بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش جبر

عنوان

گراف غیر دوری از یک گروه

استاد راهنما

دکتر محمدرضا ریسمانچیان

استاد مشاور

دکتر علیرضا نقی پور

پژوهشگر

آصفه قشقایی

مرداد ۱۳۹۲

این مجموعه تقدیم به پدر بزرگوار و صبورم که همواره در تربیت فرزندان خویش مسؤلانه کوشید و در این طریق از هیچ کوششی فروگذار نکرد، او که زیستن را در صداقت و درستی جستجو کرد.

تقدیم به مادرم که مهربانیش در وصف نگنجد و پرورش در دامانش موجب افتخار و بالندگی است، او که چون دری گرانبها در پهنه ی زندگیم می درخشد و نعمت وجودش گرمی بخش محفل صمیمی خانواده است.

به نام آفریدگار هستی،

که چون عقل یکه بتازد، زنجیری سرد به کار زندگی شود و چون هوای دل بی مهار حکومت کند همچون زبانه های سرکش برفروزد و تا بنیاد به تباهی کشد تا که هستی خود نیز بسوزد، پس به روح خویش رخصت دهید که قامت عقل فراز کند تا همطراز آرزو شود که نغمه زاید و آواز برآید و جان رها کنید که خواست و خرد راهم عنان بتازد تا که آرزوهاتان همه روز حیاتی دوباره گیرد و چون مرغ آتش باز از خاکستر خویش بال برکشد. . . و چونکه شما هر کدام نسیمی خوش آید در کاینات ایزدی و برگی سبز به جنگل انبوه خداوند، پس بر عقل باید که آرام گیرد و بر کام باید که تاخت.

بر خود لازم می دانم از همه عزیزانی که در جهت به سرانجام رساندن این مجموعه مرا یاری نمودند، قدردانی نمایم. مراتب قدردانی و سپاس خود را از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان و استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر علیرضا نقی پور ابراز می نمایم. همچنین از استادان گرانقدر، جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی زاده و سرکار خانم دکتر ندا آهنجیده که داوری این رساله را بر عهده داشتند، قدردانی می نمایم.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان

آصفه قشقایی

مرداد ۱۳۹۲

چکیده

به گروه غیر موضعاً دوری G گراف Γ_G را وابسته می‌کنیم و گراف غیر دوری از G می‌نامیم. که مجموعه رئوس آن به صورت $G \setminus \mathrm{cyc}(G)$ است. دو رأس در صورتی به یکدیگر متصل می‌شوند که با یک زیر گروه دوری تولید نشده باشند. ثابت می‌کنیم که خوشه‌ای از اعداد Γ_G متناهی است اگر و تنها اگر خوشه نامتناهی نداشته باشد. ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه پوچ‌توان متناهی و H یک گروه با $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ و $|\mathrm{cyc}(G)| = |\mathrm{cyc}(H)|$، آن‌گاه H یک گروه پوچ‌توان متناهی است. تعدادی مثال از گروه‌های G که گراف غیر دوری یکتا دارند به‌دست می‌آوریم. اگر $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ برای گروه H، آن‌گاه $G \cong H$. با مشاهده این مثال‌ها حدس می‌زنیم که هر گروه ساده ناآبلی متناهی یک گراف غیر دوری یکتا دارد. همچنین تعدادی مثال از گروه‌های غیر دوری متناهی G به‌دست می‌آوریم که اگر $\Gamma_G \cong \Gamma_H$ برای گروه H، آن‌گاه $|G| = |H|$.

کلمات کلیدی :گراف غیر دوری، گروه متناهی.

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنیم G یک گروه باشد. مرکز ساز یک عضو $x \in G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_G(x) = \{y \in G | \langle x, y\rangle \text{ آبلی است}\},$$

که یک زیر گروه از G است.
با توجه به [۹] و [۱۰] اگر در تعریف بالا کلمه آبلی را با کلمه‌ی دوری جابه‌جا کنیم، زیر مجموعه‌ای از مرکز ساز به‌دست می‌آوریم و آن را دوری ساز می‌نامیم و با $cyc_G(x)$ نشان می‌دهیم:

$$\mathrm{cyc}_G(x) = \{y \in G | \langle x, y\rangle \text{ دوری است}\}.$$

هم‌چنین برای یک زیر مجموعه‌ی ناتهی X از G دوری ساز X در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{cyc}_G(X) = \bigcap_{x \in X} \mathrm{cyc}_G(x).$$

وقتی که $X = G$ ، $\mathrm{cyc}_G(G)$ را دوری ساز از G می‌نامیم و با $\mathrm{cyc}(G)$ نشان می‌دهیم.
واضح است که برای هر گروه G، $\mathrm{cyc}(G)$ یک زیرگروه به طور موضعاً دوری از G است اما $\mathrm{cyc}_G(x)$ یک زیر گروه از G نیست.

به‌عنوان مثال در گروه $H = Z_۲ \oplus Z_۴$ داریم

$$\mathrm{cyc}_H((۰, ۲)) = \{(۰, ۰), (۰, ۱), (۰, ۲), (۰, ۳), (۱, ۱), (۱, ۳)\},$$

که زیرگروه H نیست.

فرض کنیم G یک گروه غیر موضعاً دوری باشد گراف Γ_G را به G وابسته می‌کنیم (که گراف غیر دوری از G نامیده می‌شود) با توجه به منبع اصلی [۱] با مجموعه رأس‌های زیر مشخص می‌شوند،

$$V(\Gamma_G) = G \setminus \mathrm{cyc}(G).$$

مجموعه‌ی یال‌ها برابر است با

$$E(\Gamma_G) = \{\{x, y\} \subseteq V(\Gamma_G) \mid \langle x, y\rangle \text{ دوری نیست}\}.$$

توجه کنید که درجه یک رأس $x \in V(\Gamma_G)$ در گراف غیر دوری Γ_G برابر است با $|G \setminus \mathrm{cyc}_G(x)|$.

پل اردش [۱] اولین کسی بود که گراف غیر جابه‌جایی از یک گروه را در نظر گرفت و مسأله‌ای را طرح کرد به این صورت که اگر فرض کنیم G یک گروه باشد ∇_G گراف غیر جابه‌جایی است که خوشه نامتناهی ندارد.

1. Paul Erdos

این سوال مطرح شده است که آیا خوشه اعداد ∇_G متناهی است؟
نویمن [1] در [۸] به این سوال پاسخ مثبت داده و گفته است گراف غیر جابه‌جایی از گروه G خوشه نامتناهی ندارد اگر و فقط اگر $G \setminus C(G)$ متناهی باشد. در این مورد خوشه‌ای اعداد از ∇_G متناهی است.
در [۹] گروه های منظم معرفی شده است. به این ترتیب که اگر K یک گروه باشد که هر عضو غیر بدیهی از K از مرتبه‌ی عدد اول باشد، آن‌گاه K یگ گروه منظم است. دو فرض شی [2] و بی [3] در [۶] مطرح است که اگر M یک گروه ساده نا آبلی متناهی باشد و $|G| = |M|$ برای گروه G که $\Pi_e(G) = \Pi_e(M)$، آن‌گاه $G \cong M$. این فرضیه برای بعضی از گروه‌های ساده‌ی متناهی ثابت می‌شود. گفته شده است مازاروف [4] در [۶] اولین کسی است که درستی فرضیه شی و بی [۱۳] را برای همه‌ی گروه‌های ساده‌ی نا آبلی متناهی کامل کرد.

1. Neumann
2. Shi
3. Bi
4. Mazurov

فهرست نمادها

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

دراین فصل به بیان مفاهیم ابتدایی می‌پردازیم که در فصول پایان‌نامه از آن‌ها استفاده می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه نظریه گروه‌ها

تعاریف مورد نیاز در نظریه گروه ها را با توجه به [الف] و [ب] یادآوری می‌کنیم:

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی باشد. هر تناظر یک به یک مانند $f : X \longrightarrow X$ را یک جایگشت روی X گوییم.

مجموعه همه جایگشت‌ها روی مجموعه X باعمل ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهد. این گروه را گروه متقارن بر X می‌گوییم و آن را با S_X نما یش می‌دهیم.
هر گاه $X = \{۱, ..., n\}$ گروه متقارن روی X را با S_n نمایش می‌دهیم. بدیهی است که $|S_n| = n!$.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه همه جایگشت های زوج در S_n را گروه متناوب از درجه‌ی n گوییم و با نماد A_n نمایش می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود که $|A_n| = \frac{n!}{۲}$.

تعریف ۳.۱.۱. گروه G گروه تابی است در صورتی که هر عضو آن از مرتبه متناهی باشد.

تعریف ۴.۱.۱. گروه G بدون تاب است در صورتی‌که به جز همانی عضوی از مرتبه متناهی نداشته باشد.

تعریف ۵.۱.۱. p - گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی می‌نامیم در صورتی‌که مرتبه هر عضو غیر بدیهی G عدد اول p باشد.

تعریف ۶.۱.۱. اگر G یک گروه و $\{G_i\}$ خانواده‌ای از زیر گروه های نرمال G به صورت زیر باشد
$$\cdots \leq G_{t-1} \leq G_t \leq G_{t+1} \leq \cdots$$
در صورتی که داشته باشیم $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}})$، آن‌گاه این سری را یک سری مرکزی می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. گروه G را پوچ توان می‌نامیم در صورتی‌که یک سری مرکزی داشته باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$. گوییم a بر b بخش‌پذیر است یا a می‌شمارد b را اگر عدد صحیح c وجود داشته باشد به‌طوری‌که $b = ac$.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم Π مجموعه‌ای از اعداد اول باشد، گروه G را یک Π ‑گروه می‌نامیم هرگاه تمام شمارنده‌های اول $|G|$ عضو Π باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. هرگاه G گروه متناهی و $H \leq G$ به‌طوری‌که $(|H|, [G : H]) = 1$. در این صورت H را زیرگروه هال از G می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. یک p ‑زیرگروه از G که دارای بیش‌ترین مرتبه p^α است را یک p ‑زیرگروه سیلو از G می‌نامیم.

قضیه زیر به قضیه سیلو مشهور است:

قضیه ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد، که در آن $n = p^\alpha m$، $\alpha \geq 0$ و p عددی اول است که $p \nmid m$. در این صورت*

۱. *G حداقل یک p ‑زیرگروه سیلو دارد.*

۲. *هر p ‑زیرگروه G متعلق به یک p ‑زیرگروه سیلوی G است.*

۳. *هر دو p ‑زیرگروه سیلوی G مزدوجند.*

۴. *تعداد همه p ‑زیرگروه‌های سیلوی G همنهشت با ۱ به پیمانه p است.*

برهان. رجوع شود به [الف] صفحه ۷۱. □

تعریف ۱۳.۱.۱. یک گروه متناهی که زیرگروه‌های سیلویش دوری هستند را یک گروه فرادوری می‌نامیم.

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد. در این صورت G به حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش تجزیه می شود. به عبارت دیگر اگر $\{p_1, \cdots, p_n\}$ مجموعه اعداد اولی باشند که در تجزیه $|G|$ ظاهر می‌شوند و $G_i \in Syl_{p_i}(G)$، آن‌گاه $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$.*

برهان. رجوع شود به [۱۶] صفحه ۱۲۶. □

قضیه ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد باشد و $H \leq G$. در این صورت H نیز متناهی مولد است. به‌علاوه اگر G با n عضو تولید شود، آن‌گاه H حداکثر با n عضو تولید می‌شود.*

برهان. رجوع شود به [الف] صفحه ۱۳۸. □

قضیه ۱۶.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد. به‌علاوه فرض کنیم به ازای هر مقسوم‌علیه n مانند d معادله $y^d = ۱$ در G حداکثر d جواب داشته باشد. در این صورت G دوری است.*

برهان. رجوع شود به [الف] صفحه ۱۴۵. □

قضیه ۱۷.۱.۱. *فرض کنیم p, q دو عدد اول باشند به‌طوری‌که $p < q$ در این صورت:*

۱. *اگر $p \nmid q$، آن‌گاه تنها یک گروه از مرتبه pq وجود دارد که دوری است.*

۲. *اگر $p \mid q - ۱$، آن‌گاه تنها دو گروه از مرتبه pq وجود دارد. گروه G با نمایش*

$$< x, y \mid x^p = y^q = ۱, x^{-۱}yx = y^r >$$

که در آن r عدد طبیعی است که $۱ < r < q$ و $(r, p) = ۱$ و $r^p \equiv (q)$.

برهان. رجوع شود به [الف] صفحه ۱۹۰. □

تعریف ۱۸.۱.۱. به ازای هر عدد اول p زیر مجموعه‌ای از اعداد مختلط وجود دارد که همراه با عمل ضرب یک گروه تشکیل می‌دهند. فرض کنیم

$$.\mathbb{Z}p^{\infty} = \{\xi \in \mathbb{C} | \exists n \in \mathbb{Z} : \xi^{p^n} = ۱\}$$

عناصر $\mathbb{Z}p^{\infty}$ دقیقاً آن اعداد مختلط به صورت $cos\frac{۲k\Pi}{p^n} + isin\frac{۲k\Pi}{p^n}$ می‌باشند که در آن $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ و $۰ \leqslant k \leqslant p^n$ این گروه را یک گروه شبه دوری می‌نامند.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد. $D_{۲n}$ را گروه دو وجهی از مرتبه $۲n$ می‌نامیم و آن‌را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$D_{۲n} = \langle a, b : a^n = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle.$$

تعریف ۲۰.۱.۱. گروه $Q_۸$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q_۸ = \langle a, b : a^۴ = ۱, a^۲ = b^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle.$$

۲.۱ مفاهیم و تعاریف اولیه نظریه گراف

برخی تعاریف مورد نیاز در نظریه گراف ها را با توجه به [۲] یادآوری می‌کنیم:

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم Γ یک گراف باشد. اگر بین دو رأس v و w مسیری موجود باشد فاصله بین v و w طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس است، که آن را با $d_\Gamma(v,w)$ یا به طور ساده‌تر با $d(v,w)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. بیش ترین فاصله بین هر جفت از رئوس همبند Γ قطر Γ نامیده می‌شود و آن را با $\operatorname{diam}\Gamma$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. گراف Γ را منظم می‌نامیم، در صورتی‌که درجه هر دو رأس v و w از مجموعه رئوس باهم برابر باشد.

تعریف ۴.۲.۱. اگر H زیرگرافی از G باشد، به‌طوری‌که $V(H) \subseteq V(G)$ و تمام یال‌هایی که عضو H هستند همان یال‌هایی از G باشند که دو سر آن‌ها در $V(H)$ می‌افتد. در این صورت H را زیرگراف القایی رأسی می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. اگر H زیرگرافی از G باشد، به‌طوری‌که $E(H) \subseteq E(G)$ و تمام رئوسش رئوسی باشد که دو سر یال‌های $E(H)$ هستند را زیرگراف القایی یالی می‌نامیم.

فصل ۲

برخی از خصوصیات دوری‌سازها و گراف‌های غیر دوری

مطالب این فصل از مراجع [۱] و [۱۰] گرفته شده‌اند. در این فصل به بیان مفهوم گروه موضعاً دوری می‌پردازیم و قطر گراف‌های غیر دوری متفاوت را بررسی می‌کنیم.

۱.۲ برخی از خصوصیات دوری سازها

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت G را موضعاً دوری گوییم در صورتی که هر زیر گروه با تولید متناهی آن دوری باشد. به عنوان مثال S_3 یک گروه موضعاً دوری می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنیم G یک گروه باشد. مرکز ساز یک عضو $x \in G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_G(x) = \{y \in G | \langle x, y\rangle \text{آبلی است}\},$$

که یک زیر گروه از G است.

تعریف ۳.۱.۲. با توجه به [۹] و [۱۰] اگر در تعریف بالا کلمه آبلی را با کلمه‌ی دوری جابه‌جا کنیم، زیر مجموعه‌ای از مرکز ساز به‌دست می‌آوریم و آن را دوری ساز می‌نامیم و با $cyc_G(x)$ نشان می‌دهیم:

$$\mathrm{cyc}_G(x) = \{y \in G | \langle x, y\rangle \text{دوری است}\}.$$

هم‌چنین برای یک زیر مجموعه‌ی ناتهی X از G دوری ساز X در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{cyc}_G(X) = \bigcap_{x \in X} \mathrm{cyc}_G(x).$$

وقتی که $X = G$ ، $\mathrm{cyc}_G(G)$ را دوری ساز از G می‌نامیم و با $\mathrm{cyc}(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۴.۱.۲. *فرض کنیم G یک گروه باشد $x \in G$ و $\mathrm{D} = \mathrm{cyc}_G(x)$. دراین صورت:*

۱. *D اجتماعی از هم مجموعه های $\mathrm{cyc}(G)$ است. اگر $|\mathrm{D}| < \infty$، آن‌گاه $|\mathrm{cyc}(G)| < \infty$ و $|\mathrm{D}|$ را عاد می‌کند.*

۲. *$\mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})$ یک زیر گروه موضعاً دوری از G و شامل x است.*

برهان. ۱. ابتدا توجه می‌کنیم که اجتماعی از زنجیرهای زیر گروه‌های موضعاً دوری یک زیر گروه به طور موضعاً دوری است. بنابراین هر عضو شامل کوچکترین زیر گروه موضعاً دوری بیشینه است.

بنابراین واضح است که D اجتماعی از زیر گروه‌های موضعاً دوری بیشینه از G است، که شامل x می باشد.

هر زیر گروه موضعاً دوری بیشینه باید شامل $\mathrm{cyc}(G)$ باشد و زیر گروه‌ها اجتماعی از زیر مجموعه های $\mathrm{cyc}(G)$ می باشند. بنابراین $\mathrm{cyc}(G)$ هم به همین صورت است.

۲. واضح است که $x \in \mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})$. فرض کنیم $a, b \in \mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})$ و فرض می‌کنیم که $d \in \mathrm{D}$. حال قرار می‌دهیم $< b, d > = < c >$ به ازای عضوی مانند $c \in G$.

$< c, x > \leq < b, d, x >$ دوری است و $< d, x >$ نیز دوری است و شامل x می‌باشد، بنابراین باید متعلق به D باشد پس $c \in \mathrm{D}$.

حالا قرار می‌دهیم

$$< ab^{-1}, d > \leq < a, b, d > = < a, c >,$$

$x \in \mathrm{D}$ و $ab^{-1} \in \mathrm{D}$ و نتیجه می‌گیریم که $ab^{-1} \in \mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})$ بنابراین $\mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D}) \leq G$.

حالا ثابت می‌کنیم $\mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})$ یک زیرگروه موضعاً دوری از G است.

فرض کنیم $\{d_1, \cdots d_n\} \subseteq \mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})$. در این صورت برای $\mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})$، $< x, d_1 > = < a_1 >$.

چون $x \in < a_1 >$ نتیجه می‌گیریم $a_1 \in \mathrm{D}$. بنابراین $< a_1, d_2 > = < a_2 >$ برای عضوی مانند $a_2 \in G$.

اگر با همین روند ادامه دهیم یک عضو $a_n \in \mathrm{D}$ پیدا می‌کنیم که

$$< d_1, \cdots d_n > \leq < a_n >,$$

نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{cyc}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D})$ موضعاً دوری است. □

قضیه ۵.۱.۲. *فرض کنیم G یک گروه دوری از مرتبه n باشد و $d \mid |G|$. در این صورت G دقیقاً یک زیر گروه از مرتبه d دارد.*

برهان. رجوع شود به [ب] صفحه ۱۴۲. □

تعریف ۶.۱.۲. یک نوع مهم از ۲-گروه متناهی گروه چهارگان تعمیم یافته Q_{2^n} برای $(n \geq 3)$ می‌باشد. این گروه به صورت زیر تولید می‌شود:

$$< x, y | x^{2^n - 1} = 1, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} > .$$

قضیه ۷.۱.۲. *یک p -گروه متناهی دقیقاً یک زیر گروه از مرتبه p دارد اگر و تنها اگر گروه دوری یا گروه چهارگان تعمیم یافته باشد.*

برهان. فرض کنید G از مرتبه p^n باشد و فقط یک زیر گروه از مرتبه p دارد. اگر G آبلی باشد، آن‌گاه ساختار گروه آبلی متناهی باید دوری باشد. فرض می‌کنیم G آبلی نباشد و p عدد اول فرد و H یک زیرگروه بیشینه از G باشد. به‌وسیله استقرا H دوری و بنابراین G زیرگروه دوری بیشینه دارد. فرض می‌کنیم $p = 2$ باشد و A یک زیرگروه نرمال آبلی بیشینه از G باشد. در این صورت A باید دوری باشد و به‌وسیله عضوی مثل a تولید شود. بنابراین $A = C_G(a)$. فرض کنیم x یک عضو از G/A با مرتبه ۲ باشد. پس $< x, A >$ آبلی نیست و زیر گروه دوری از شاخص ۲ ندارد. بنابراین همه انواع دیگر بیشتر از یک زیرگروه از مرتبه ۲ دارند. حالا [۱۱] صفحه ۱۴۱ برهان را کامل می‌کند. $\square$

گزاره ۸.۱.۲. *فرض کنیم G یک p -گروه متناهی به ازای عدد اول p باشد. دراین صورت $\mathrm{cyc}(G) \neq 1$ اگر و تنها اگر G گروه دوری یا گروه چهارگان تعمیم یافته باشند.*

برهان. فرض کنیم $x \in \mathrm{cyc}(G)$ باشد، به‌طوری‌که مرتبه x برابر p است. اگر A یک زیر گروه دوری از مرتبه p در G باشد، آن‌گاه برای عضوی مانند $a \in A$، $A =< a >$. بنابراین $H =< a, x >$ که H یک p -گروه دوری است. طبق قضیه ۵.۱.۲، H دقیقاً یک زیر گروه از مرتبه p دارد و بنابراین $A =< x >$. نتیجه می‌گیریم که G دقیقاً یک زیر گروه از مرتبه p دارد. پس از قضیه ۷.۱.۲ نتیجه می‌گیریم که G گروه دوری یا چهارگان تعمیم یافته است.

برعکس: فرض کنیم $G =< a >$ در نتیجه داریم $\mathrm{cyc}(G) = G$ پس $\mathrm{cyc}(G) \neq 1$.
برای گروه چهارگان تعمیم یافته داریم $y^2 = x^{2^{n-2}} \in \mathrm{cyc}(G)$ و برهان کامل می‌شود.

$\square$

لم ۹.۱.۲. *فرض کنیم G گروه، $x \in G$، $\overline{G} = \dfrac{G}{\mathrm{cyc}(G)}$ و $\widetilde{G} = \dfrac{G}{C(G)}$ در این صورت:*

۱. $\mathrm{cyc}_{\overline{G}}(x\,\mathrm{cyc}(G)) = \dfrac{\mathrm{cyc}_G(x)}{\mathrm{cyc}(G)}$.

۲. $\mathrm{cyc}(\overline{G}) = 1$.

۳. $\mathrm{cyc}(\widetilde{G}) = 1$.

۴. *اگر G نه تابی نه بدون تاب باشد، آن‌گاه $\mathrm{cyc}(G) = 1$.*

۵. *اگر G یک گرووه بدون تاب باشد که $\mathrm{cyc}(G)$ غیر بدیهی است، آن‌گاه $\mathrm{cyc}(G) = C(G)$. بعلاوه اگر $C(G)$ بخش پذیر باشد، آن‌گاه G موضعاً دوری است.*

برهان. ۱.فرض کنیم $y \in G$ باشد. به‌طوری‌که

$$y\,\mathrm{cyc}(G) \in \mathrm{cyc}_{\overline{G}}(x\,\mathrm{cyc}(G)),$$

در این صورت $\frac{< x,y > \mathrm{cyc}(G)}{\mathrm{cyc}(G)}$ دوری است.

لذا به ازای عضوی مانند $z \in < y,x >$، $< x,y > \mathrm{cyc}(G) = < z > \mathrm{cyc}(G)$. بنابراین به ازای اعضایی مانند $a_۱, a_۲ \in \mathrm{cyc}(G)$، $x = za_۱$ و $y = za_۲$. در نتیجه

$$< x,y > = < za_۱, za_۲ > \leq < z, a_۱, a_۲ >,$$

چون $< z, a_۱, a_۲ >$ دوری است، لذا $< x,y >$ دوری می‌باشد. در نتیجه $y \in \mathrm{cyc}(G)$ و

$$y\,\mathrm{cyc}(G) \in \frac{\mathrm{cyc}_G(x)}{\mathrm{cyc}(G)}.$$

بنابراین

$$\mathrm{cyc}_{\overline{G}}(x\,\mathrm{cyc}(G)) \subseteq \frac{\mathrm{cyc}_G(x)}{\mathrm{cyc}(G)}.$$

واضح است که

$$\frac{\mathrm{cyc}_G(x)}{\mathrm{cyc}(G)} \subseteq \mathrm{cyc}_{\overline{G}}(x\,\mathrm{cyc}(G)).$$

برهان قسمت اول کامل می‌گردد.

۲. رجوع شود به[۵].

۳.رجوع شود به [۵].

۴.فرض کنیم $x \in G$ از مرتبه نامتناهی باشد و $y \in G$ عنصری غیر بدیهی از مرتبه متناهی باشد.

فرض کنیم (برهان خلف) که $\mathrm{cyc}(G) \neq ۱$ در این صورت $\mathrm{cyc}(G)$ شامل یک عنصر غیر بدیهی از مرتبه متناهی مانند c باشد، دراین‌صورت $< c,x >$ برای عضوی مانند $a \in G$ دوری است. به طوری که $< c,x > = < a >$.

لذا اگر a از مرتبه متناهی باشد، آن گاه x نیز از مرتبه متناهی است که تناقض می باشد.

اگر a از مرتبه نا متناهی باشد، آن گاه c نیز باید از مرتبه نا متناهی باشد که این تناقضی دیگر است.

حال اگر $\mathrm{cyc}(G)$ شامل یک عنصر از مرتبه نا متناهی مانند d باشد، آن گاه $< y,d >$ دوری است که مانند روند فوق به تناقض می رسیم. از این رو $\mathrm{cyc}(G) = ۱$.

۵.فرض کنیم (برهان خلف) که $x \in C(G) \setminus \mathrm{cyc}(G)$ وجود داشته باشد. در این صورت عضوی مانند $y \in G$ موجود است به طوری‌که $< x,y >$ یک گروه آبلی غیر دوری است.

از طرفی بنابر فرض عنصری غیر بدیهی مانند $a \in \mathrm{cyc}(G)$ موجود است.

قرار می‌دهیم $H =< a, x, y >$. لذا H یک گروه آبلی غیر دوری است. ولی $< a, x >$ و $< a, y >$ دوری‌اند.
فرض کنیم برای اعضایی مانند $z, z' \in G$، $< a, x >=< z >$ و $< a, y >=< z' >$. لذا

$$H =< a, x, y >=< z, z' >\cong A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

داریم

$$\mathrm{cyc}_A((۱, ۰)) =< (۱, ۰) >$$

و

$$\mathrm{cyc}_A((۰, ۱)) =< (۰, ۱) > .$$

در نتیجه

$$\mathrm{cyc}_A((۰, ۱)) \cap \mathrm{cyc}_A((۱, ۰)) = ۱.$$

لذا $\mathrm{cyc}(A) = ۱$. پس $\mathrm{cyc}(H) = ۱$ که تناقض می‌باشد، زیرا $a \in \mathrm{cyc}(H)$ و $\mathrm{cyc}(G) = C(G)$.
حال فرض می کنیم $C(G)$ بخش پذیر است و y یک عضو دلخواه از G باشد، آن‌گاه $< a, y >$ دوری است. به ازای عضوی مانند $g \in G$، $< a, y >=< g >$. لذا به ازای برخی اعداد صحیح m و n، $a = g^n$ و $y = g^m$. در نتیجه

$$y^n = g^{nm} = a^m \in< a >\subseteq C(G).$$

لذا به ازای برخی عدد صحیح غیر صفر n، $y^n \in C(G)$. حال چون $C(G)$ بخش پذیر است، به ازای برخی $z \in C(G)$، $y^n = z^n$ در نتیجه $(yz^{-۱})^n = ۱$ ولذا $yz^{-۱} = ۱$، زیرا بنا به فرض G بدون تاب است. لذا $y = z \in C(G) = \mathrm{cyc}(G)$. بنابراین $G = C(G) = \mathrm{cyc}(G)$. □

۲.۲ برخی خواص گراف غیر دوری

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه غیر موضعاً دوری باشد گراف Γ_G را به G وابسته می‌کنیم (که گراف غیر دوری از G نامیده می‌شود) با توجه به منبع اصلی [۱] با مجموعه رأس‌های زیر مشخص می‌شوند،

$$V(\Gamma_G) = G \setminus \mathrm{cyc}(G).$$

مجموعه‌ی یال‌ها برابر است با

$$E(\Gamma_G) = \{\{x, y\} \subseteq V(\Gamma_G) \mid \langle x, y\rangle \text{دوری نیست}\}.$$

توجه کنید که درجه یک رأس $x \in V(\Gamma_G)$ در گراف غیر دوری Γ_G برابر است با $|G \setminus \mathrm{cyc}_G(x)|$.

گزاره ۲.۲.۲. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً دوری باشد. در این صورت $\mathrm{diam}(\Gamma_G) = 1$ (یا به طور معادل Γ_G کامل است) اگر و تنها اگر G یک ۲-گروه آبلی مقدماتی باشد.*

برهان. فرض کنیم $\mathrm{diam}(\Gamma_G) = 1$. اگر به ازای عضوی مانند $x \in G \setminus \mathrm{cyc}(G)$، $x \neq x^{-1}$، آن‌گاه چون $< x, x^{-1} >$ دوری است، پس یالی از x به x^{-1} وجود ندارد که تناقض می‌باشد. بنابراین $x^2 = 1$.

حال فرض کنیم $z \in G \setminus \mathrm{cyc}(G)$، $y \in G$، $< x, y >$ لذا به ازای هر $< x, y > \leq < xz, z, y >$ دوری است. در نتیجه $x \in \mathrm{cyc}(G)$، که تناقض است. بنابراین برای هر $x \in G \setminus \mathrm{cyc}(G)$، $xz \in G \setminus \mathrm{cyc}(G)$، لذا $(xz)^2 = 1$ و چون

$$z \in G \setminus \mathrm{cyc}(G) \leq C(G)$$

در نتیجه $x^2 z^2 = 1$ ولذا $z^2 = 1$. بنابراین برای هر $x \in G$، $x^2 = 1$ و در نتیجه G یک ۲-گروه آبلی مقدماتی است.

برعکس: فرض کنیم G یک ۲-گروه آبلی مقدماتی باشد و $x, y \in G$ دو عنصر دلخواه متمایز باشد. در این صورت اگر $< x, y >$ دوری باشد، آن‌گاه چون $O(x) = O(y) = 2$، لذا $< x > = < y >$ و در نتیجه $x = y$ که تناقض می‌باشد. بنابراین در Γ_G به ازای هر دو عضو متمایز $x, y \in G$ ، یالی از x به y موجود است، بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma_G) = 1$ و برهان تمام است. □

تعریف ۳.۲.۲. مرکز ساز یک عضو $x \in G$ را با $C(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C(x) = \{y \in G | xy = yx\}.$$

تعریف ۴.۲.۲. نرمال ساز یک عضو $x \in G$ را با $N(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N(x) = \{y \in G | y^{-1} x y \in < x >\}.$$

عضو همانی گروه G را به‌وسیله e نشان می‌دهیم و $G \setminus \{e\}$ را به‌وسیله $G^{\times}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۲.۲. *گروه G در برابری زیر برای هر $x \in G^{\times}$ صدق می‌کند،*

$$< x > = \mathrm{cyc}(x)$$

اگر و تنها اگر هر عضو $x \in G^{\times}$ از مرتبه عدد اول باشد.

برهان. فرض کنیم $x \in G^{\times}$ که مرتبه x عدد اول نمی‌باشد. فرض کنیم عددی مانند k موجود است که k مرتبه‌ای از x را عاد می‌کند در این صورت $x^k \neq e$ و $x \in \mathrm{cyc}(x^k)$ پس $< x, x^k > = < x >$. اما $x \notin < x^k >$، لذا $< x^k > \neq \mathrm{cyc}(x^k)$.

برعکس: فرض کنیم هر عضو غیر بدیهی G از مرتبه عدد اول است، در این صورت هر عضو غیر بدیهی x از G شامل دقیقاً یک زیرگروه دوری از G است که $< x >$ نامیده می‌شود. بنابراین $\mathrm{cyc}(x) = < x >$. □