دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

عملگرهای خطی کراندار فازی در فضاهای نرمدار فازی

استاد راهنما

دکتر علی تقوی

استاد مشاور

دکتر سید هادی ناصری

نگارش

مجید مهدی زاده آلاشتی

تیرماه ۱۳۹۰

تقدیم به روح پاک پدرم

و

سپاس...

سپاس خدای را که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از اندیشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم.

مادری که بودنشان تاج افتخاری است برسرم
و **پدری** که نام شان دلیلی است بر بودنم

چرا که
این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند؛ دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

آموزگارانی که برایم زندگی؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند
حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان...

تقدیر و سپاسگزاری:

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد راهنما، جناب آقای

دکتر **علی تقوی** که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمودند و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بودند؛ تقدیر و تشکر نمایم.

همچنین کمال تشکر را از جناب آقای

دکتر **سید هادی ناصری** که مشاوره بنده را در این پایان نامه برعهده داشتند را دارم.

-و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند.

مجید مهدی زاده آلاشتی

۱۳۹۰

چکیده

این پایان نامه، به بحث در مورد عملگرهای کراندار فازی در فضاهای خطی نرمدار فازی می پردازد و قضایا و نتایجی را در این زمینه به اثبات می رساند.

بطور کلی، در فضای خطی نرمدار فازی با تعریف α-برش های فازی، عملگرهای کراندار فازی به عملگرهای کراندار قوی و ضعیف فازی تقسیم می شود. در این حالت، روابط بین کرانداری فازی و پیوستگی فازی روی فضاهای خطی نرمدار فازی و فضای باناخ فازی مورد بررسی قرار می گیرند.

در واقع این کار پایه ای برای انتقالی نتایج به دست آمده از آنالیز تابعی و کاربردی به محیط های فازی است بطوریکه در ابتدا، مفاهیمی چون فضای دوگان، الحاق یک عملگر و فشردگی عملگرهای خطی روی فضای خطی نرمدار فازی تعریف می شوند سپس با توجه به α-برش ها و نرم فازی اثبات صریحی از قضایای مربوط به هر یک از این مفاهیم ارائه می شوند.

کلمات کلیدی: عملگرهای کراندار فازی، α-برش، نرم فازی و فضای خطی نرمدار فازی.

فهرست مطالب

فهرست شکل

لیست علائم و اختصارات

متعلق است به.......... $\in$

زیر مجموعه.......... $\subseteq$

زیر مجموعه سره.......... $\subset$

شامل.......... $\supseteq$

به طور سره شامل.......... $\supset$

مجموعه اعداد حقیقی.......... R

مجموعه اعداد طبیعی.......... N

مجموعه اعداد صحیح مثبت.......... Z^+

زیر مجموعه فازی.......... F

مجموعه اعداد فازی.......... $\mathcal{F}$

مجموعه اعداد فازی مثبت.......... $\mathcal{F}^+$

کران بالای α- برش η .... η_α^+

کران پایین α- برش η .... η_α^-

بازه α- برش η.......... $[\eta]_\alpha$

محمل.......... $supp$

جمع فازی.......... $\oplus$

تفاضل فازی.......... $\ominus$

ضرب فازی.......... $\otimes$

تقسیم فازی.......... $\oslash$

نرم .... $\| \|$

فضای نرمدار X .... $(X, \| \|)$

$x_۱+x_۲+...+x_n$ .... $\sum_{i=۱}^{n} x_i$

نگاشتی از X به Y .... $T : X \longrightarrow Y$

تصویر T تحت x .... $T(x)$

معکوس نگاشت T .... $T^{-۱}$

بعد .... dim

برای هر .... $\forall$

وجود دارد .... $\exists$

آنگاه .... $\Longrightarrow$

همگرا و صعودی .... $\uparrow$

همگرا و نزولی .... $\downarrow$

اجتماع گردایه ها .... $\bigvee$

اشتراک گردایه ها .... $\bigwedge$

اینفیمم .... $\wedge$

رابطه جزئی فازی .... $\preceq$

مجموعه عملگرهای کراندار قوی فازی .... $B(X, Y)$

مجموعه عملگرهای کراندار ضعیف فازی .... $B'(X, Y)$

الحاق قوی T .... T^*

الحاق ضعیف T .... T'

فضای دوگان اول قوی فازی .... X^*

فضای دوگان اول ضعیف فازی .... X'

هم ارزی .... $\sim$

گوی .... $B_\alpha[x, r]$

فصل ۱

مقدمه

نظریه مجموعه فازی نخستین بار توسط پروفسور لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ ارائه شد[۳۰] و پس از مدتي کوتاه این نظریه در همه علوم، از جمله شاخه آنالیز در زمینه فضاهاي نرمدار ورود پیدا کرد.

در این مباحث، برای اولین بار کاتساراس [۱] نکاتي از فضاي برداري توپولوژيك فازي و نرم فازي در فضاي خطي را مطرح کرد[۱۹]. در سال ۱۹۹۲، فِلبین [۲] [۱۳] ایده ای از یک نرم فازی را روی فضای خطی با اختصاص یک عدد حقیقی فازی به هر عضو از فضای خطی با برقرای خاصیت شرکت پذیری متر معرفی شده توسط کالوا و سیکالا [۳] مطرح کرد[۱۸].

درسال ۱۹۹۴، چنگ و موردسن[۴] [۷] ایده ای دیگر از نرم فازی روی فضای خطی را معرفی کردند در این حالت متر فازی حاصل از آن مطابق حالت کراموسیل و میک هلک [۵] است. آنها با توجه به تعریف توابع فازی، کرانداری یک عملگر فازی را تعریف کردند.

به تازگی زیو و زو [۶] [۲۶]حالت کلی تر از تعریف بیان شده توسط فِلبین [۱۳] از نرم فازی یک عملگر خطی روی فضای خطی نرمدار فازی به فضای خطی نرمدار فازی دیگر را تعریف کردند. مقاله های دیگری هم روی خاصیت ها و حالت های از فضای خطی نرمدار فازی را مورد مطاله قرار دادند [۳، ۴، ۱۱، ۱۲، ۲۳]. در سال ۱۹۹۸، ای تو و چو [۷]با توجه به نرم معرفی شده توسط فِلبین عملگرهای کراندار فازی را تعریف کردند.

باگ و سامانتا [۸] [۲]، در ادامه کار چنگ و موردسن [۷] یک تعریف از نرم فازی با برقراری شرکت پذیری متر

[۱] Katsaras
[۲] Felbin
[۳] Kaleva and Seikkala
[۴] Cheng and Mordeson
[۵] Kramosil
[۶] Xiao and Zhu
[۷] Itoh and Cho
[۸] Bag and Samanta

از حالت کراموسیل و میک هلک بیان کردند [۲۱]. آنها قضایایی از نرم های فازی و خاصیت هایی خطی نرمدار فازی با بعد متناهی را بیان کردند [۲]. آنها همچنین تعریف ساده تر از نرم فازی مطرح شده توسط فِلبین [۱۲] را بیان کردند و مفاهیمی از حالت های مختلف از پیوستگی و کرانداری عملگرهای خطی فازی روی فضاهای خطی نرمدار فازی را مطرح کردند[۳، ۵]. لائل و نوروزی[۹] [۱۷] با نرم فازی تعریف شده توسط باگ و سامانتا [۳]، فشردگی عملگرهای خطی کراندار فازی را روی فضاهای خطی نرمدار فازی تعریف و قضایایی را در فضای نرمدار فازی اثبات کردند.

[۹] Lael and Nourouzi

۱.۱ تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی مورد نیاز از نظریه فازی [۱۰] را بیان می کنیم. این مطالب عمدتاً از منابع[۷، ۸، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۲۳، ۳۰] گرفته شده اند.

۱.۱.۱ زیر مجموعه های فازی

فرض کنید R میدان اعداد حقیقی و F مجموعه تمام زیر مجموعه های فازی باشند. اگر $\eta \in F$ و $\alpha \in (\circ, ۱]$ آنگاه مجموعه $\{t : \eta(t) \geq \alpha\}$ را α -برش η می نامیم و به صورت $[\eta]_\alpha = [\eta_\alpha^-, \eta_\alpha^+]$ نمایش می دهیم. همچنین $supp$ یک مجموعه فازی η به صورت زیر تعریف می شود:

$$supp\, \eta = \{t : \eta(t) > \circ\}.$$

تعریف ۱.۱.۱. *یک مجموعه فازی η روی R یک عدد فازی نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند:*

(i) *اگر یک $t_\circ \in R$ موجود باشد بطوریکه $\eta(t_\circ) = ۱$.*

(ii) *$[\eta]_\alpha$ برای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$ بازه بسته باشد.*

(iii) *$supp\, \eta$ کراندار باشد.*

مجموعه همه اعداد حقیقی فازی را با $\mathcal{F}$ نشان می دهیم. اگر $\eta \in \mathcal{F}$ و $t < \circ$ ، $\eta(t) = \circ$ آنگاه η عدد حقیقی فازی مثبت نامیده می شود و مجموعه همه اعداد حقیقی فازی مثبت را با $\mathcal{F}^+$ نمایش می دهیم. هر عدد حقیقی r را می توان یک عدد حقیقی فازی $\bar{r}$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} ۱ & t = r, \\ \circ & t \neq r; \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۱. *عدد فازی η را نرمال گویند هرگاه در شرط (i) صدق کند.*

تعریف ۳.۱.۱. *یک زیر مجموعه فازی η نیمه پیوسته بالایی است هرگاه تمام α- برش های آن بسته باشد.*

گزاره ۴.۱.۱. *یک زیر مجموعه فازی η نیمه پیوسته فازی است اگر و فقط اگر*

$$\forall x \in R,\ \forall \varepsilon > \circ,\ \exists \delta > \circ\ \ s.t\ \ |x - y| < \delta \Longrightarrow \eta(y) < \eta(x) + \varepsilon.$$

اثبات. [۱۵]. □

[۱۰] Fuzzy

تعریف ۵.۱.۱. *زیر مجموعه فازی η محدب است اگر و فقط اگر همه α -برش های آن مجموعه ای محدب (بازه) در R باشند.*

گزاره ۶.۱.۱. *زیر مجموعه فازی η محدب است اگر*

$$\eta(t) \geq \eta(s) \wedge \eta(r) = min(\eta(s), \eta(r)),$$

اثبات. فرض کنید η محدب باشد در نتیجه بنابه تعریف ۵.۱.۱ تمام α-برش های آن بازه ها هستند و برای $s \leq t \leq r$ قرار دهید $\alpha = \eta(s) \wedge \eta(s)$.

حالت I: برای حالت تساوی واضح است مثلا برای $s = t \leq r$.

حالت II: برای حالت $s < t < r$، چون $\alpha = \eta(s) \wedge \eta(s)$ لذا

$$\begin{cases} \eta(s) \geq \alpha \Longrightarrow s \in [\eta]_\alpha, \\ \eta(r) \geq \alpha \Longrightarrow r \in [\eta]_\alpha. \end{cases}$$

چون $[\eta]_\alpha$ یک بازه می باشد لذا $y \in [\eta]_\alpha$. در نتیجه $\eta(s) \wedge \eta(s) = \alpha \leq \eta(t)$.

برعکس، فرض کنید برای $s \leq t \leq r$ داشته باشیم $\eta(t) \geq \eta(s) \wedge \eta(r)$ همچنین برای $\alpha \in (۰, ۱]$ اگر $x, z \in [\eta]_\alpha$ آنگاه

$$\begin{cases} x \in [\eta]_\alpha \Longrightarrow \eta(s) \geq \alpha \\ r \in [\eta]_\alpha \Longrightarrow \eta(r) \geq \alpha \end{cases} \Longrightarrow \eta(t) \geq \eta(x) \wedge \eta(r) \geq \alpha,$$

در نتیجه $y \in [\eta]_\alpha$. لذا بنا به تعریف ۵.۱.۱ زیر مجموعه فازی η، محدب است. □

گزاره ۷.۱.۱. *گزاره های زیر برقرارند.*

(i) *اعداد حقیقی، اعداد فازی هستند.*

(ii) *هر عدد فازی محدب است.*

(iii) *هر عدد فازی نیمه پیوسته بالایی است.*

(iv) *فرض کنید $\eta(t) = ۱$ آنگاه عدد فازی η روی $(-\infty, t]$ صعودی و روی $[t, \infty)$ نزولی است.*

اثبات. (i). بدیهی است که هر عدد حقیقی یک عدد فازی است.

(ii). η محدب است زیرا بنابه تعریف α-برش های آن بازه اند.

(iii). چون α-برش های هر عدد فازی بسته است پس بنا به تعریف η نیمه پیوسته بالایی است.

(iv). بنا به نرمال بودن η تنها یک عدد حقیقی t موجود است که $\eta(t) = ۱$ و چون η محدب است؛

$$\eta(y) \geq \eta(x) \wedge \eta(t),\ x \leq y \leq t$$

چون $\eta(t) = ۱$ پس

$$\eta(y) \geq \eta(x) \wedge ۱ = \eta(x) \Longrightarrow \eta(y) \geq \eta(x).$$

لذا η روی $(-\infty, t]$ صعودی است.

به طور مشابه، برای $t \leq y \leq x$ داریم $\eta(y) \geq \eta(x) \wedge \eta(t)$ و چون $\eta(t) = ۱$ پس

$$\eta(y) \geq \eta(x) \wedge ۱ = \eta(x) \Longrightarrow \eta(y) \geq \eta(x).$$

لذا η روی $[t, \infty)$ نزولی است. □

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید $\circ : R \times R \longrightarrow R$ یک عمل دوتایی پیوسته روی R باشد. η و μ مجموعه های فازی باشند بطوریکه α- برش های آن ها بسته و $supp$ هر یک کراندار باشد آنگاه*

$$(\eta \circ \mu)(t) = \eta(t) \wedge \mu(t),\ t \in R,$$

برای هر y, x که $t = x \circ y$.

اثبات. [۱۵]. □

تعریف ۹.۱.۱. *عملیات حسابی عملگرهای $\oplus$، $\ominus$، $\otimes$ و $\oslash$ را روی $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:*

(i) $(\eta \oplus \delta)(t) = sup_{s \in R}\{\eta(s) \wedge \delta(t-s)\},\ t \in R$؛

(ii) $(\eta \ominus \delta)(t) = sup_{s \in R}\{\eta(s) \wedge \delta(s-t)\},\ t \in R$؛

(iii) $(\eta \otimes \delta)(t) = sup_{\substack{s \neq ۰ \\ s \in R}}\{\eta(s) \wedge \delta(t/s)\},\ t \in R$؛

(iv) $(\eta \oslash \delta)(t) = sup_{s \in R}\{\eta(st) \wedge \delta(s)\},\ t \in R$.

نکته ۱. عضو خنثی جمع و ضرب در $\mathcal{F}$ به ترتیب $\bar{\circ}$ و $\bar{1}$ می باشد. فرض کنید $\eta \ominus \bar{\circ} = \ominus\eta$ لذا از (i) و (ii) داریم

$$(\ominus\eta)(t) = \eta(-t),\ \eta \ominus \delta = \eta \oplus (\ominus\delta)\ t \in R.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. برای $k \in R^+$، $k\eta$ به صورت زیر تعریف می شود

$$(k\eta)(t) = \eta(t/k),\ \circ\eta = \bar{\circ}.$$

گزاره ۱۱.۱.۱. فرض کنید $\circ : R \times R \longrightarrow R$ یک عمل دوتایی پیوسته روی R باشد. η و μ مجموعه های فازی باشند بطوریکه α- برش های آن ها بسته و $supp$ هر یک کراندار باشد آنگاه

$$[\eta \circ \mu]_\alpha = [\eta]_\alpha \circ [\mu]_\alpha,\ \forall\alpha \in (\circ, 1].$$

اثبات. ابتدا نشان می دهیم که $[\eta \circ \mu]_\alpha \subseteq [\eta]_\alpha \circ [\mu]_\alpha$.

فرض کنید $t \in [\eta \circ \mu]_\alpha$ باشد، در این صورت بنا به قضیه ۸.۱.۱ داریم

$$(\eta \circ \mu)(t) = \eta(t) \wedge \mu(y),\ \forall x, y \qquad (۱.۱.۱)$$

که $t = x \circ y$. از طرف دیگر $(\eta \circ \mu)(t) \geq \alpha$ در نتیجه از رابطه (۱.۱.۱) داریم

$$\begin{cases} \eta(x) \geq \alpha \Longrightarrow x \in [\eta]_\alpha \\ \mu(y) \geq \alpha \Longrightarrow y \in [\mu]_\alpha \end{cases} \Longrightarrow t \in [\eta]_\alpha \circ [\mu]_\alpha, \qquad (۲.۱.۱)$$

حال نشان می دهیم $[\eta]_\alpha \circ [\mu]_\alpha \subseteq [\eta \circ \mu]_\alpha$.

فرض کنید $t \in [\eta]_\alpha \circ [\mu]_\alpha$ در نتیجه

$$\exists x, y :\ x \in [\eta]_\alpha,\ y \in [\mu]_\alpha\ \ s.t\ \ t = x \circ y$$

درنتیجه

$$\begin{cases} x \in [\eta]_\alpha \Longrightarrow \eta(x) \geq \alpha \\ y \in [\mu]_\alpha \Longrightarrow \mu(y) \geq \alpha \end{cases} \Longrightarrow \eta(x) \wedge \mu(y) \geq \alpha,$$

$$\Longrightarrow \bigvee_{t = x \circ y} \eta(x) \wedge \mu(y) \geq \alpha$$

$$\Longrightarrow (\eta \circ \mu)(t) \geq \alpha$$

$$\Longrightarrow t \in [\eta \circ \mu]_\alpha \qquad (۳.۱.۱)$$

لذا از روابط (۲.۱.۱) و (۳.۱.۱) حکم برقرار است. □

نتیجه ۱۲.۱.۱. *فرض کنید $\eta, \delta \in \mathcal{F}^+$ و $\alpha \in (۰,۱]$، $[\eta]_\alpha = [a_\alpha^۱, a_\alpha^۲],\ [\delta]_\alpha = [b_\alpha^۱, b_\alpha^۲]$ آنگاه*

(i) $[\eta \oplus \delta]_\alpha = [a_\alpha^۱ + b_\alpha^۱, a_\alpha^۲ + b_\alpha^۲]$؛

(ii) $[\eta \ominus \delta]_\alpha = [a_\alpha^۱ - b_\alpha^۲, a_\alpha^۲ - b_\alpha^۱]$؛

(iii) $[\eta \otimes \delta]_\alpha = [a_\alpha^۱ b_\alpha^۱, a_\alpha^۲ b_\alpha^۲]$؛

(iv) $[\eta \oslash \delta]_\alpha = \left[\frac{a_\alpha^۱}{b_\alpha^۲}, \frac{a_\alpha^۲}{b_\alpha^۱}\right],\ \ b_\alpha^۱ > ۰$.

گزاره ۱۳.۱.۱. *فرض کنید $[a_\alpha, b_\alpha],\ ۰ < \alpha \leq ۱$ گردایه ای از بازه های غیرتهی باشند. فرض کنید*

(i) *برای هر* $۰ < \alpha_۱ \leq \alpha_۲$، $[a_{\alpha_۱}, b_{\alpha_۱}] \supset [a_{\alpha_۲}, b_{\alpha_۲}]$

(ii) *برای هر دنباله صعودی* $\{\alpha_k\}$ *در* $(۰,۱]$ *به* α *همگرا است*

$$[lim_{k\to\infty} a_{\alpha_k}, lim_{k\to\infty} b_{\alpha_k}] = [a_\alpha, b_\alpha].$$

آنگاه خانواده $[a_\alpha, b_\alpha]$ *مجموعه ای از* α *- برش های یک عدد حقیقی فازی* η *می باشند.*

برعکس، اگر $[a_\alpha, b_\alpha],\ \alpha \in (۰,۱]$ *مجموعه ای از* α *- برش های یک عدد حقیقی فازی* η *باشند شرایط (i) و (ii) برقرار است.*

گزاره ۱۴.۱.۱. *فرض کنید η یک مجموعه فازی روی R باشد آنگاه برای هر $\alpha \in (۰,۱]$ داریم*

$$\eta^{-۱}(\alpha) = \eta_\alpha \cap (\cup_{\beta>\alpha}\eta_\beta)'.$$

اثبات. [۱۵]. □

گزاره ۱۵.۱.۱. *فرض کنید η و μ نگاشت هایی از R به $[۰,۱]$ باشند آنگاه برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، $[\eta]_\alpha = [\mu]_\alpha$ اگر و فقط اگر $\eta = \mu$.*

اثبات. اگر $\eta = \mu$ واضح است که $[\eta]_\alpha = [\mu]_\alpha$ زیرا

$$[\eta]_\alpha = \{t|\eta(t) \geq \alpha\} = \{t|\mu(t) \geq \alpha\} = [\mu]_\alpha.$$

برعکس، فرض کنید $[\eta]_\alpha = [\mu]_\alpha$. ثابت می کنیم $\eta = \mu$ یعنی برای هر $t \in R$، $\eta(t) = \mu(t)$. فرض کنید $\eta(t) = \alpha$ که $\alpha \in (۰, ۱]$ از این رو بنا به فرض و گزاره ۱۴.۱.۱ داریم

$$t \in \eta^{-۱}(\alpha) = \eta_\alpha \cap (\cup_{\beta>\alpha}\eta_\beta)'$$

$$= \mu_\alpha \cap (\cup_{\beta>\alpha}\mu_\beta)' = \mu^{-۱}(\alpha)$$

$$\Longrightarrow t \in \mu^{-۱}(\alpha)$$

$$\Longrightarrow \mu(t) = \alpha$$

در نتیجه برای هر $t \in R$، داریم $\eta(t) = \mu(t)$. □

نتیجه ۱۶.۱.۱. *رابط جزئی $\preceq$ روی $\mathcal{F}$ برای $\delta \preceq \eta$ برقرار است اگر و فقط اگر رابطه های $a^۱_\alpha \leq b^۱_\alpha$ و $a^۲_\alpha \leq b^۲_\alpha$ برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ برقرار باشد که $[\eta]_\alpha = [a^۱_\alpha, a^۲_\alpha]$ و $[\delta]_\alpha = [b^۱_\alpha, b^۲_\alpha]$.*

تعریف ۱۷.۱.۱. *دنباله $\{\eta_n\} \in \mathcal{F}$ به $\eta \in \mathcal{F}$ همگرا است $(lim_{n\longrightarrow\infty}\eta_n = \eta)$ اگر*

$$lim_{n\longrightarrow\infty}a^۱_{n,\alpha} = a^۱_\alpha,\ \ lim_{n\longrightarrow\infty}a^۲_{n,\alpha} = a^۲_\alpha,\ \forall\alpha \in (۰ ۱]$$

که $[\eta_n]_\alpha = [a^۱_{n,\alpha}, a^۲_{n,\alpha}]$ و $[\eta]_\alpha = [a^۱_\alpha, a^۲_\alpha]$.

گزاره ۱۸.۱.۱. *فرض کنید $\eta, \delta, \mu \in \mathcal{F}$ و $[\eta]_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$، $[\delta]_\alpha = [c_\alpha, d_\alpha]$ و $[\mu]_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$ آنگاه*

(i) $[\eta \oplus \delta] \ominus \mu = \eta \oplus [\delta \ominus \mu]$؛

(ii) *اگر $\mu \preceq \eta$ آنگاه $\mu \ominus \delta \preceq \eta \ominus \delta$؛*

(iii) *اگر $\mu \preceq \eta$ و $\bar{۰} \prec \delta$ آنگاه*

(a) $\mu \otimes \delta \preceq \eta \otimes \delta$؛

(b) $\mu \oslash \delta \preceq \eta \oslash \delta$؛

(iv) $c_\alpha > ۰,\ (\eta \otimes \mu) \oslash \delta = \eta \otimes (\mu \oslash \delta)$.

اثبات. برای اثبات از نتیجه ۱۲.۱.۱ استفاده می کنیم

. (i) چون

$$[\eta \oplus \delta]_\alpha = [a_\alpha + c_\alpha, b_\alpha + d_\alpha],\ [\delta \ominus \mu]_\alpha = [c_\alpha - f_\alpha, d_\alpha - e_\alpha]$$

لذا داریم

$$[(\eta \oplus \delta) \ominus \mu]_\alpha = [a_\alpha + c_\alpha - f_\alpha, b_\alpha + d_\alpha - e_\alpha] = [\eta \oplus (\delta \ominus \mu)]_\alpha$$

(ii)

$$[\mu \ominus \delta]_\alpha = [e_\alpha - d_\alpha, f_\alpha - c_\alpha],\ [\eta \ominus \delta]_\alpha = [a_\alpha - d_\alpha, b_\alpha - c_\alpha].$$

از رابطه $\mu \preceq \eta$ داریم $e_\alpha \leq a_\alpha$ و $f_\alpha \leq b_\alpha$ لذا

$$e_\alpha - d_\alpha \leq a_\alpha - d_\alpha,\ f_\alpha - c_\alpha \leq b_\alpha - c_\alpha$$

از این رو $\mu \ominus \delta \preceq \eta \ominus \delta$.

(iii) روابط زیر را داریم

$$[\mu \otimes \delta]_\alpha = [e_\alpha c_\alpha, f_\alpha d_\alpha],\ [\eta \otimes \delta]_\alpha = [a_\alpha c_\alpha, b_\alpha d_\alpha].$$

از رابطه $\mu \preceq \eta$ داریم $e_\alpha \leq a_\alpha$ و $f_\alpha \leq b_\alpha$ همچنین $c_\alpha > ۰$. از این رو

$$e_\alpha c_\alpha \leq a_\alpha c_\alpha,\ f_\alpha d_\alpha \leq d_\alpha b_\alpha$$

لذا $\mu \otimes \delta \preceq \eta \otimes \delta$. از قسمت (ii) داریم

$$[\mu \oslash \delta]_\alpha = [\frac{e_\alpha}{d_\alpha}, \frac{f_\alpha}{c_\alpha}],\ [\eta \oslash \delta]_\alpha = [\frac{a_\alpha}{d_\alpha}, \frac{b_\alpha}{c_\alpha}].$$

لذا

$$\frac{e_\alpha}{d_\alpha} \leq \frac{a_\alpha}{c_\alpha},\ \frac{f_\alpha}{c_\alpha},\ \frac{f_\alpha}{c_\alpha} \leq \frac{b_\alpha}{c_\alpha}$$

در نتیجه $\mu \oslash \delta \preceq \eta \oslash \delta$.

(iv) داریم

$$[(\eta \otimes \mu) \oslash \delta]_\alpha = [\frac{a_\alpha e_\alpha}{d_\alpha}, \frac{b_\alpha f_\alpha}{c_\alpha}] = [\eta \otimes (\mu \oslash \delta)]_\alpha.$$

□

۲.۱ بازه های فازی

در این بخش به مفهوم اعداد حقیقی فازی (بازه های فازی) می پردازیم[۲۸].

تعریف ۱.۲.۱. یک نگاشت $\eta : R \longrightarrow [\circ, \text{۱}]$ با α- برش، $[\eta]_\alpha = \{t : \eta(t) \geq \alpha\}$ یک عدد حقیقی فازی (بازه فازی) نامیده می شود که هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(i) وجود داشته باشد $t_\circ \in R$ بطوریکه $\eta(t_\circ) = \text{۱}$.

(ii) برای هر $\alpha \in (\circ, \text{۱}]$

$$[\eta]_\alpha = [\eta^-_\alpha, \eta^+_\alpha] \;\; s.t \;\; -\infty < \eta^-_\alpha \leq \eta^+_\alpha < +\infty.$$

گزاره ۲.۲.۱. *فرض کنید $\{[a_\alpha, b_\alpha];\ \alpha \in (\circ, \text{۱}]\}$ گردایه ای از بازه های بسته، کراندار و تودرتو باشند و $\eta : R \longrightarrow [\circ, \text{۱}]$ یک تابع تعریف شده با ضابطه $\eta(t) = \bigvee \{\alpha \in (\circ, \text{۱}] :\ t \in [a_\alpha, b_\alpha]\}$ باشد آنگاه η یک عدد حقیقی فازی (بازه فازی) است که مجموعه α- برش η را برای هر $\alpha \in (\circ, \text{۱}]$ به صورت $[\eta]_\alpha = [\eta^-_\alpha, \eta^+_\alpha]$ نمایش می دهیم.*

اثبات. [۶]. □

گزاره ۳.۲.۱. *فرض کنید $\{a_\alpha\}$ و $\{b_\alpha\}$ به ترتیب گردایه ای صعودی و نزولی از اعداد حقیقی باشند بطوریکه $-\infty < a_\alpha \leq b_\alpha < +\infty$ و η عدد حقیقی فازی (بازه فازی) تولید شده به وسیله گردایه ای از بازه های $\{[a_\alpha, b_\alpha]; \alpha \in (\circ, \text{۱}]\}$ آنگاه*

(i) $sup_{\beta<\alpha}\eta^-_\beta = \eta^-_\alpha$؛

(ii) $inf_{\beta<\alpha}\eta^+_\beta = \eta^+_\alpha$؛

که $[\eta]_\alpha = [\eta^-_\alpha, \eta^+_\alpha]$.

اثبات. [۶]. □

گزاره ۴.۲.۱. *فرض کنید $\eta \in \mathcal{F}$ و $[\eta]_\alpha = [\eta^-_\alpha, \eta^+_\alpha]$. فرض کنید η^* بازه فازی تولید شده به وسیله گردایه ای از بازه های بسته، کراندار و تودرتو $[\eta^-_\alpha, \eta^+_\alpha]$ ، $\circ < \alpha \leq \text{۱}$ باشد آنگاه $\eta = \eta^*$.*

اثبات. چون

$$\eta^*(t) = \bigvee\{\alpha \in (\circ, \text{۱}] :\ t \in [\eta^-_\alpha, \eta^+_\alpha]\}$$

می توان نوشت

$$[\eta^*] = [\eta^{*-}_\alpha, \eta^{*+}_\alpha],\ \circ < \alpha \leq \text{۱}.$$

واضح است

$$[\eta_\alpha^-, \eta_\alpha^+] \subset [\eta_\alpha^{*-}, \eta_\alpha^{*+}],\ \forall\alpha \in (۰, ۱]. \tag{۱.۲.۱}$$

حال برای $\alpha \in (۰, ۱]$ فرض کنید $t \in [\eta_\alpha^-, \eta_\alpha^+]$. آنگاه $\eta^*(t) \geq \alpha$

$$\Longrightarrow \bigvee\{\beta \in (۰, ۱] :\ t \in [\eta_\beta^-, \eta_\beta^+]\} \geq \alpha.$$

حالت I:

$$\bigvee\{\beta \in (۰, ۱] :\ t \in [\eta_\beta^-, \eta_\beta^+]\} > \alpha$$

$$\Longrightarrow t \in [\eta_\alpha^-, \eta_\alpha^+].$$

حالت II:

$$\bigvee\{\beta \in (۰, ۱] :\ t \in [\eta_\beta^-, \eta_\beta^+]\} = \alpha$$

$$\Longrightarrow \exists\{\alpha_n\} \in (۰, ۱]\ \ s.t\ \ \alpha_n \longrightarrow \alpha,\ t \in [\eta_{\alpha_n}^-, \eta_{\alpha_n}^+],\ \forall n$$

$$\Longrightarrow \eta_{\alpha_n}^- \leq t \leq \eta_{\alpha_n}^+,\ \forall n$$

$$\Longrightarrow lim_{n\longrightarrow\infty}\eta_{\alpha_n}^- \leq t \leq lim_{n\longrightarrow\infty}\eta_{\alpha_n}^+$$

$$\Longrightarrow \eta_\alpha^- \leq t \leq \eta_\alpha^+$$

$$\Longrightarrow t \in [\eta_\alpha^-, \eta_\alpha^+].$$

لذا از حالت های (I) و (II) داریم

$$[\eta_\alpha^{*-}, \eta_\alpha^{*+}] \subset [\eta_\alpha^-, \eta_\alpha^+],\ \forall\alpha \in (۰, ۱]. \tag{۲.۲.۱}$$

از روابط (۱.۲.۱) و (۲.۲.۱) داریم

$$[\eta_\alpha^{*-}, \eta_\alpha^{*+}] = [\eta_\alpha^-, \eta_\alpha^+],\ \forall\alpha \in (۰, ۱],$$

$$\Longrightarrow [\eta]_\alpha = [\eta^*]_\alpha,\ \forall\alpha \in (۰, ۱],$$

$$\Longrightarrow \eta(t) = \eta^*(t),\ \forall t \in R,$$

لذا $\eta = \eta^*$. □