بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

بررسی ریس موجکی و ریس موجکی نیم‌متعامد متناظر با آنالیز چند ریزه‌ساز

مؤلف:
فاطمه زارع

استاد راهنما:
دکتر عطاءاللّه عسکری همت

دی ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فاطمه زارع	امضاء:
استاد راهنما: دکتر عطاءاللّه عسکری همت	امضاء:
داور اول : دکتر اکبر نظری	امضاء:
داور دوم: دکتر احمد صفاپور	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر ارشام برومندسعید	امضاء:

تقدیم به تو مادرم

که معنی عشق در تمامی واژه های دنیایی

تقدیم به تو پدرم

که معنی بودن، خواستن و توانستن در سایه سار زمانی

و به تو همسرم

که پناه خستگی و امید بودنی

تشکر و قدردانی

ای خداوند خرد، هنگامی که به یاری اندیشه و خرد خود، تو را سرآغاز و سرانجام هستی شناختم، دریافتم که تویی آفریدگار "اندیشه نیک"، تویی آفریننده "قانون راستی" و تویی "سرچشمه رویدادهای جهان هستی".

با سپاس فراوان از استاد ارجمند و فرهیخته، جناب آقای دکتر عسکری همت که با راهنمایی خود مرا در تهیه این پایان نامه یاری نمودند.

از اساتید گرامی، آقای دکتر نظری و آقای دکتر صفاپور که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

فاطمه زارع

دی ماه ۹۱

مقدمه

در سال‌های اخیر موضوع موجک‌ها هم از لحاظ تئوری و هم از لحاظ عملی گسترش زیادی یافته است. موجک‌ها برایند تحقیقات به عمل آمده در علوم ریاضیات، فیزیک و مهندسی می‌باشند. ژان مورله[۱] برای اولین بار در سال ۱۹۸۲ مفهوم موجک و تبدیل موجک را به عنوان یک ابزار برای پردازش سیگنال زمین لرزه مورد استفاده قرار داد [۲۲] . موفقیت مورله سبب شد گراسمن[۲] نیز در سال ۱۹۸۴ فرمول وارونی را برای تبدیل موجک به دست آورد [۱۷] . در سال ۱۹۸۵ میر[۳] یک پایه موجکی را ارائه داد [۲۱] . بررسی‌ها برای تشکیل یک پایه‌ی متعامد یکه توسط بتل[۴] دنبال شد [۴] و در سال ۱۹۸۶ توسط میر و مالات[۵] روشی تحت آنالیز چند ریزه‌ساز برای پایه‌های موجکی ابداع شد [۱۹] . در سال ۱۹۸۸، دوبشی[۶] با استفاده از نتایج میر و مالات به نتایج جالبی دست یافت [۱۲] . او در مقاله معروفش، ساختار تشکیل خانواده‌ای از موجک‌های متعامد یکه (پایه موجک‌های متعامد یکه) با محمل فشرده را ارائه کرد. از آن زمان تاکنون این ابزار نو بنیاد کاربردهای خود را در تجزیه و تحلیل مفاهیم موجود در زمینه‌های مختلف علمی نشان داده است.

---

[۱] Jean Morlet

[۲] Grossman

[۳] Meyer

[۴] Battle

[۵] Mallat

[۶] Daubechi

نظریه موجک امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می‌توان به کاربرد آن در تصویربرداری (MRI) [۲۰] ، سی تی اسکن (CT) [۳۰] و جداسازی بافت‌های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس [۳۱] اشاره نمود.

در این پایان نامه خواص ریس موجکی یک متغیره متناظر با آنالیز چند ریزه‌ساز بررسی شده است. همچنین با استفاده از موجک متعامد یکه متناظر با آنالیز چند ریزه‌ساز یک تعمیم کلی برای ریس موجکی نیم‌متعامد بر مبنای مرجع [۲۹] به دست آورده می‌شود. برای دستیابی به این هدف مطالب خود را در چهار فصل تنظیم کرده‌ایم که در فصل اول مباحثی در آنالیز حقیقی و تابعی، آنالیز فوریه و آنالیز موجک که مورد نیاز مطالعه‌ی موجک‌هاست را مختصراً آورده‌ایم. در بخش آنالیز موجک به معرفی موجک‌ها روی $\mathbb{R}$، ساختار آنالیز چند ریزه‌ساز که ابزاری قوی در جهت طراحی و تحلیل موجکهاست و ساختن پایه موجکی پرداخته‌ایم. بدیهی است که ارائه هر چند مختصر از این موضوعات مستلزم بحث نسبتاً مفصلی است که این خود دلیل طولانی بودن این فصل است.

در فصل دوم تابع هسته دیریکله، تابع هسته فیر و تابع هسته جمع‌پذیری تعریف کرده و هسته جمع پذیر بودن تابع هسته فیر روی بازه $[-\pi,\pi]$ نشان داده می‌شود. هدف اصلی ما در این فصل یافتن یک همانی تقریبی برای فضای $L^1[-\pi,\pi]$ می‌باشد. یعنی به دنبال K_λای هستیم که برای هر $f\in L^1[-\pi,\pi]$ تساوی زیر برقرار باشد:

$$\lim_{\lambda\to\infty} f*K_\lambda = f.$$

در فصل سوم پایه‌های موجکی را معرفی کرده و به بررسی خواص و ارتباط بین آنها پرداخته شده است. همچنین نشان داده می‌شود هر دنباله‌ی بسل لزوماً یک قاب نیست که برای این منظور نیاز به عملگر قاب است که آن را در بخش دوم معرفی کرده و به بیان برخی از قضایای مرتبط پرداخته شده است. در بخش سوم پایه‌های متعامد یکه و پایه ریس بررسی شده و ساخته شدن پایه متعامد یکه از یک پایه ریس نشان داده شده است. در آخرین بخش این فصل موجک‌های متعامد یکه متناظر با آنالیز چند ریزه‌ساز مشخص شده است.

در فصل چهارم دنباله‌های حاصل از یک تک تابع مورد مطالعه قرار داده شده‌اند، یعنی دنباله‌هایی به فرم

$$\{\psi_{j,k}: \quad j,k \in \mathbb{Z}\},$$

جایی که $\psi \in L^{۲}(\mathbb{R})$ و $\psi_{j,k}$ به این صورت تعریف شده است:

$$\psi_{j,k} := ۲^{j/۲}\psi(۲^{j}t-k).$$

تعاریف کلیدی مورد نیاز در فصل در بخش اول بیان شده و در بخش دوم با بیان یک گزاره نشان داده شده است که چگونه با داشتن یک بسل موجکی و یا یک قاب موجکی می‌توان به ترتیب یک بسل موجکی و یا یک قاب موجکی جدید ساخت. در بخش سوم قضایایی که برای بررسی ریس موجکی نیاز است همراه با اثبات بیان شده است و در نهایت این بخش با بیان قضایایی که در آنها شرایطی که تحت آنها ψ یک ریس موجکی نباشد خاتمه می‌یابد. در آخرین بخش، یک فرمول برای دوگان ریس موجکی نیم‌متعامد بیان شده و نشان داده شده است که چگونه یک ریس موجکی نیم‌متعامد به یک موجک متعامد یکه تبدیل می‌شود و در نهایت یک فرمول برای ریس موجکی نیم‌متعامد با استفاده از موجک متعامد یکه متناظر با آنالیز چند ریزه‌ساز ارائه شده است.

چکیده

در این پایان نامه دنباله‌های حاصل از یک تک تابع مورد مطالعه قرار گرفته است، یعنی دنباله‌هایی به فرم

$$\{\psi_{j,k}: \quad j,k \in \mathbb{Z}\},$$

جاییکه $\psi \in L^{۲}(\mathbb{R})$ و $\psi_{j,k}$ به این صورت تعریف شده است:

$$\psi_{j,k} := ۲^{j/۲}\psi(۲^{j}t-k).$$

با توجه به مجموعه‌ی انتقال‌ها و اتساع‌های دنباله‌ی $\{\psi_{j,k}: \quad j,k \in \mathbb{Z}\}$، قاب موجکی، بسل موجکی، ریس موجکی و موجک‌های متعامد یکه تعریف شده است.

هدف بررسی خواص ریس موجکی یک متغیره متناظر با آنالیز چند ریزه‌ساز می‌باشد. به ویژه با استفاده از موجک‌های متعامد یکه متناظر با آنالیز چند ریزه‌ساز یک تعمیم کلی برای ریس موجکی نیم‌متعامد متناظر با آنالیز چند ریزه‌ساز به دست آمده است.

کلمات کلیدی: موجک متعامد یکه، بسل موجکی، قاب موجکی، ریس موجکی، ریس موجکی نیم‌متعامد، آنالیز چند ریزه‌ساز.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل به ارائه نتایجی از آنالیز حقیقی، آنالیز فوریه و آنالیز موجک می‌پردازیم. سعی ما بر این است که تا حد امکان نیاز خواننده را به مفاهیم پایه‌ای رفع کنیم اما بدیهی است که داشتن آشنایی مقدماتی با این زمینه‌ها برای هر دانشجوی علاقه‌مند به این بحث ضروری است.

۱.۱ مباحثی در آنالیز حقیقی و تابعی

در این بخش بعضی از تعاریف مقدماتی و برخی از قضایای مورد نیاز در فصل‌های بعدی پایان نامه بیان شده است. برای درک بیشتر و بهتر مفاهیم و قضایا به [۳]، [۱۶] و [۲۴] رجوع شود.

فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱. (فضای ضرب داخلی). هر فضای برداری V با اسکالرهای مختلط $\mathbb{F}$ یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود اگر تابعی مانند $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $u, v, w \in V$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ روابط زیر برقرار باشد:

۱. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ و $\langle v, v \rangle \geq 0$ با این شرط که $\langle v, v \rangle = 0$ اگر و فقط اگر $v = 0$.

۲. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

۳. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

۴. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ که خط افقی بیانگر عمل مزدوج مختلط است.

تابع $\langle .,. \rangle$ ضرب‌داخلی نامیده می‌شود.

برخی منابع خاصیت (۳) را با $\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$ جایگزین می‌کنند.

توجه شود که خواص (۲)، (۳) و (۴) از تعریف فوق ایجاب می‌کند که:

$$\langle au+bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$$

و

$$\langle u, av+bw\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle + \overline{b}\langle u, w\rangle.$$

که این یعنی $\langle .,.\rangle$ نسبت به مختص اول خطی و نسبت به مختص دوم مزدوج خطی است.

مثال ۲.۱.۱. فضای برداری $\mathbb{C}^n$ همراه با ضرب داخلی تعریف شده برای $u=(u_۱,\ldots,u_n)$ و $v=(v_۱,v_۲,\ldots,v_n)$ به صورت زیر یک فضای ضرب داخلی است:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=۱}^{n} u_j \overline{v}_j.$$

تعریف ۳.۱.۱. (نُرم). برای هر فضای برداری V تابع $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ که برای هر $u,v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق کند نرم نامیده می‌شود.

۱. $\|v\| \geq ۰$ و $\|v\| = ۰$ اگر و تنها اگر $v = ۰$

۲. $\|av\| = |a|\|v\|$

۳. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

شرط (۳) نامساوی مثلثی نامیده می‌شود.

یک فضای برداری همراه با یک نُرم فضای برداری نرم‌دار گفته می‌شود.

مثال ۴.۱.۱. $\mathbb{R}$ یک فضای برداری حقیقی با نرم تعریف شده به صورت زیر است:

$$\|x\| = |x|.$$

یکی از قضیه‌های مشهور هندسه‌ی اقلیدسی بیان می‌کند، مجموع مجذورهای اضلاع هر متوازی‌الاضلاع برابر است با مجموع مجذورهای قطرهای آن. این حقیقت در هر فضای ضرب داخلی نیز درست است و قانون متوازی‌الاضلاع نامیده می‌شود.

قضیه ۵.۱.۱. (قانون متوازی‌الاضلاع[۱]). *اگر x , y دو بردار متعلق به فضای ضرب داخلی باشند، آنگاه*

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲\left(\|x\|^۲ + \|y\|^۲\right).$$

برهان. به قضیه ۵.۳۲ [۳] مراجعه شود. ■

یادآوری می‌شود که تابع $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای برداری یک **عملگر خطی** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$،

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی بین دو فضای نرم‌دار باشد. **نرم** T با نماد $\|T\|$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\| = \sup\left\{\|T(x)\| : \quad \|x\| = ۱\right\}.$$

اگر $\|T\|$ متناهی باشد، T یک **عملگر کران‌دار** و در غیر این صورت، T یک عملگر غیرکراندار نامیده می‌شود.
به ازای هر $x \in X$ چنین است:

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|. \tag{۱.۱}$$

برای اثبات می‌بینیم که اگر $x \neq ۰$، آنگاه بردار $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ در $\|y\| = ۱$ صدق می‌کند و از این رو بنا به تعریف فوق

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T(\frac{x}{\|x\|})\right\| = \|T(y)\| \leq \|T\|.$$

---

[۱] Parallelogram law

و لذا نابرابری حاصل می‌شود.

تعریفی معادل برای نرم عملگر T چنین است:

$$\|T\| = \sup_{x\neq ۰} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}. \qquad (۲.۱)$$

چون، اگر $x \neq ۰$ آنگاه $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = ۱$، بنابراین با توجه به تعریف اول روابط زیر برقرار است:

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T(\frac{x}{\|x\|})\right\| \leq \|T\| \Longrightarrow \sup_{x\neq ۰} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\|.$$

و برای اثبات عکس نامساوی با توجه به اینکه $x \neq ۰$ و $\|\frac{x}{\|x\|}\| = ۱$، بنا به تعریف اول چنین به دست می‌آید:

$$\|T(\frac{x}{\|x\|})\| = \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|\frac{x}{\|x\|}\|=۱} \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \Longrightarrow \|T\| \leq \sup_{x\neq ۰} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

لذا معادل بودن دو تعریف نتیجه می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را در نظر بگیرید. عملگر $T^* : Y \longrightarrow X$ **عملگر الحاقی**[۲] T گفته می‌شود، هرگاه:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \qquad \forall x \in X,\ y \in Y.$$

برای عملگر الحاقی T خواص زیر برقرار است:

(۱) $(T^*)^* = T$

[۲] Adjoint operator

(۲) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

(۳) $\|T\| = \|T^*\|$

همچنین اگر I عملگر همانی باشد، آنگاه $I^* = I$.

نکته ۸.۱.۱. اگر $T : X \to Y$ عملگری خطی و کران‌دار باشد، آنگاه:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \big|\langle Tx, y\rangle\big|.$$

این بخش را با نامساوی مهمی که به نامساوی شوارتز معروف است ادامه می‌دهیم.

قضیه ۹.۱.۱. (نامساوی شوارتز[۳]). *هرگاه $a_1, \dots, a_n$ و $b_1, \dots, b_n$ اعدادی مختلط باشند، آنگاه*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j\, \bar{b}_j\Big|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \ \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

برهان. به قضیه ۱.۳۵ [۲۵] مراجعه شود. ■

در هر فضای ضرب داخلی مانند V، نرم برداری مانند $v \in V$ با

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

تعریف می‌شود. هدف ما این است که نشان دهیم فرمول فوق واقعاً نرمی بر V تعریف می‌کند. برای این منظور لازم است نامساوی کوشی-شوارتز را بیان کنیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. (نامساوی کوشی-شوارتز[۴]). *اگر u و v دو بردار دلخواه در یک فضای ضرب داخلی باشند، آنگاه*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

[۳] Schwarz inequality

[۴] Cauchy-Schwarz inequality

برهان. به قضیه ۲.۳۲ [۳] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۱.۱.۱. *اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه فرمول*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

یک نرم روی V تعریف می‌کند که آن ***نرم القایی به وسیله‌ی ضرب داخلی*** *نامیده می‌شود.*

برهان. به قضیه ۳.۳۲ [۳] مراجعه شود. ■

ملاحظه ۱۲.۱.۱ . بر طبق قضیه قبل هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرم‌دار می‌باشد، اما عکس آن صادق نیست به عنوان مثال برخی از فضاهای باناخ که در ادامه معرفی شده است نرم‌دار هستند اما نرم آنها القا شده توسط یک ضرب داخلی نیست، در واقع داریم:

$$\{\text{فضاهای برداری}\} \supset \{\text{فضاهای برداری نرم‌دار}\} \supset \{\text{فضاهای ضرب داخلی}\}$$

تعریف ۱۳.۱.۱. (فضای باناخ). یک فضای نرم دار خطی که نسبت به نرمش کامل است فضای باناخ نامیده می‌شود. در حقیقت یک فضای باناخ، فضایی نرم‌دار خطی است که در آن هر دنباله کُشی همگراست.

مثال ۱۴.۱.۱. فضای برداری $\mathbb{R}^n$ مجهز به **نرم اقلیدسی** $\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}$ که در آن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ یک فضای باناخ است.

حال به تعریف یک فضای بسیار مهم در آنالیز حقیقی می‌پردازیم که بسیاری از مفاهیم عمیق آنالیز حقیقی بر پایه آن استوار است.

تعریف ۱۵.۱.۱. (فضای هیلبرت). هر فضای ضرب داخلی را که نسبت به نرم القا شده به وسیله ضرب داخلی خود کامل باشد یک فضای هیلبرت است.
لازم به ذکر است یک فضای ضرب داخلی را کامل گویند هرگاه همه‌ی دنباله‌های کوشیِ آن (در همان فضا) همگرا باشند.

مثال ۱.۱.۱۶. فضاهای برداری $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ کامل هستند. لذا $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ مثالهایی از فضای هیلبرت هستند (همراه با ضرب داخلی آشنای «نقطه‌ای»).

اکنون به مطالعه‌ی فضاهای هیلبرت نامتناهی‌البعد می‌پردازیم. ابتدا ضرب داخلی دو تابع مقدار مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

بدیهی است که در تعریف فوق اگر توابع f , g مقدار حقیقی باشند آنگاه علامت مزدوج بی‌اثر خواهد بود.

فضای $L^2(\mathbb{R})$ مجموعه‌ی همه‌ی توابع مربعی انتگرال پذیر که به شکل زیر تعریف می‌شود یک فضای هیلبرت است:

$$L^2(\mathbb{R}) = \Big\{ f \ : \ f \text{تابعی اندازه پذیر است} \ , \ \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2} < \infty \ \Big\}.$$

بررسی اینکه فضای فوق ویژگی‌های فضای هیلبرت را دارا باشد را می‌توان در **[۳]** یافت.

در واقع یک تعریف کلی به صورت ذیل ارائه می‌شود:

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید μ یک اندازه‌ی مثبت روی مجموعه‌ی ناتهی X باشد. همچنین فرض کنید $0 < p < \infty$. منظور از $L^p(\mu)$ فضای تمام توابع اندازه‌پذیر بر X است که:

$$\|f\|_p = \Big(\int_X \mid f \mid^p d\mu \Big)^{1/p} < \infty,$$

در این صورت $(L^p \ (\mu) \ , \ \|.\|_p)$ یک فضای باناخ است.

در برخی از جاهای این پایان نامه با مثال دیگری از فضاهای هیلبرت که شامل همه دنباله‌های به طور مربعی مجموع‌پذیر از اعداد حقیقی است برخورد خواهیم کرد که آنرا با $l^2(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l^2(\mathbb{R}) = \big\{ (x_1, x_2, \ldots) \ \mid \ x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \ \big\}.$$

تعریف فوق را می‌توان با در نظر گرفتن $x_i \in \mathbb{Z}$ تعمیم داد که معمولاً آن را با $l^{۲}(\mathbb{Z})$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۸. (محمل یک تابع). فرض کنید X فضایی توپولوژیک باشد. محمل تابع $f: X \to \mathbb{R}$ که با $suppf$ نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$\overline{\{x \ : \ f(x) \neq ۰\}}.$$

(علامت بار نشانگر بستار مجموعه فوق است.) هرگاه $suppf$ فشرده باشد، f تابع با محمل فشرده نامیده می‌شود.

اکنون به ذکر چند قضیه که برای اثبات قضایای این پایان نامه موردنیاز است، پرداخته می‌شود:

قضیه ۱.۱.۱۹. *فرض کنید $f > ۰$ روی یک مجموعه E انتگرال‌پذیر باشد. آنگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$، یک $\delta > ۰$ وجود دارد به طوری که برای هر مجموعه‌ی $A \subset E$ با $\mu(A) < \delta$ داریم:*

$$\int_A f < \varepsilon.$$

برهان. به گزاره ۱۳ [۲۳] مراجعه شود. ■

قضیه ۱.۱.۲۰. *برای هر $۱ \leq p < \infty$، $C_c(X)$ (گردایه‌ی همه‌ی توابع مختلط پیوسته بر X که محمل فشرده دارند) در $L^p(\mu)$ چگال است.*

برهان. به قضیه ۳۱.۱۱ [۳] مراجعه شود. ■

نتیجه‌ای درباره‌ی مقایسه‌ی فضاهای L^p با یکدیگر را ارائه می‌دهیم و خواننده را برای دیدن اثبات دقیقی از آن به قضیه ۳۱.۱۴ [۳] ارجاع می‌دهیم.