوژی عمومی آشنایی دارد. در سراسر پایان نامه $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$، به ترتیب نمایشگر مجموعه اعداد حقیقی و مجموعه اعداد طبیعی هستند.

۱-۱ فضاهای برداری توپولوژیک

فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی، $(X,+)$ یک گروه آبلی و $\mathbb{F}$ یک میدان باشد (در این پایان‌نامه $\mathbb{F}$ برابر با مجموعه اعداد حقیقی و یا مجموعه اعداد مختلط می‌باشد).

تعریف ۱-۱-۱.
گوییم X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ است هرگاه به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر $x \in X$ عضوی (که به صورت αx نوشته می‌شود) در X وجود داشته باشد به طوری که:

(۱) *به ازای هر $x,y \in X$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$*، $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$؛

(۲) *به ازای هر $x \in X$ و به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*، $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$؛

(۳) *به ازای هر $x \in X$ و به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*، $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$؛

(۴) *به ازای هر $x \in X$*، $1\,x = x$.

تعریف ۱-۱-۲.
فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ و $g : X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. آنگاه:

(آ) *g را یک نگاشت به طور مثبت همگن [۱] گوییم، هرگاه به ازای هر $\lambda \geq 0$ و برای هر $x \in X$ داشته باشیم:*

$$g(\lambda x) = \lambda g(x) \ ;$$

(ب) *g را زیرجمعی [۲] گوییم هرگاه برای هر $x,y \in X$، داشته باشیم:*

$$g(x+y) \leq g(x) + g(y) \ .$$

مثال ۱-۱-۳.
تابع $g(x) = |x|$ یک تابع به طور مثبت همگن و زیرجمعی است.

---

[۱] Positively homogeneous

[۲] Subadditive

تعریف ۱-۱-۴.

فرض کنیم X یک مجموعه ی ناتهی باشد و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، یعنی $\tau \subseteq P(X)$. τ را یک توپولوژی در X گوییم هرگاه:

(۱) $X, \emptyset \in \tau$؛

(۲) اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \tau$ آنگاه $\cup_{\alpha\in I} G_\alpha \in \tau$ (یعنی اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، عضوی از τ است)؛

(۳) اگر $\{G_1, G_2, G_3, ..., G_n\} \subseteq \tau$ آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ (یعنی اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، عضوی از τ است).

مثال ۱-۱-۵.

فرض کنیم $X = \{a, b\}$ و $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. در این صورت τ یک توپولوژی در X است.

تعریف ۱-۱-۶.

فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و τ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت، زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژیک گوییم.

تعریف ۱-۱-۷.

فضای توپولوژیک (X, τ) هاسدورف گفته می‌شود هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز از X مانند x و y مجموعه‌های بازی مانند U و V در X موجود باشند به طوریکه $x \in U$ ، $y \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

تعریف ۱-۱-۸. [۴۲]

فرض کنیم X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی در X باشد. در این صورت (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیک (tvs) [1] نامیم هرگاه توپولوژی τ روی X به گونه‌ای باشد که:

(آ) نگاشت $(x, y) \to x + y$ از $X \times X$ به X نسبت به توپولوژی حاصلضربی روی $X \times X$ پیوسته باشد؛

(ب) نگاشت $(t, x) \to tx$ از $\mathbb{R} \times X$ به X نسبت به توپولوژی حاصلضربی روی $\mathbb{R} \times X$ پیوسته باشد.

[1] Topological vector spase

اگر (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد، ما اغلب به اختصار می‌گوییم X یک فضای برداری توپولوژیک است.

مثال ۱-۱-۹. [۴۲]

فرض کنیم X یک فضای برداری، (Y,τ) یک فضای برداری توپولوژیک و $\mathcal{F}$ خانوادهای از توابع خطی از X به Y باشد. در این صورت کوچک ترین (ضعیف ترین) توپولوژی بر X که تمام توابع متعلق به $\mathcal{F}$ نسبت به آن پیوسته باشند، عبارت است از توپولوژی تولید شده توسط

$$\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\{f^{-1}(W) : W\in\tau_Y\}.$$

یک تور [۱] $\{x_\alpha\}$ در X به $x\in X$ همگرا است اگر و فقط اگر به ازای هر $f\in\mathcal{F}$، داشته باشیم

$$f(x_\alpha)\to f(x).$$

در این صورت می‌توان گفت X تحت این توپولوژی، یک فضای برداری توپولوژیک است.

تعریف ۱-۱-۱۰. [۴۰]

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. یک همسایگی نقطه $x\in X$ زیر مجموعه‌ای از X است که شامل مجموعه‌ی بازی حاوی x باشد.

تعریف ۱-۱-۱۱. [۴۲]

زیر مجموعه A از فضای برداری توپولوژیک X را کراندار گویند هرگاه برای هر همسایگی صفر مانند B در X، عدد $\lambda>0$ در $\mathbb{R}$ موجود باشد به طوریکه $A\subseteq\lambda B$.

تعریف ۱-۱-۱۲. [۴۲]

زیر مجموعه S از فضای برداری توپولوژیک X را جاذب نامند [۲] هرگاه تمام تک عضوی‌ها را جذب کند. یعنی، به ازای هر $x\in X$، $\varepsilon>0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $t\neq 0$ که $|t|\leq\varepsilon$، داشته باشیم

$$tx\in S.$$

(یا به طور معادل، اگر به ازای هر $x\in X$، $t_0>0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر t که $|t|\geq t_0$، آنگاه $x\in tS$.)

مثال ۱-۱-۱۳.

هر همسایگی از صفر در یک فضای برداری توپولوژیک جاذب است.

---

[۱] Net

[۲] Absorbing

۱-۲ فضاهای نرمدار و باناخ

فرض کنیم X یک فضای برداری با بردار صفر θ باشد.

تعریف ۱-۲-۱. [۴۲]

تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ یک نیم‌نرم [۱] بر X است هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(آ) *به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$؛*

(ب) *اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛*

(پ) *به ازای هر x و y در X، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

یک نیم‌نرم بر X را یک نرم [۲] گوییم، هرگاه در شرط زیر نیز صدق کند:

(ت) *$\|x\| = 0$ تساوی $x = \theta$ را ایجاب کند.*

زوج مرتب $(X, \|\ .\ \|)$ را یک فضای خطی نیم‌نرمدار [۳] (نرمدار [۴]) گوییم هرگاه $\|\ .\ \|$ یک نیم‌نرم (نرم) بر X باشد. اگر نیم‌نرم (نرم) شناخته شده باشد، آنگاه اغلب X را یک فضای خطی نیم‌نرمدار (نرمدار) گوییم.

توجه ۱-۲-۲.

هر فضای خطی نیم‌نرمدار، تحت توپولوژی حاصل از نیم‌نرم، یک فضای برداری توپولوژیک است. کافی است پیوسته بودن جمع و ضرب اسکالر را تحقیق کنیم که به راحتی از خواص (ب) و (پ) نیم‌نرم نتیجه می‌شوند.

تعریف ۱-۲-۳.

هر فضای باناخ [۵] یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش کامل می‌باشد.

مثال ۱-۲-۴.

مجموعه اعداد حقیقی همراه با $\|x\| = |x|$ نمونه‌ی ساده‌ای از یک فضای باناخ است.

---

[۱] Seminorm

[۲] Norm

[۳] Seminorm linear space

[۴] Norm linear space

[۵] Banach space

۱-۳ مجموعه‌های محدب و تابع مینکوفسکی

فرض کنیم X یک فضای برداری باشد.

تعریف ۱-۳-۱. [۴۲]

$K \subseteq X$ را مخروط گوییم هرگاه به ازای هر $\lambda > 0$، داشته باشیم

$$\lambda K \subseteq K.$$

مثال ۱-۳-۲.

$K = [0, +\infty)$ یک مخروط در $\mathbb{R}$ می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۳. [۴۲]

$K \subseteq X$ را متعادل [۱] گوییم هرگاه به ازای هر $x \in K$ و هر $t \in \mathbb{R}$ که $|t| \leq 1$، داشته باشیم

$$tx \in K.$$

مثال ۱-۳-۴.

بازه $[-1, 1]$ زیر مجموعه متعادلی از $\mathbb{R}$ است.

گزاره ۱-۳-۵. [۴۲]

در هر همسایگی از صفر، یک همسایگی متعادل از صفر وجود دارد.

تعریف ۱-۳-۶. [۴۲]

$K \subseteq X$ محدب است هرگاه به ازای هر $x, y \in K$ و هر $0 \leq t \leq 1$، داشته باشیم

$$tx + (1-t)y \in K.$$

از آنجا که اشتراک مجموعه‌های محدب، محدب است بنابراین اگر K زیرمجموعه‌ای از X باشد، آنگاه می‌توان کوچکترین مجموعه محدب شامل عناصر K را به دست آورد. این مجموعه که اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل عناصر K است، غلاف محدب [۲] K نامیده و با coK نشان داده می‌شود.

گزاره ۱-۱. [۴۲]

اگر $K \subseteq X$، آنگاه coK عبارت است از مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ به طوری که $x_i \in K$، $t_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

---

[۱] balenced

[۲] covex hull

تعریف ۱-۳-۷. [۴۲]

$K \subseteq X$ *مطلقاً محدب* [1] *است هرگاه متعادل و محدب باشد.*

مثال ۱-۳-۸.

فرض کنیم $X = \mathbb{R}^۲$ *و* $K = \{z \in \mathbb{R}^۲ : |z| \leq ۱\}$. *در این صورت* K *یک زیرمجموعه محدب و متعادل از* X *می‌باشد. زیرا اگر* $z_۱, z_۲ \in K$ *و* $\alpha \in [\circ, ۱]$*، آنگاه*

$$|\alpha z_۱ + (۱-\alpha)z_۲| \leq |\alpha z_۱| + |(۱-\alpha)z_۲|$$
$$\leq \alpha + (۱-\alpha) = ۱$$

در نتیجه $\alpha z_۱ + (۱-\alpha)z_۲ \in K$. *همچنین اگر* $z \in K$*، آنگاه برای هر* $t \in \mathbb{R}$ *که* $|t| \leq ۱$ *داریم:*

$$|tz| = |t||z| \leq ۱ .$$

بنابراین tz *عضوی از* K *می‌باشد. پس* K *مجموعه‌ای متعادل و محدب و در نتیجه مطلقاً محدب است.*

حال مثالی می‌آوریم از یک مجموعه محدب که مطلقاً محدب نیست.

مثال ۱-۳-۹.

زیر مجموعه‌ی $K = [۲, ۴] \times [۲, ۴]$ *از* $\mathbb{R}^۲$ *محدب است اما با توجه به این که* $(۲, ۲) \in K$ *ولی* $\frac{۱}{۲}(۲, ۲) \notin [۲, ۴] \times [۲, ۴]$*، پس* K *متعادل نیست و در نتیجه مطلقاً محدب نمی‌باشد.*

تعریف ۱-۳-۱۰. [۴۲]

فرض کنیم $K \subseteq X$ *یک مجموعه محدب و جاذب باشد. تابع* $P_K : X \to \mathbb{R}$ *را که به صورت*

$$P_K(x) = inf\{t > \circ : x \in tK\} \quad , \quad (x \in X)$$

تعریف می‌شود، تابع مینکوفسکی [2] *متناظر به* K *نامیده می‌شود.*

مثال ۱-۳-۱۱.

فرض کنیم X *یک فضای نیم‌نرم‌دار و* $K = \{x \in X : \|x\| < r\}$ *باشد. آنگاه به ازای هر* $x \in X$*، داریم:*

$$P_K(x) = inf\{t > \circ : x/t \in K\} = inf\{t > \circ : \|x/t\| < r\}$$
$$= inf\{t > \circ : \|x\|/r < t\} = \|x\|/r.$$

[1] Absolutely convex

[2] Minkowski function

۱-۴ فضاهای موضعاً محدب

تعریف ۱-۴-۱. [۴۲]
فضای برداری توپولوژیک (X,τ) را یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب یا به اختصار موضعاً محدب [۱] گوییم هرگاه τ یک پایه از همسایگی‌های محدب در صفر داشته باشد.

مثال ۱-۴-۲.
هر فضای نرم‌دار یک فضای موضعاً محدب است. زیرا هر گوی باز در فضای نرم‌دار یک مجموعه محدب است.

توجه ۱-۴-۳. [۴۱]
به بیان تحلیلی، اگر X یک فضای موضعاً محدب باشد، توپولوژی این فضا توسط یک خانواده از نیم‌نرم‌ها مانند P مشخص می‌شود. در واقع مجموعه $\mathbb{B}=\{B(x,\varepsilon): x\in X,\ \varepsilon>0\}$ که در آن $B(x,\varepsilon)=\{y\in X: p(y-x)<\varepsilon,\ p\in P\}$، پایه‌ای برای این توپولوژی می‌باشد.

۱-۵ مجموعه‌های مرتب جزئی

تعریف ۱-۵-۱.
رابطه‌ی $\preceq$ روی مجموعه X را یک رابطه‌ی ترتیب جزئی گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) *به ازای هر $x\in X$، $x\preceq x$ ؛*

(۲) *به ازای هر $x,y\in X$، اگر $x\preceq y$ و $y\preceq x$ آنگاه $x=y$ ؛*

(۳) *به ازای هر $x,y,z\in X$، اگر $x\preceq y$ و $y\preceq z$ آنگاه $x\preceq z$.*

اگر $\preceq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی X باشد، زوج مرتب $(X,\preceq)$ را یک مجموعه‌ی مرتب جزئی نامیم.

مثال ۱-۵-۲.
$(\mathbb{N},\leq)$ و $(\mathbb{R},\leq)$ مجموعه‌ی مرتب جزئی می‌باشند.

[۱] Locally convex

۶-۱ فضاهای متریک

تعریف ۱-۶-۱.

فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متر روی X گویند هرگاه:

(۱) *به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) \geq ۰$ و $d(x, y) = ۰$ اگر و فقط اگر $x = y$؛*

(۲) *به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$؛*

(۳) *به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

اگر d یک متر روی X باشد، آنگاه (X, d) را یک فضای متریک می‌نامیم.

مثال ۱-۶-۲.

فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار باشد. در این صورت برای هر $x, y \in X$، تابع $d(x, y) = \|x - y\|$ یک متر روی X است که آن را متر القایی از نرم نامند.

تعریف ۱-۶-۳.

دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X, d) را همگرا گوییم هرگاه عنصری مانند $x \in X$ موجود باشد به طوریکه به ازای هر $\varepsilon > ۰$، یک عدد طبیعی مانند N موجود باشد به گونه‌ای که $n \geq N$ نتیجه دهد که $d(x_n, x) < \varepsilon$؛ در این حالت گوییم دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x است و این همگرایی را به وسیله $x_n \xrightarrow{d} x$ و یا $lim_{n\to\infty} x_n = x$ نشان می‌دهیم.

دنباله $\{x_n\}$ را در فضای متریک (X, d) واگرا گوییم، هرگاه همگرا نباشد.

مثال ۱-۶-۴.

دنباله $\{\frac{۱}{n^۲}\}$ در فضای اعداد حقیقی با متر اقلیدسی $(d(x, y) = |x - y|)$ همگرا به صفر است ولی در فضای اعداد حقیقی مثبت $X = (۰, \infty)$ با متر اقلیدسی همگرا نیست.

تعریف ۱-۶-۵.

دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X, d) را کوشی [۱] گوییم، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$، یک عدد طبیعی مانند N موجود باشد به طوری که برای هر $m, n \geq N$ داشته باشیم

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

---

[۱] Cauchy