بنام خداوند جان و خرد

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

آقای **امیر حقیقی** به شماره دانشجویی ۸۷۵۶۶۲۰۰۷ رساله واحدی خود را با عنوان: «**تجزیه و تحلیل پایداری میانگین مربعی دسته‌ای از روش‌های رونگ-کوتا برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی**» در تاریخ ۹۱/۱۰/۲۷ ارائه کردند.

اعضای هیأت داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تأیید کرده است و پذیرش آن را برای تکمیل درجه دکتری پیشنهاد می‌کنند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	خانم دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	خانم دکتر مهدیه طهماسبی	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر مصطفی شمسی	دانشیار	
۵- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر علی فروش‌باستانی	استادیار	
۶- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر محمدرضا اصلاحچی	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه ~~کارشناسی ارشد~~/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی کاربردی است که در سال ۱۳۹۱ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر سید محمد حسینی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر
و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب امیر حقیقی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع دکتری تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: امیر حقیقی

تاریخ و امضا: ۹۱/۱۱/۱۷

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب امیر حقیقی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۷ مقطع دکتری دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۹۱/۱۱/۱۷

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکدهٔ علوم ریاضی

رسالهٔ دورهٔ دکتری ریاضی کاربردی

تجزیه و تحلیل پایداری میانگین مربعی دسته‌ای از روش‌های رونگ–کوتا برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی

توسط:
امیر حقیقی

استاد راهنما:
دکتر سید محمّد حسینی

دی ماه ۹۱

تقدیم به:

پدر و مادر عزیز و مهربانم

که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار

و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند.

تقدیر و تشکر

با سپاس فراوان از استاد راهنمای فرهیخته‌ام جناب آقای دکتر حسینی که در طول مدت انجام این پایان‌نامه از رهنمودهای علمی و اخلاقی ایشان بهره مند شدم و درگاه خداوند بزرگ را شاکرم که افتخار شاگردی ایشان را نصیبم نمود.

از پروفسور *Andreas Rößler* که در دورهٔ کوتاه ولی پرثمر فرصت مطالعاتی از ایشان از لحاظ علمی و اخلاقی بسیار آموختم بسیار سپاسگزارم.

همچنین از اساتید گرامی خانم‌ها دکتر سعدی و دکتر طهماسبی و آقایان دکتر اصلاحچی، دکتر شمسی و دکتر باستانی به خاطر رهنمودهای علمی و اخلاقی ارزنده‌شان کمال تشکر را دارم.

چکیده

برای تقریب گونه‌های خاص از معادلات دیفرانسیل تصادفی روش‌های عددی جدید و کارآتری مورد نیاز است. در این رساله، ابتدا انواع مختلف مفاهیم پایداری برای معادلات دیفرانسیل تصادفی و همچنین روش‌های عددی برای تقریب آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس با مرور مفهوم سختی برای سیستم‌های تصادفی، روش‌های عددی ضعیف و قوی کارآیی را برای تقریب این دسته از معادلات بیان می‌کنیم. در این راستا در تقریب‌های ضعیف، با ارائه پارامترهایی از یک کلاس از روش رونگ-کوتای تصادفی کارایی این خانواده از روش‌ها را برای تقریب سیستم‌های تصادفی سخت افزایش می‌دهیم . سپس یک خانوادهٔ پیشگو-اصلاح‌گر مرتبهٔ دو ضعیف با ناحیهٔ پایداری مناسب و هزینه محاسباتی معقول را بیان می‌کنیم. در تقریب‌های قوی، یک کلاس جدید از روش‌های تکّه‌ای متعادل شده با مرتبهٔ همگرایی یک را برای سیستم‌های سخت با $m-$ فرآیند وینر چنان طراحی می‌کنیم که در آن تابع نمو قسمت تعینی می‌تواند، متناظر با تابع نمو هر روش تک-گامی حداقل مرتبهٔ یک برای معادلات تعینی در نظر گرفته شود. در نهایت در کلاس روش‌های فاقد مشتق، یک روش رونگ-کوتای شبه ضمنی مرتبهٔ یک با خواص پایداری مناسب را برای تقریب معادلات سخت تصادفی بیان می‌کنیم. به کمک مثال‌های عددی متعدد نشان می‌دهیم که بحث‌های نظری ارائه شده معتبر هستند.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی؛ پایداری سیستم‌های تصادفی؛ پایداری روش‌های عددی؛ روش‌های رونگ-کوتا تصادفی؛ روش‌های تکّه‌ای متعادل شده

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

پیش گفتار

همان‌طور که می‌دانیم یکی از موضوعات مهم در مطالعهٔ روش‌های عددی، بررسی توانایی آن‌ها در حفظ خواص کیفی جواب تحلیلی سیستم‌هایی است که این روش‌ها قصد دارند آن‌ها را تقریب بزنند. علاوه بر ضریب رانِش، ضرایب پخش نیز در سختی یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی مؤثر هستند. نمونه‌های زیادی از این دسته از معادلات در فیزیک وجود دارند، به عنوان مثال می‌توان به مدل‌های هیدرولوژی، [۱] انتشار لیزر [۲] و معادلات لنجوین [۳] در شیمی-فیزیک اشاره کرد. با توجه به مشکلاتی که در شبیه‌سازی سیستم‌های سخت وجود دارد، اغلب استفاده از روش‌های ضمنی و پیشگو-اصلاح‌گر برای غلبه بر این مشکلات ضروری است.

این رساله در ابتدا به مطالعه پایداری سیستم‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی و روش‌های عددی برای تقریب آن‌ها می پردازد و سپس با مرور مفهوم سختی برای سیستم‌های تصادفی، روش‌های عددی ضعیف و قوی کارآیی را برای تقریب این دسته از معادلات بیان می‌کند. رساله دارای چهار فصل به شرح زیر است:

- در فصل اول پیش نیازها آورده شده است.
- در فصل دوم به طور جامع و منسجم، پایداری معادلات دیفرانسیل تصادفی و روش‌های عددی برای تقریب آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. نتیجه‌های مهم این فصل به شرح زیر می‌باشند:

۱. بیان محک‌های مورد نیاز برای سنجش انواع پایداری سیستم‌های تصادفی و روش‌های عددی؛

۲. بیان سیستم‌های آزمون مناسب برای تحلیل پایداری روش‌های عددی.

[۱] Hydrologhy
[۲] Laser emission
[۳] Langevin equations

• در فصل سوم در ابتدا یک کلاس جدید از روش‌های رونگ-کوتای تصادفی، ارائه شده در [۴۹، ۴۷، ۱۵]، توصیف خواهد شد. سپس خواص پایداری برخی حالت‌های خاص از این کلاس روی سیستم‌های معادلات دیفرانسیل خطی مورد تحلیل قرار خواهند گرفت. بر اساس این تحلیل‌ها، ضرایبی از این کلاس چنان ارائه می‌شوند که روش‌های رونگ-کوتای متناظر را برای حل سیستم‌های سخت کارآمد خواهند نمود.

در ادامه، با استفاده از روش‌های رونگ-کوتای روسلِری [۴۹] و روش ضمنی ارائه شده توسط پلاتِن [۴۴]، یک کلاس جدید از روش‌های مرتبهٔ دوّم ضعیف [۲۱] با خاصیت‌های پایداری مناسب ارائه خواهد شد. حاصل نتیجه‌های این فصل مقاله‌های ۱ و ۲ هستند.

• در فصل چهارم، ابتدا یک کلاس کلّی از روش‌های تکّه‌ای متعادل شده از مرتبهٔ قوی یک برای حل سیستم‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی از نوع ایتو ارائه خواهد شد. پایداری میانگین-مربعی این دسته از روش‌ها برای حالتی که در آن تابع نمو متناظر با ضریب رانِش، همان تابع نمو روش رُزِنبرُک تعینی است [۱۴]، مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. در این حالت نشان داده خواهد شد که روش حاصل برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی دارای خواص پایداری بهتری نسبت به دسته‌ای گسترده از روش‌های تکّه‌ای متعادل شده است.

در بخش دوّم این فصل، یک روش رونگ-کوتای ضمنی جدید از کلاس (۲.۲.۳) برای حل قوی معادلات دیفرانسیل تصادفی سخت ارائه خواهد شد. نشان داده می‌شود که این کلاس از روش‌ها دارای مرتبهٔ همگرایی قوی $(p_d, p_s) = (۲, ۱)$ هستند. حاصل نتیجه‌های این فصل مقاله ۳ است.

لازم به ذکر است که روش ارجاع به مطالب در متن رساله به شیوه نگارش پارسی است. به عنوان نمونه برای دیدن "گزاره ۵.۲.۴"، باید به بخش دوم از فصل ۴ مراجعه شود.

از این رساله مقاله‌های زیر حاصل گردیده است:

1. Amir. Haghighi, S. M. Hosseini, On the stability of some second order numerical methods for weak approximation of Itô SDEs, Numer. Algorithms 57 (2011) 101-124.

2. Amir. Haghighi, Analysis of asymptotic mean-square stability of a class of Runge-Kutta schemes for linear systems of stochastic differential equations, submitted.

3. Amir. Haghighi, S. M. Hosseini, A class of split-step balanced methods for stiff stochastic differential equations, Numer. Algorithms 61 (2012) 141–162.

فصل ۱
پیش نیازها

در این فصل مختصری به معرفی جواب عددی یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی می‌پردازیم. در ابتدا در بخش‌های ۱.۱ و ۲.۱، مبانی و اصول مورد نیاز در نظریه معادلات دیفرانسیل تصادفی، SDE[۱]، بیان می‌شود و در ادامه در بخش ۳.۱، مختصری به روش‌های عددی برای حل یک SDE با توجه به دو محک عمدهٔ همگرای ضعیف و قوی خواهیم پرداخت.

۱.۱ تئوری معادلات دیفرانسیل تصادفی

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال با فیلتر $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ روی بازهٔ $I = [۰, \infty[$ باشد، [۲۹].

تعریف ۱.۱.۱. فرآیند وینر $m-$ بُعدی $W = (W^۱, ..., W^m)$، یک فرآیند تصادفی پیوستهٔ $\mathbb{R}^m$ مقداری چون $W = \{W_t, \mathcal{F}_t : t \in I\}$، تعریف شده روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- برای هر $i = ۱, ..., m$، تقریباً همه جا نسبت به اندازه احتمال $\mathbb{P}$، $W_۰^i = ۰$؛
- برای هر $۰ \leq s < t$ نموهای $W_t - W_s$ مستقل از میدان $\mathcal{F}_s$ باشند؛
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(۰, (t-s)Id_m)$، برای هر $۰ \leq s < t$.

[۱] Stochastic differential equations

یک فرآیند وینر، یک فرآیند گاوسی است که آن را حرکت براونی نیز می‌نامند. مؤلفه‌های $W^1, ..., W^m$ از فرآیند وینر $m-$ بُعدی $W = (W^1, ..., W^m)$، فرآیندهای وینر تک-بُعدی هستند. فرض کنید توابع $a : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ و $b : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ برل اندازه‌پذیر باشند. یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی، یک معادلهٔ انتگرالی به‌صورت

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) \star dW_s, \tag{1.1.1}$$

است که در آن $W = (W_t)_{t\in I}$، یک فرآیند وینر $m-$ بُعدی و $X = (X_t)_{t\in I}$ فرآیند جوابِ $\mathbb{R}^d-$ مقداری با مسیرهای پیوسته است. به جای (1.1.1) به اختصار می‌توان نوشت

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t) \star dW_t, \qquad X_{t_0} = x_0. \tag{1.2.1}$$

اولین انتگرال در (1.1.1) را می‌توان، مسیر به مسیر، به عنوان انتگرال لبگ[2] در نظر گرفت، امّا همانطور که می‌دانیم فرآیند وینر تقریباً همه جا با تغییر کراندار نیست [29]، لذا نمی‌توان انتگرال دوم در (1.1.1) را، مسیر به مسیر، به عنوان انتگرال ریمان-اشتیلیس [3] تعبیر نمود. به منظور ارائه یک تعریف ریاضی از انتگرال تصادفی نسبت به یک فرآیند وینر، تعریف یک کلاس از فرآیندهای تصادفی به صورت زیر ضروری خواهد بود.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{B}$، مجموعهٔ بُرل‌های I باشد، $\mathcal{L}$ را خانوادهٔ تمام فرآیندهای تصادفی $\mathcal{B}\times\mathcal{F}-$ اندازه‌پذیرِ $\mathcal{F}_t-$ بهنگام شده چون $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ در نظر بگیرید که

$$E(\int_0^t X_s^2 ds) < \infty, \qquad \forall t > 0, \tag{1.3.1}$$

همچنین $\mathcal{P}$ را خانوادهٔ تمام فرآیندهای تصادفی $\mathcal{B}\times\mathcal{F}-$ اندازه‌پذیرِ $\mathcal{F}_t-$ بهنگام شدهٔ $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ در نظر بگیرید که

$$P(\int_0^t X_s^2 ds < \infty) = 1, \quad \forall t > 0. \tag{1.4.1}$$

---
[2] Lebesgue
[3] Riemann-Stieltjes

به وضوح شرط (۱.۳.۱) قویتر است و شرط (۱.۴.۱) را نتیجه می‌دهد. حال یک کلاس از افرازهای بازهٔ انتگرال‌گیری $[t_\circ, t]$ چون $t_\circ = t_\circ^{(n)} < t_۱^{(n)} < \ldots < t_{N_n}^{(n)}$ را چنان در نظر بگیرید که با افزایش n ظریف‌تر شده و

$$\max_{\circ \leq i \leq N_n - ۱} \left(t_{i+۱}^{(n)} - t_i^{(n)}\right) \to \circ, \quad as \ n \to \infty.$$

برای $\theta \in [\circ, ۱]$ دلخواه ولی ثابت، $\tau_i^{(n)} = \theta t_{i+۱}^{(n)} + (۱ - \theta) t_i^{(n)}$ را در نظر بگیرید، در آن صورت سری

$$\sum_{i=\circ}^{N_n - ۱} X_{\tau_i^{(n)}} (W_{\tau_{i+۱}^{(n)}} - W_{\tau_i^{(n)}}) \tag{۱.۵.۱}$$

از متغیرهای تصادفی، برای $n \to \infty$، در احتمال همگراست اگر $X \in \mathcal{P}$ و میانگین-مربعی همگراست اگر $X \in \mathcal{L}$ [۲۹، ۳۱، ۴۱]. حد (۱.۵.۱)، به انتخاب افراز بستگی ندارد امّا بر خلاف انتگرال ریمان-اشتیلیس وابسته به انتخاب θ است. به عنوان مثال، برای $\theta = \circ$، یعنی حالتی که $\tau_i^{(n)}$ منطبق بر $t_i^{(n)}$ باشد، حد (۱.۵.۱) را با

$$\int_{t_\circ}^{t} X_s dW_s, \tag{۱.۶.۱}$$

نمایش داده و آن را انتگرالِ ایتو [۴] می‌نامند. با قرار دادن $\theta = \frac{۱}{۲}$، حالتی که $\tau_i^{(n)}$ منطبق بر نقطهٔ وسط بازهٔ $[t_i^{(n)}, t_{i+۱}^{(n)}]$ باشد، حد (۱.۵.۱) را با

$$\int_{t_\circ}^{t} X_s \circ dW_s, \tag{۱.۷.۱}$$

نمایش داده و آن را انتگرالِ استراتونوویچ [۵] می‌نامند. با در نظر گرفتن حساب ایتو و استراتونوویچ می‌توان رابطهٔ ساده‌ای بین جواب‌های یک معادله دیفرانسیل تصادفی از نوع ایتو و استراتونوویچ بدست آورد. فرض کنید $(X_t)_{t \in I}$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی $d-$بُعدی از نوع ایتوی

$$X_t = X_{t_\circ} + \int_{t_\circ}^{t} a(s, X_s) ds + \int_{t_\circ}^{t} b(s, X_s) dW_s, \tag{۱.۸.۱}$$

[۴] Itô
[۵] Stratonovich

نسبت به فرآیند وینر $m-$ بُعدی $(W_t)_{t\in I}$ باشد. درآن صورت $(X_t)_{t\in I}$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی از نوع استراتونوویچ

$$X_t = X_{t_\circ} + \int_{t_\circ}^{t} \underline{a}(s, X_s)ds + \int_{t_\circ}^{t} b(s, X_s) \circ dW_s, \qquad (۱.۹.۱)$$

خواهد بود که در آن، برای هر $i = ۱, ..., d$

$$\underline{a}_i = a_i(t, x) - \frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{d}\sum_{k=۱}^{m} b_{jk}\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_j}(t, x). \qquad (۱.۱۰.۱)$$

در نتیجه هرجا یک معادله دیفرانسیل تصادفی در یکی از فرم‌های ایتو یا استراتونوویچ ارائه شوند، به راحتی می‌توان آن را به فرم دیگر تغییر داد. به عنوان مثال، با به کار بردن قضیهٔ وجود ویکتایی ۷.۱.۱ روی معادلهٔ دیفرانسیل به فرم ایتوی (۱.۸.۱)، می‌توان شرایطی معادل برای فرم استراتونوویچ (۱.۹.۱) بدست آورد. در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی هر یک از فرم‌های ایتو و استراتونوویچ دارای مزیت‌های هستند که موجب تحلیل ساده‌تر روند برخی برهان‌ها خواهند شد. به عنوان مثال یکی از مهم‌ترین مزیت‌های آنالیز با استفاده از حساب ایتو، حفظ خواص فرآیند وینر است که در ساده‌سازی تحلیل‌ها بسیار سودمند می‌باشد.

$f \in \mathcal{L}$ را در نظر بگیرید، در آن صورت رابطهٔ

$$E\Big(\big(\int_{t_\circ}^{t} f(s,\omega)dW_s\big)^{۲}\Big) = E\Big(\int_{t_\circ}^{t} f^{۲}(s,\omega)ds\Big), \qquad (۱.۱۱.۱)$$

بین انتگرال‌های ایتو و لبگ، که به ایزومتری ایتو نیز معروف می‌باشد، برقرار است. همچنین با استفاده از ایزومتری ایتو خاصیت مارتینگلی فرآیند وینر به انتگرال ایتو نیز منتقل می‌شود. فرض کنید W یک فرآیند وینر نسبت به فیلتر $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ باشد، در آن صورت W و فرآیند

$$\Big(\int_{t_\circ}^{t} f(s,\omega)dW_s\Big)_{t\in I} \qquad (۱.۱۲.۱)$$

نسبت به $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ مارتینگل هستند. به علاوه برای هر $t \in I$

$$E\Big(\int_{t_\circ}^{t} f(s,\omega)dW_s\Big)_{t\in I} = \circ. \qquad (۱.۱۳.۱)$$