دانشگاه مازندران
دانشکده علوم‌پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد فیزیک
گرایش ذرات بنیادی

عنوان:

ابرجبر و نوسانگر هارمونیک با ثابت خمیده مثبت و نوسانگرهای غیرخطی

استاد راهنما:

دکتر جعفرصادقی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا پهلوانی

نگارش:

حمزه معیری

تیر ماه ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیر و تشکر

شایسته است از استاد راهنمایم، جناب آقای دکتر صادقی، بخاطر پیشنهادات و راهنمایی‌های ارزشمندشان و همچنین از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر پهلوانی بخاطر همراهی در امر تحقیق، تشکر نمایم.

از دوستان عزیزم آقایان حسین آکو، حامد مویدی، سید علی حسینی، محمد سجادی، قاسم و وحید آلودری، رحمان کشاورزی، علی آقا محمدی، علی محمدزاده و علی بنی‌جمالی قدردانم که نه‌تنها مشوقم بودند بلکه هر لحظه در کنارشان را همچون خاطره‌ای ماندگار در ذهنم تکرار می‌کنم و آرزوی سربلندی برای آقای شهریار میرزایی دارم که همچون برادری بزرگوار حامی بنده بوده‌اند و سلامت و شادابی را برای مادر و دو برادر مهربانم آرزومندم.

تقدیم به او که

دوستش دارم

چکیده

در این پایان‌نامه، در ابتدا ابرتقارن، پاراابرتقارن و جبرمربوطه‌اش را تعریف می‌کنیم و سپس توضیح اجمالی پیرامون فضای خمیده و شیوه بدست آوردن عملگر لاپلاس بلترامی خواهیم داشت. بعد از آن معادله شرودینگر را برای نوسانگر همسانگرد در سه بعد فضایی با خمیدگی مثبت ثابت بررسی می‌کنیم و حل‌هایی توصیف شده برای آن را در مختصات کروی پایه ریزی می‌کنیم. با مقایسه معادله شرودینگر نوسانگر هارمونیک در فضای مثبت ثابت با چندجمله‌ای ژاکوبی وابسته، طیف انرژی و تابع موج آنرا بدست می‌آوریم. معادله ژاکوبی وابسته، به ما در فاکتورگیری معادله شرودینگر برای نوسانگر همسانگرد کمک می‌کند. معادله مرتبه اول بدست آمده از فاکتورگیری ما را به تعریف عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده هدایت می‌کند. این عملگرها ساختار ابرتقارنی هستند که به هامیلتونین‌های شریک، وابسته‌اند و بدین طریق ما ابربارهای مربوطه را بدست می‌آوریم. سپس به سراغ نوسانگر هارمونیک غیرخطی یک بعدی می‌رویم. آنگاه به مقایسه‌اش با نوسانگر همسانگرد در فضای خمیده مثبت می‌پردازیم. خواهیم دید که در حالتی خاص این دو نوسانگر متفاوت رفتار یکسانی خواهند داشت. سرانجام با استفاده از جبر ابرتقارنی، پتانسیل‌های شریک و ابرپتانسیل‌ها را بدست می‌آوریم. این ابرپتانسیل‌ها منجر به بدست آوردن ابربارهای مربوطه می‌شود. در پایان نیز یک جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از بحث ارائه خواهد شد.

برونسکی:

"کل علم عبارت است از جستجوی وحدت در شباهتهای پنهان"

عنوان | صفحه

فصل اول

تقارن، ابر تقارن و پارا ابر تقارن

مقدمه

برای رسیدن به یک وحدت بزرگ راه‌های مختلفی وجود دارد، که یکی از آنها مسئله‌ی تقارن است. از این‌رو در بررسی موجود اول مسئله تقارن در فیزیک را مطرح می‌کنیم. امروزه عقیده بر این است که تقارن یکی از بهترین روش‌ها در شناخت قوانین طبیعت است. در فیزیک می‌توان گفت جسم یا سیستمی دارای تقارن است، که تحت یک تبدیل ناوردا باشد، و یا تقارن حرکتی است که تحت آن، در وضعیت کلی یک جسم یا سیستم تغییری حاصل نشود. هر خاصیت یا هر رابطه بین بردارها و تانسورها که در تمام دستگاههای مختصاتی به صورت جبری، یکسان بیان شوند، دارای یک معنی هندسی هستند که از دستگاه مختصات مستقل است که آنرا خاصیت یا رابطه "ناوردا" گویند.

مثلا یک کره تحت هر نوع حرکت چرخشی حول مرکز خود ناوردا است. نظریه‌های فیزیکی هم می‌توانند تقارن‌هایی از این قبیل داشته باشند، ولی آنچه بعد از یک حرکت ناورداست، قوانین

ریاضی نظریه فیزیکی است و نه یک جسم یا یک سیستم. تقارن توسط شاخه‌ای از ریاضیات به‌نام نظریه گروه‌ها توصیف می‌شود. در این باب هوارد جورجی[1] می‌گوید:

"تقارن ابزاری است که می‌بایستی برای محاسبه دینامیکهای اساسی به‌کار برده شود تا به نوبت در مورد موفقیت یا ناتوانی مباحث تقارن توضیح دهد. تئوری گروه یک تکنیک مفید می‌باشداما یک جانشین برای فیزیک نیست."

قبل از همه بایستی ارتباط تقارن را با فیزیک و کمیت‌های مشاهده‌پذیر فیزیکی برقرار سازیم. کمیت‌هایی هستند که بعد از تبدیلات مختلف تغییر نمی‌کنند، این کمیت‌ها را کمیت‌های پایستار می‌نامند. شناسایی کمیت‌های پایستار از اهمیت خاصی برخوردار است. راه‌های مختلفی برای یافتن آنها وجود دارد و یکی از آنها روش تقارن است.

ارتباط تقارن و کمیت‌های پایستار را قضیه‌ای به‌نام قضیه نوتر[2] بیان می‌کند. طبق این قضیه اگر در هر تبدیل پیوسته متقارنی چگالی نرده‌ای لاگرانژی و معادلات میدان یک سیستم ناوردا باشند، در آن‌صورت کمیت پایستاری موجود است. مثلا یک تقارن چرخشی به پایستاری تکانه زاویه‌ای منجر می‌شود.

تقارن‌های اصلی در فیزیک بر دو نوعند، تقارن‌های سراسری و تقارن‌های موضعی که هرکدام به نوبه خود می‌توانند تقارن‌هایی از نوع خارجی یا داخلی باشند. منظور از تقارن‌های خارجی و داخلی به این معنی است که فرایند حرکت در زمان-مکان انجام می‌گیرد، و یا اینکه اصولا به زمان-مکان مربوط نیست. بلکه در فضای کاملا «تجریدی[3]» که هیچ نوع ارتباطی با فضای معمولی

[1]Howard Georgi:

.

[2]. Noether's theorem
[3] . Abstract

ندارد، انجام می‌گیرد. تقارن سومی که از ترکیب تقارن‌هـای داخلـی و خـارجی حاصـل مـی‌شـود، «ابرتقارن[1]» نام دارد.

نخست تقارن سراسری را بررسی می‌کنیم: برای مثال تقارنی که بین دو ناظر با دو دستگاه مختلـف که پدیده‌های الکترومغناطیسی را مطالعه می‌کنند، درنظر می‌گیریم. هر دوی آنها دارای سرعت ثابت نسبی می‌باشند و محورهای مختصاتی را در دستگاه خود مشخص نموده‌انـد. البتـه جهـت و مبـدا محورهای مختصات دوگانه یکسان نیـستند. بنـابراین دو نـاظر حـوادث خـارجی را از محورهـای مختصات مختلفی مطالعه می‌کنند. به‌نظر می‌رسد که اندازه‌گیری‌های آنها کاملا متفاوت باشـد ولـی اگر اندازه‌گیری‌های آنها به قوانین فیزیکی محدود شوند، درآن‌صورت هر دوی آنها بـه ایـن نتیجـه می‌رسند که معادلات ماکسول معتبرند.

اصولی که در آزمایش فوق نشان داده شد، ناوردای پوانکاره نام دارد، که بیانی از تقارن زمان–مکان است و اساس نسبیت خاص را تشکیل می‌دهد. ناوردای پوانکاره بیان مستقیم فرض اثبات شـده‌ای است که می‌گوید: تمام قوانین فیزیکی برای هر دو دستگاه مختصات دلخواه یکسان خواهد بود، به شرط اینکه جابجایی و چرخش آنها با سرعت ثابتی نسبت به هم انجام گیرد، امـا تقـارن موضـعی مستلزم دارا بودن شرایط سخت و دقیق نظری است و وحدت عمیقی را در طبیعت نشان می‌دهـد. در عمل گذر از تقارن سراسری به تقارن موضـعی اسـاس نیروهـای گـرانش و الکترومغنـاطیس را تشکیل می‌دهد و این دلیل خوبی است بر این حدس که نیروهای دیگر هم از یک تقـارن موضـعی ناشی می‌شوند. تقارن موضعی مربوط به مثال بالا، معادل این اسـت کـه دو نـاظر در سیـستم‌هـای شتابدار نسبت به هم حرکت کنند. ظاهرا دو ناظر نمی‌توانند به قوانین فیزیکی یکسانی برسند زیـرا

[1] .Supersymmetry

که یک ناظر شتاب‌دار نیروهایی مثل نیروی گریز از مرکز را نیز مشاهده می‌کند. تاکید می‌کنیم که تقارن موضعی الکترومغناطیسی، یک تقارن داخلی است.

تقارن موضعی الکترومغناطیسی برعکس ناوردایی پوانکاره که یک تقارن خارجی است، شامل تغییراتی در مختصات زمان–مکان نمی‌شود. یکی دیگر از تقارن های داخلی تقارن ایزواسپین است. این تقارن، رابطه‌ای بین پروتون و نوترون را بوجود می‌آورد. از خواص تقارن‌های داخلی این است که ذرات با اسپین یکسان را با یکدیگر مربوط می‌کند. تقارن‌های داخلی می‌توانند به ما در دسته‌بندی ذرات بر حسب ویژگیهای ذاتی‌شان کمک کند.

یکی از مشکلات فیزیک نظری پیدا کردن تقارنی بوده که ذرات با اسپین همسایه را به همدیگر مربوط کند. این رویا با پیدایش ابرتقارن واقعیت پیدا می‌کند. ابرتقارن ذرات با اسپین همسایه مثل ۱ و۱/۲ را به همدیگر مربوط می‌کند.

جبری که در ابرتقارن بکار می‌رود یک ابر جبر لی[1] است که تحت ترکیبی از روابط جابجایی و پادجابجایی بسته است. یکی از پیش‌گویی‌های مهم نظریه ابرتقارن، وجود تقارن بین کوارک‌ها و لپتون‌ها با همتاهای بوزونی آنهاست و نیز بین بوزون‌های پیمانه‌ای و همتاهای فرمیونی آنهاست. این نظریه برای همه‌ی همتاهای ابرتقارنی جرم‌های یکسان پیشنهاد می‌کند.

بی‌شک اولین ریاضی‌دانی که با ابر ریاضیات مواجه گردید، برزین بود . او در اوائل دهه ٦٠ میلادی بطور همزمان طرحی برای توصیف میدانهای بوزونی و فرمیونی ریخت و به این نتیجه رسید که یک شباهت نابدیهی در آنالیز آنها وجود دارد. هفت سال بعد اولین مقالات درزمینه ابر ریاضیات ارائه گردید.در همین زمانها بود که واژه ابر (super) بر روی برخی از گروهها نهاده شد. لازم به ذکر است که قبل از ۱۹۷٤ و در برخی مقالات اخیر از واژه جبر لی درجه بندی شده (graded

[1] . Super Lie Algebra

Lie algebra) بجای ابر جبر استفاده شده است ولی ترجیح می‌دهیم که از ابر جبر لی استفاده کنیم، بدلیل آنکه جبر لی درجه بندی شده کلمه مناسبی نیست چون ابر جبر لی، جبر لی نیست. با وجود همه‌ی زیباییهای این نظریه تجربه‌ای گواه بر وجود ابرتقارن در طبیعت مشاهده نشده است. در حال حاضر ابرتقارن در مکانیک کوانتومی در شاخه‌های مختلف مانند فیزیک هسته‌ای، نور، ذرات بنیادی و ... به‌کار می‌رود[1-4].

ابر تقارن

در سالیان اخیر، ایده‌ی ابرتقارنی به‌صورت مفیدی برای مسائل کوانتوم‌مکانیکی غیرنسبیتی بکاربرده شده است. به‌خصوص حالا فهم عمیق‌تری از اینکه چرا پتانسیل‌های خاص به‌صورت تحلیلی حل‌پذیر و یک آرایه از روش‌های تقریبی جدید قدرتمند برای حل کردن پتانسیل‌هایی که به‌صورت دقیق حل‌پذیر نیستند وجود دارد. پتانسل‌های حل‌پذیر آشنا همگی خاصیت شکل‌ناوردایی را دارا می‌باشند.

فیزیک‌دانها تلاش‌های بسیاری برای بدست آوردن توصیف یکتایی همه‌ی برهم‌کنش‌های اساسی طبیعت، قوی، الکتروضعیف و برهم‌کنش‌های گرانشی انجام دادند. در تلاش‌هایی که در دو دهه اخیر انجام شده است، فهمیده‌اند که ابرتقارنی (SUSY) جزء لازم برای ایجاد این یکتایی می‌باشد. ابرتقارنی ارتباط‌دهنده‌ی درجات آزادی بوزونی و فرمیونی می‌باشد. همانطور که گفته شد جبر دربردارنده‌ی آن یک ابرجبر لی می‌باشد که تحت این ترکیب از روابط جابجایی و پادجابجایی بسته می‌باشد. در ریاضیات ابرجبر لی تعمیمی از جبر لی می‌باشد که شامل مرتبه‌ی Z_2 است. در اغلب این نظریه‌ها مولفه‌های زوج ابرجبرها مطابق با بوزون‌ها و مولفه‌های فرد برای فرمیون‌ها می‌باشد که

در ابتدا در مدل‌های ریسمان برای یکی کردن بخش‌های بوزونی و فرمیونی معرفی شده بود. گـروه لی گروهی است که هریک از مولفه‌هایش بوسیله مجموعه‌ی پارامترهای پیوسـته بـا قـانون ضـرب مشخص شده است که بطور یکنواخت روی پارامترها وابسته است. هر نمایش یک گروه لی فشرده با یک نمایش توسط عملگرهای یکانی متحد می‌باشد. مثلا در $SU(3)$ تئوری پیمانه‌ای گلوئونها را در نظر بگیرید. با اضافه کردن یک هشتایی بدون جرم و بدون رنگ از ذرات اسپین $1/2$ مـی‌تـوان مدل را ابر متقارن کرد. این دسته هشت تایی گلوئینو نامیده شده‌اند. اگر مدل ما علاوه بـر گلوئونهـا شامل کوارکها هم باشد باید همراه مربوط به آنها را نیز اضافه کنیم. که به آنها اسکوارک (که دارای اسپین صفر هستند) می‌گوئیم. کلا اگر عملگرهای ابر تقـارن روی فرمیونهـا اثـر کننـد همـراه آنهـا اسفرمیون و اگر روی بوزونها اثر کنند همـراه آنهـا بوزینـو نـام دارد.در واقـع بوزونهـا و فرمیونهـا حالتهای مختلف از یک فضای هیلبرت هستند.

بالا خره در سال ۱۹۷۳ برای نخستین بار وس[1] و سومینو[2] یک مدل ابر تقارن بـا یـک ذره اسـپین $1/2$ و دو ذره با اسپین صفر که با تبدیلات تقارنی با هم مربوط بودند، معرفی کردند. اگر بخواهیم تاریخی برای تولد ابر تقارن ذکر کنیم بدون شک همان تولد مدل WZ است. عملگر تقارنی در این مدل فرمیونی با اسپین $1/2$ بود که وقتی روی حالتهایی با اسپین J اثر مـی‌کـرد ترکیـب خطـی از اسپینهای $J+1/2$ و $J-1/2$ را بدسـت مـی‌داد. ایـن عملگرهـا از روابـط پـاد جابجـایی پیـروی می‌کردند.

گرانش بوسیله یک تئوری که ابرگرانش نامیده می‌شود، ابرتقارنی می‌گردد.. در چنین تئوری‌هـایی، تئوری نسبیت عام انیشتین ثابت می‌کند که نتیجه لازم، ابرتقارنی پیمانه‌ای موضعی می‌باشد بنابراین

[1] Wess
[2] Zumino

تئوری‌های ابرتقارنی موضعی یک چارچوب طبیعی برای یکی‌سازی گرانش با برهم‌کنش‌های اساسی دیگر طبیعت ایجاد می‌کند.

علی‌رغم تمام این تئوری‌های یکی‌شده، تا به‌حال هیچ شاهد تجربی از اینکه ابرتقارن در طبیعت پذیرفته شده باشد وجود ندارد. یکی از پیش‌بینی‌های مهم تئوری‌های ابرتقارنی شکسته‌نشده، وجود شرکای ابرتقارنی کوارک‌ها، لپتون‌ها و بوزون‌های پیمانه‌ای می‌باشد که همان جرم را در همتاهای ابرتقارنی خود دارند. این حقیقت که هیچ‌یک از چنین ذرات دیده نشده است ثابت می‌کند که ابرتقارنی می‌بایستی به‌صورت آنی شکسته شود. یک ایده برای شکست ابرتقارنی در عالم این بود که به هامیلتونی اولیه عالم جمله‌ای اضافه شده مثل حالت اختلالی، که باعث شکسته شدن این ابرتقارن گردیده است. برای بررسی ایده‌ی شکست ابرتقارنی غیراختلالی در ابتدا ساده‌ترین مورد یعنی مکانیک کوانتومی ابرتقارنی مورد بررسی قرار گرفته شد.

در روزهای اول ابرتقارن در مکانیک کوانتومی به‌صورت یک پایه‌ی تست‌کننده برای روش‌های غیراختلالی شکستن ابرتقارنی در تئوری میدان استفاده می‌شد اما بعد از آن دانشمندان شروع به مطالعه جنبه‌های مختلف مکانیک کوانتومی ابرتقارنی کردند اما این نه‌تنها به‌عنوان یک مدل برای تست روش‌های تئوری میدان مناسب بود بلکه خود نیز نتایج جالبی را دربرداشت. در مکانیک کوانتومی ابرتقارنی یک درک ساده از جبر ابرتقارنی شامل عملگرهای بوزونی و فرمیونی می‌باشد. به‌دلیل ماهیت جابجاپذیری عملگرهای فرمیونی با هامیلتونی می‌توان یک رابطه خاص بین ویژه‌مقادیر انرژی، ویژه‌توابع و ماتریس‌های S– از بخش‌های مولفه‌های هامیلتونی SUSY[1] کامل را بدست آورد. در همان زمان کارهای گوناگونی ایده‌ی SUSYQM[2] را به ابعاد بالاتر و سیستم‌هایی با تعداد ذرات بیشتر برای فهم مسائل پتانسیلی جذاب‌تر در موضوعات فیزیک

[1]. Super Symmetry
[2]. Super Symmetry Quantum Mechanic

هسته‌ای، اتمی، آماری و ماده‌چگال بسط داد. در سال ۱۹۸۳ مفهوم یک پتانسل شکل‌نـاوردا (SIP) در ساختار SUSYQM بوسیله گندشتاین[1] ارائه شد که تا چندین سال به این مقاله روسی توجـه چندانی نشد. یک پتانسیل، شکل‌ناوردا نامیده می‌شـود اگـر پتانـسیل شـریک ابرتقـارنی‌اش همـان بستگی خاص به‌صورت پتانسیل مبدا با امکان پارامترهای تغییریافته یا اصلاح‌شده را داشـته باشـد. اخیرا نشان داده شده که برای هر SIP طیف ویژه‌مقدار انرژی می‌تواند تعیین شود. کمی بعـد یـک لیست از پتانسیل‌های شکل‌ناوردا بدست آمد که مشاهده شد مـی‌تـوان ویـژه‌توابـع انـرژی بعـلاوه ماتریس پراکندگی مربوطه‌شان را به‌صورت جبری تعیین کرد. بزودی فهمیـده شـد کـه فرمالیـسم SUSYQM بعلاوه شکل‌ناوردایی (که با انتقال‌هایی از پارامترهـا ارتبـاط دارد) از ابتـدا بـا روش فاکتورگیری Infeld و Hull مرتبط بوده است. شاید در اینجا مناسب باشد که گریـزی بـه تـاریخ روش فاکتورگیری بزنیم. روش فـاکتورگیری در ابتـدا توسـط شـرودینگر بـرای حـل مـسئله اتـم هیدروژن به‌صورت جبری معرفی شد. در ادامه Infeld و Hull این روش را تعمیم دادنـد و یـک کلاس عریض از پتانسیل‌های حل‌پذیر با درنظرگرفتن ٦ شکل مختلف فاکتورگیری بدست آوردند. ثابت شد که روش فاکتورگیری و روش‌های SUSYQM که شامل شـکل‌نـاوردایی اسـت هـردو فرمول‌بندی دوباره‌ای از ایده‌ی ریکاتی[2] از کاربرد تعادل بین حل‌های معادله ریکاتی و یـک معادلـه دیفرانسیلی خطی مرتبه دوم وابسته، می‌باشد. یک طبقه‌بندی جزئی از پتانسیل‌های شکل‌ناوردا یـک انتقال پارامترها را دربردارد که بوسیله کوپر[3] انجام شده است. ارتباط میان ابرتقارن، شکل‌ناوردایی و پتانسیل‌های حل‌پذیر همچنین در مقاله‌ی کوپر بحث شد بطوریکه نشان مـی‌دهنـد شـکل‌نـاوردایی

[1]. Gendenshtein
[2] .Riccati
[3] .Cooper

هرچندکه برای حل‌پذیری کافی است ولی لازم نیست یعنی اگر شکل‌ناوردا بود حل‌پذیر است ولی برای حل‌پذیری وجود شکل‌ناوردایی لازم نیست.

فرمول‌بندی هامیلتونی مکانیک کوانتومی ابرتقارنی

یکی از اجزای کلیدی در حل دقیق مسائل پتانسیلی یک‌بعدی، ارتباط میان توابع موج حالت مقید و پتانسیل می‌باشد. درابتدا معمولا متوقع نیستیم که تابع موج حالت پایه را بشناسیم (یا هرتابع موج حالت مقید دیگر را) بنابراین هرکسی پتانسیل را به‌صورت دقیق می‌شناسد. اجازه دهید انرژی حالت پایه برای یک لحظه برابربا صفر انتخاب شود، بنابراین از معادله شرودینگر می‌دانیم که حالت پایه تابع موج $\psi_0(x)$ تبعیت می‌کند از

$$H_1\psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + V_1(x)\psi_0(x) = 0 \qquad (۱-۱)$$

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)} \qquad (۲-۱)$$

که یک بازسازی کلی پتانسیل $V_1(x)$ از اطلاعات تابع موج حالت پایه خود را مجاز می‌شمارد که هیچ گره‌ای ندارد. حال به آسانی می‌توانیم از فاکتورگیری هامیلتونی استفاده کنیم.

$$H_1 = A^\dagger A \qquad (۳-۱)$$

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x), A^\dagger = \frac{-\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x) \qquad (٤-۱)$$

این امر به ما اجازه می‌دهد که تعریف کنیم

$$V_1(x)=W^2(x)-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) \tag{۵-۱}$$

معادله بالا به معادله ریکاتی معروف می‌باشد. کمیت $W(x)$ به‌صورت کلی به «ابرپتانسیل» در مقالات SUSYQM برمی‌گردد. جواب $W(x)$ درخصوص حالت پایه تابع موج:

$$W(x)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \tag{٦-۱}$$

این جواب بوسیله تشخیص اینکه $A\psi_0=0$ بدست می‌آید. به‌صورت خودکار یک جواب با $H_1\psi_0=A^\dagger A\psi_0=0$ داریم. قدم بعدی در ساختن تئوری ابرتقارنی وابسته به هامیلتونی H_1 اولیه تعریف اپراتور $H_2=AA^\dagger$ است که با معکوس کردن مرتبه A و $A^\dagger$ بدست می‌آید. یک ساده‌سازی کوچک نشان می‌دهد که اپراتور H_2 در حقیقت یک هامیلتونی مطابق با یک پتانسیل جدید $V_2(x)$ می‌باشد

$$H_2=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V_2(x)\ ,\ V_2(x)=W^2(x)+\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) \tag{۷-۱}$$

پتانسیل‌های $V_1(x)$ و $V_2(x)$ به‌عنوان پتانسیل‌های شریک ابرتقارنی شناخته شده‌اند. آخرین نکته این است که مقادیر ویژه انرژی H_1 و H_2 مثبت و خوش‌تعریف می‌باشند ($E_n^{(1,2)}\geq 0$).

برای $n>0$ معادله شرودینگر برای H_1

$$H_1\psi_n^{(1)}=A^\dagger A\psi_n^{(1)}=E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} \tag{۸-۱}$$

ثابت می‌کند که

$$H_2(A\psi_n^{(1)})=AA^\dagger A\psi_n^{(1)}=E_n^{(1)}(A\psi_n^{(1)}) \tag{۹-۱}$$

به‌صورت ساده معادله شرودینگر برای H_2

$$H_2\psi_n^{(2)} = AA^\dagger\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)} \qquad (۱۰-۱)$$

ثابت می‌کند که

$$H_1(A^\dagger\psi_n^{(2)}) = A^\dagger AA^\dagger\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}(A^\dagger\psi_n^{(2)}) \qquad (۱۱-۱)$$

از معادلات ۸ و ۱۱ و این حقیقت کـه $E_0^{(1)} = 0$، واضـح اسـت کـه مقـادیرویژه و ویـژه‌توابـع دو هامیلتونی H_1 و H_2 وابسته‌اند با

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad , \quad E_0^{(1)} = 0 \qquad (۱۲-۱)$$

$$\psi_n^{(2)} = \left[E_{n+1}^{(1)}\right]^{-1/2} A\psi_{n+1}^{(1)} \qquad (۱۳-۱)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = \left[E_n^{(2)}\right]^{-1/2} A^\dagger\psi_n^{(2)} \qquad (۱٤-۱)$$

توجه کنید که $\psi_{n+1}^{(1)}$ ($\psi_n^{(2)}$) از H_1 (H_2) بازبهنجار شده است بنابراین تابع‌موج $\psi_n^{(2)}$ ($\psi_{n+1}^{(1)}$) در معادله ۱۳ و ١٤ نیز بازبهنجار شده است. بعلاوه عملگر A ($A^\dagger$) نه‌تنها یک ویژه تابع H_1 (H_2) را به یک ویژه‌تابع H_2 (H_1) با همان انرژی تبدیل می‌کند، بلکه یک ابرگره[1]در ویژه‌تابع نیـز، فنـا (خلق) می‌کند. چون تابع‌موج حالت پایه H_1 با عملگر A فنا می‌شود، این حالت پایه‌ی H_1 هـیچ شریک SUSY ندارد. بنابراین شکلی که ما بدست می‌آوریم ایـن اسـت کـه از اطلاعـات همـه‌ی ویژه‌توابع H_1 ما می‌توانیم ویژه‌توابع H_2 را با اسـتفاده از عملگـر A تعیـین کنـیم و بـه‌صـورت معکوس با استفاده از $A^\dagger$ ما می‌توانیم همه‌ی ویژه‌توابع H_1 را از همه‌ی آنهایی که از حالـت پایـه H_2 انتظار داریم بازسازی کنیم. این را در شکل (۱) نشان داده‌ایم. دلیل اساسی برای تبهگنی طیف H_1 و H_2 به‌سادگی از خصوصیات جبر ابرتقارنی می‌تواند فهمیده شود.

ما می‌توانیم یک ماتریس هامیلتونی ابرتقارنی به شکل زیر درنظر بگیریم

[1]. Extra node