**دانشگاه یزد**

**دانشکده ریاضی**

**گروه ریاضی کاربردی**

# پایان‌نامه
# کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

# مسائل مقدار ویژه‌ی معکوس درجه دوم و کاربردهای آن

**استاد راهنما:** دکتر سید مهدی کرباسی

**استاد مشاور:** دکتر سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی

**پژوهش و نگارش:** فرزانه حسن زاده

**شهریور ماه ۱۳۹۳**

پیش کشی به محضر سبز آفتاب پنهانی

و تقدیم به

پروانه های بی قرار زندگیم، پدر، مادر و همسرم و

همه آن هایی که می خواهند بیش تر بدانند.

## با سپاس

سپاس و ستایش خدای یگانه و مهربانی که وجودمان را آکنده از عطش پویایی و دانش پژوهی ساخت. حمد و ثنا خدایی را که عشق به علم و پژوهش را در وجودمان نهاد و بدان طراوت بخشید. امید آن دارم که با لطف و عنایت خویش رهروی صادق برای راهش و خادمی برای خلقش باشم. در این میان شایسته است به پاس زحمات بی دریغ استاد گرامی ام، جناب آقای دکتر کرباسی که در نهایت لطف و بزرگواری، با قبول راهنمایی این پایان نامه افتخار بزرگی را نصیب اینجانب کردند و تدوین و تحقیق این پایان نامه مرهون راهنمایی و شکیبایی ایشان است، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم؛ دلسوزی ها و همیاری های ایشان را ارج می نهم. از جناب آقای دکتر شاهزاده فاضلی که در سمت استاد مشاور با مساعدت بی دریغشان نقطه ی عطفی در مسیر موفقیت اینجانب بودند تشکر می نمایم. از کلیه ی اساتید دلسوز و بزرگوار گروه ریاضی دانشگاه یزد به خاطر زحماتی که در طول دوره ی تحصیل متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از تنها سرمایه های زندگی ام، پدر بزرگوار، مادر عزیز و همسر مهربانم که هرچه امروز دارم از دعای خیر ایشان است و همواره قوت قلبی برای ادامه ی راهم بوده اند، تشکری ویژه و صمیمانه دارم. از آقای فردین پرویزپور به خاطر هم فکری ها و مساعدتشان سپاس گزارم و از درگاه ایزد منان برای همه ی این عزیزان و تمام بزرگوارانی که نامشان آورده نشد ولی یادشان همواره باقی است، توفیق روزافزون و سلامتی آرزومندم.

فرزانه حسن زاده

## چکیده

مسائل مقدار ویژه، به دو دسته تقسیم می‌شوند: مسائل مقدار ویژه مستقیم درجه دوم و مسائل مقدار ویژه معکوس درجه دوم. مسئله مستقیم، زمانی که ماتریس ضرایب، داده شده باشد به دنبال یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه است. برعکس، مسئله معکوس با داشتن اطلاعات ویژه‌ای از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، ضرایب ماتریسی را بازسازی می‌کند. این پایان‌نامه به یافتن جواب‌های مسئله مقدار ویژه معکوس درجه دوم اختصاص دارد. این جواب‌ها به‌صورت ماتریس‌های متقارن حقیقی $(M, C, K)$ با ابعاد $n \times n$، با $M$ نامنفرد می‌باشند؛ با توجه به اطلاعات طیفی داده شده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، شرایط لازم و کافی برای حل‌پذیری مسئله بررسی می‌شود. هم‌چنین الگوریتم ساخت ماتریس‌های فوق و مثال‌های عددی از این مسائل را ارئه می‌دهیم.

# فهرست مطالب

# مقدمه

حل مسئله مقدار ویژه درجه دوم $(QEP)$[۱] برای بعضی داده‌های ویژه‌ی معلوم، در بسیاری از کاربردها یک مسئله‌ی چالش برانگیز است. به همین علت، تلاش‌های زیادی در رابطه با $(QEP)$ انجام شده، که مقالات زیادی را به خود اختصاص داده است. نتایج این بررسی‌ها در مرجع [۱۴]، هم‌چنین مراجع [۱۰، ۱۱] ارائه شده است. در [۲۱] تیشویر و میربرگن[۲] بسیاری از کاربردها، خصوصیات ریاضی و انواع روش‌های عددی $(QEP)$ را بررسی کرده‌اند. بسیاری از مسائل فیزیکی نیاز دارند که ضرایب ماتریسی $(M, C, K)$ حقیقی و متقارن، با $M$ نامنفرد باشند. جواب‌های مسئله مقدار ویژه معکوس درجه دوم $(QIEP)$[۳]، به‌صورت ماتریس‌های متقارن حقیقی $(M, C, K)$ با ابعاد $n \times n$، با $M$ نامنفرد می‌باشند؛ به‌گونه‌ای که چند جمله‌ای ماتریسی درجه دوم $Q(\lambda) = \lambda^{2} M + \lambda C + K$، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی از پیش تعیین شده‌ای داشته باشد.

به‌طور کلی، دو حالت از مسئله مقدار ویژه وجود دارد که عبارتند از:

الف) **مسئله مستقیم**: مسئله مستقیم اطلاعات طیفی را تجزیه و تحلیل می‌کند. از این رو در مسائل مستقیم، رفتار دینامیکی دستگاه براساس پارامترهای فیزیکی از قبل مشخص شده‌ای مانند: جرم، طول، مقاومت خودالقایی، چگالی، ویژگی‌های کشسانی و ظرفیت الکتریکی مطالعه می‌شود. مسئله مستقیم، زمانی که ماتریس ضرایب، داده شده باشد به دنبال پیدا کردن جفت ویژه‌ی $(\lambda, x)$ می‌باشد.

ب) **مسئله معکوس**: مسئله معکوس به بیان درستی، تخمین یا تعیین پارامترهای دستگاه براساس رفتار مشاهده شده یا مورد انتظار آن، می‌پردازد؛ در یک مسئله معکوس، ماتریس‌های $(M, C, K)$ را به ازای جفت ویژه‌ی داده شده $(\lambda, x)$ چنان می‌یابیم که $Q(\lambda)x = 0$.

به‌طور خلاصه مسئله مستقیم به بررسی رفتار دینامیکی دستگاه بر اساس پارامترها می‌پردازد در حالی که مسئله معکوس، بیان پارامترها بر اساس رفتار دینامیکی دستگاه می‌باشد. هر دوی این مسائل در کاربردهایشان مهم تلقی می‌شوند.

---

۱ Quadratic eigenvalue problem

۲ F. Tisseur and K. Meerbergen

۳ Quadratic inverse eigenvalue problem

$QIEP$، دارای کاربردهای متنوعی در علوم مختلف از جمله: نظریه‌ی کنترل[۴]، نظریه‌ی ارتعاش[۵]، طراحی سازه‌ها[۶]، شبکه‌های عصبی[۷]، مکانیک سیالات[۸]، نوسان‌های صوتی[۹]، پردازش سیگنال[۱۰] و خواص فیزیکی[۱۱] می‌باشد.

فهرستی از نتایج مطالعات در این زمینه در مراجع [۴]-[۹]، [۱۲، ۱۳]، [۱۵]-[۲۰] [۲۲] ارائه شده‌اند.

در این پایان‌نامه سه مسئله‌ی مهم بررسی می‌شود:

نخست این‌که خواهیم دید $QIEP$ قابل حل است اگر و تنها اگر $r < 2n$ و $\delta > 0$ باشد که در آن $r$ و $\delta$ با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی از پیش تعیین شده، تخمین زده می‌شوند.

ویژگی مهم حاصل از این نتیجه‌گیری این است که $r$ و $\delta$ همیشه قابل محاسبه‌اند. بنابراین شرط لازم و کافی در عمل آسان‌تر بررسی می‌شود.

دوم شرط لازم و کافی برای وجود جواب $QIEP$ با $M$ معین مثبت با راهکاری موثر ارائه می‌شود. این شرایط در این زمینه جدیدند و باید با دقت بیشتری، از این‌گونه مسائل مهم $QIEP$ پرده برداشت.

سوم دو الگوریتم ارائه خواهد شد. الگوریتمی برای حل $QIEP$ و دیگری برای پیدا کردن جواب $QIEP$ با $M$ معین مثبت.مطالب این پایان‌نامه به‌صورت زیر سازماندهی شده است:

در فصل اول به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه می‌پردازیم. فصل دوم به معرفی $QEP$ و $QIEP$ هم‌چنین؛ مختصری از کاربردهای آن اختصاص دارد. در فصل سوم شرط لازم و کافی برای حل‌پذیری $QIEP$، و داشتن جواب با $M$ نامنفرد بیان می‌شود. در فصل چهارم به شرط لازم و کافی برای وجود جواب با $M$ معین مثبت اشاره شده است. فصل پنجم و ششم آن‌چه که به صورت نظری اثبات شده است با پیاده‌سازی الگوریتم‌ها و مثال نشان داده می‌شود. در فصل هفتم به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

---

[۴] Control theory

[۵] Vibration theory

[۶] Structure design

[۷] Neural networks

[۸] Fluid Mechanics

[۹] Vibro-occoustics

[۱۰] Signal processing

[۱۱] Physical properties

# فصل ۱

# مفاهیم و تعاریف اولیه

## ۱.۱ مقدمه

در این فصل، برخی از تعاریف و قضایا که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، به‌طور خلاصه ارائه شده است.

## ۲.۱ انواع ماتریس‌ها و برخی خواص آن‌ها

مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $m \times n$ حقیقی را با $\mathbb{R}^{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

### ماتریس هرمیتی [۱]

ماتریس مربعی $A$ را هرمیتی گویند هرگاه $A = (\bar{A})^T = A^*$. ($A^*$ را ترانهاده مزدوج ماتریس $A$ می‌نامیم ).

**مثال ۱.۱.** ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۷+۸i \\ ۷-۸i & ۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس هرمیتی است.

[۱] Hermitian matrix

## ماتریس جایگشتی[۲]

ماتریس مربعی غیر صفر $P$ را جایگشتی گوییم؛ هرگاه هر سطر و هر ستون، تنها یک عنصر غیر صفر داشته باشد و این عنصر ناصفر یک باشد. به بیان دیگر، ماتریس حاصل از تعویض یک یا چند سطر ماتریس همانی، یک ماتریس جایگشتی است.

ساده ترین ماتریس جایگشت، ماتریس همانی $(I)$ است. به سادگی می‌توان نشان داد که ضرب هر ماتریس جایگشت $(P)$ با ترانهاده‌اش برابر با $(I)$ است؛ لذا $P^{-۱} = P^T$. هم‌چنین اگر ماتریس جایگشت $P$ در یک ماتریس مانند $A$ از طرف چپ ضرب شود، سطرهای ماتریس $A$ جابه‌جا می‌شوند. به‌طور مشابه با ضرب ماتریس جایگشت $P$ از راست در ماتریس $A$، ستون‌های ماتریس $A$ جابه‌جا می‌شوند.

## ماتریس یکانی[۳]

ماتریس مربعی $A$ با درایه‌های مختلط را یکانی نامند، هرگاه $A^* = A^{-۱}$.

**مثال ۲.۱.** ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{۱+i}{۲} & \frac{۱+i}{۲} \\ \frac{۱-i}{۲} & \frac{-۱+i}{۲} \end{bmatrix}$ یک ماتریس یکانی است.

## ماتریس بلوکی[۴]

ماتریس $A$ را که به‌صورت زیر نشان داده می‌شود،

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

ماتریس بلوکی (افراز شده) گوییم هرگاه با ترسیم خطوط افقی و عمودی بین سطرها و ستون‌هایش، آن را تقسیم بندی کنیم.

**توجه ۱.۱.** فرض کنید $A$، $B$، $C$ و $D$ ماتریس‌های به ترتیب از مرتبه‌ی $r \times s$، $r \times p$، $q \times s$ و $q \times p$

[۲] Permutation matrix

[۳] Unitary matix

[۴] Block matrix

باشند، آن‌گاه ترانهاده‌ی ماتریس بلوکی $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ از مرتبه‌ی $(r+q)\times(s+p)$ به‌صورت

$$\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

می‌باشد که ماتریس بلوکی از مرتبه‌ی $(s+p)\times(r+q)$ است.

**تعریف ۱.۱.** ماتریس قطری بلوکی[۵] $A_{n\times n}$ ، یک ماتریس بلوکی است، هر گاه هر یک از بلوک‌های قطری آن یک ماتریس مربعی بوده و دیگر بلوک‌ها صفر باشند. برای راحتی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$A = diag(A_{11}, ..., A_{kk})$$

که در آن $A_{ii}$ ها ماتریس‌های مربعی هستند. مجموع مرتبه‌های این ماتریس‌ها برابر $n$ است.

## ماتریس وارون پذیر[۶]

فرض می‌کنیم $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. اگر ماتریسی مانند $B$ از مرتبه‌ی $n\times m$ به‌گونه‌ای موجود باشد که $BA = I_n$، آن‌گاه $B$ را وارون چپ (معکوس چپ) ماتریس $A$ می‌نامیم و اگر $C$ ماتریسی از مرتبه‌ی $n\times m$ به‌گونه‌ای موجود باشد که $AC = I_m$، آن‌گاه $B$ را وارون راست $A$ می‌نامیم. حال اگر $A \in M_{n\times n}(F)$ و ماتریس مربعی $B$ موجود باشد به‌گونه‌ای که در رابطه‌ی $AB = BA = I$ صدق کند، در این‌صورت $B$ را معکوس $A$ می‌نامیم و می‌گوییم $A$ معکوس‌پذیر (نامنفرد) است. معکوس $A$ را با $A^{-1}$ نشان می‌دهیم . اگر $A$ معکوس‌پذیر نباشد، می‌گوییم $A$ معکوس‌ناپذیر (منفرد) است.

**قضیه ۱.۱.** فرض کنید $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشند، آن‌گاه:

۱) اگر $A$ معکوس‌پذیر باشد، $A^{-1}$ نیز معکوس‌پذیر است و $(A^{-1})^{-1} = A$.

۲) اگر $A$ و $B$ هر دو معکوس‌پذیر باشند، $AB$ نیز معکوس‌پذیر است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**نتیجه ۱.۱.** حاصل‌ضرب هر تعداد از ماتریس‌های معکوس‌پذیر، ماتریسی معکوس‌پذیر است.

---

[۵] Block diagonal matrix

[۶] Invertible matrix

**قضیه ۲.۱.** برای ماتریس مفروض مربعی $A$، گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱) $A$ معکوس‌پذیر است.

۲) دستگاه همگن $Ax = 0$ تنها جواب بدیهی $x = 0$ دارد.

## ماتریس متشابه[7]

فرض کنید $A$ و $B$ ماتریس‌های $n \times n$ باشند، دو ماتریس $A$ و $B$ متشابه نامیده می‌شوند، اگر یک ماتریس نامنفرد $T$ وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$T^{-1}AT = B.$$

**تعریف ۲.۱.** برای هر ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$، دترمینان آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$det(A) = \begin{cases} a_{11}, & n = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}, & n > 1 \end{cases}$$

که در آن $\Delta_{ij}$، دترمینان ماتریسی است، که از حذف سطر $i$ ام و ستون $j$ ام ماتریس $A$ به‌دست می‌آید.

## ماتریس متعامد[8]

ماتریس مربعی $A$ را متعامد نامند، هرگاه $A^TA = AA^T = I$، یعنی $A^T = A^{-1}$.

**مثال ۳.۱.** ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس متعامد است، زیرا

$$A^T = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[7]Similarity matrix

[8]Orthogonal matrix

**قضیه ۳.۱.** اگر $Q$ ماتریسی متعامد باشد آن‌گاه $det(Q) = \pm ۱$.

اثبات.

$$det(QQ^T) = det(I) \Rightarrow det(Q)det(Q^T) = ۱ \Rightarrow (det(Q))^۲ = ۱ \Rightarrow det(Q) = \pm ۱.$$

□

**تعریف ۳.۱.** مجموعه بردارهای $\{v_۱, v_۲, ..., v_n\}$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد است اگر

$$v_i^T v_j = ۰ \quad i \neq j$$

## چند جمله‌ای مشخصه[۹]، مقدار ویژه[۱۰] و بردار ویژه[۱۱]

اگر $A$ یک ماتریس $n \times n$ باشد؛ آن‌گاه چند جمله‌ای $\phi_n(\lambda) = det(\lambda I - A)$، چند جمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس $A$ نامیده می‌شود. صفرهای چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A$ نامیده می‌شوند. یا به‌طور معادل $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه‌ی $A$ است اگر و فقط اگر یک بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $Ax = \lambda x$ . بردار $x$ را بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی $\lambda$ گوییم.

**قضیه ۴.۱.** ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت،

۱) اگر $A$ یک ماتریس قطری، پایین مثلثی و یا بالا مثلثی باشد، مقادیر ویژه‌ی $A$ درایه‌های روی قطر اصلی آن هستند؛

۲) ماتریس‌های متشابه، چند جمله‌ای‌های مشخصه و مقادیر ویژه‌ی یکسانی دارند (عکس آن برقرار نیست)؛

۳) اگر $A$ متقارن باشد، مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی‌اند؛

۴) بردارهای ویژه‌ی متناظر به مقادیر ویژه‌ی متمایز $A$ مستقل خطی هستند.

اثبات. [۱] □

[۹] Characteristic polynomial

[۱۰] Eigenvalue

[۱۱] Eigenvector

**توجه ۲.۱.** اسکالر $\lambda$ مقدار ویژه‌ی $A$ است اگر و تنها اگر $det(A-\lambda I)=0$.

زیرا اگر $\lambda$ مقدار ویژه‌ی ماتریس $A$ باشد؛ آن‌گاه بنا به تعریف، بردار غیر صفری چون $x$ موجود است به‌طوری که:

$$Ax=\lambda x, \qquad x\neq 0$$

لذا با فاکتور گیری از $x$ داریم:

$$(A-\lambda I)x=0$$

چون دستگاه معادلات فوق همگن است؛ لذا برای این‌که دارای جواب غیر صفر باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب یعنی $det(A-\lambda I)$ صفر باشد. بنابراین $\lambda$ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس $A$ است اگر و تنها اگر $det(A-\lambda I)=0$.

**قضیه ۵.۱.** فرض کنید $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$؛ آن‌گاه $A=A^T$ اگر و تنها اگر یک ماتریس متعامد $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$Q^TAQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

که در آن $\lambda_i$، $i=1,...,n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A$ می‌باشند.

اثبات. [۳] □

## ماتریس معین مثبت[۱۲]

**تعریف ۴.۱.** ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ را یک ماتریس معین مثبت گویند، هرگاه برای هر بردار غیر صفر $x$ داشته باشیم $x^TAx>0$. در صورتی که $x^TAx\geq 0$ باشد ماتریس $A$ را نیمه معین مثبت می‌گوییم.

[۱۲] Positive definite matrix

**مثال ۴.۱.** ماتریس زیر یک ماتریس معین مثبت است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

زیرا

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 > 0, \quad (x \neq 0).$$

**قضیه ۶.۱.** اگر $A$ معین مثبت باشد، آن‌گاه نامنفرد است.

اثبات. برهان خلف: فرض کنید $A$ منفرد باشد، آن‌گاه دستگاه $Ax = 0$ می‌تواند جواب غیر صفر داشته باشد؛ لذا به ازای $x_0 \neq 0$ می‌توانیم داشته باشیم $x_0^T A x_0 = 0$ و این با فرض معین مثبت بودن ماتریس $A$ در تناقض است. بنابراین $A$ باید نامنفرد باشد. □

**قضیه ۷.۱.** ماتریس $A$ معین مثبت (نیمه معین مثبت) است اگر و فقط اگر همه‌ی مقدار ویژه‌های آن مثبت (نامنفی) باشند.

**توجه ۳.۱.** ماتریس $A$ نامعین است، هرگاه حداقل یک مقدار ویژه‌ی مثبت و حداقل یک مقدار ویژه‌ی منفی داشته باشد.

## زیر ماتریس‌ها

**تعریف ۵.۱.** ماتریس مربعی $A_k$ را زیر ماتریس اصلی[13] ماتریس $A_n$ می‌نامیم، هر گاه از $k$ سطر و $k$ ستون ماتریس $A_n$ تشکیل شده باشد.

[13] Principal submatrix

**تعریف ۶.۱.** زیر ماتریس اصلی پیشروی مرتبه‌ی $k$، به ازای $k = 1, 2, ..., n$ از ماتریس مربعی مرتبه‌ی $n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

**تعریف ۷.۱.** $i$ امین کهاد اصلی پیشرو، دترمینان زیر ماتریسی از $A$ است که از $i$ سطر و $j$ ستون اول تشکیل می‌شود.

### برخی خاصیت‌های ماتریس معین مثبت

یک ماتریس متقارن $A$، معین مثبت است اگر و تنها اگر:

۱) تمامی مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشند؛

۲) کهادهای اصلی پیشرو آن همگی مثبت باشند؛

## ۳.۱ فضای برداری

### زیرفضای پدید آمده [۱۴] توسط یک مجموعه

فرض کنید $V$ فضای برداری روی میدان $F$، و $S$ یک زیر مجموعه از $V$ باشد. زیرفضای پدید آمده توسط $S$، عبارت است از اشتراک همه‌ی زیرفضاهای $V$ که شامل $S$ باشند و این زیرفضاها را معمولاً با $< S >$ یا $Span(S)$ نمایش می‌دهیم.

وقتی $S$ مجموعه‌ای متناهی از بردارها باشد، مثلاً $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ آن‌گاه $< S >$ را زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$< S > = < \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n > = \{\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \mid c_i \in F\}.$$

[۱۴] Subspace generated

**قضیه ۸.۱.** زیرفضای پدید آمده توسط یک زیر مجموعه‌ی غیرتهی $S$ از فضای برداری $V$ عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی ترکیبات خطی بردارهای $S$.

## پایه[۱۵] و بعد[۱۶]

**تعریف ۸.۱.** فرض کنید $V$ یک فضای برداری روی $F$ و $S$ زیر مجموعه‌ی $V$ باشد. گوییم $S$ وابسته‌ی خطی است هرگاه بردارهای متمایز $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ از $S$ و اسکالرهای $c_1, c_2, ..., c_n$ که همگی صفر نیستند، در $F$ موجود باشند؛ به‌گونه‌ای که $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n = 0$.
مجموعه‌ای را که وابسته‌ی خطی نباشد، مستقل خطی می‌نامیم.

**تعریف ۹.۱.** فرض کنیم $V$ یک فضای برداری روی $F$ باشد. می‌گوییم زیر مجموعه‌ی $S$ از $V$ یک پایه برای $V$ است هر گاه $S$ مستقل خطی باشد و $V$ را تولید کند. اگر پایه‌ی $S$ برای $V$ دارای $n$ عضو باشد، آن‌گاه گفته میشود که این فضا $n$- بعدی است (یا با بعد $n$ است) و می‌نویسیم $dim(V) = n$. هر گاه $V$ دارای یک پایه‌ی متناهی باشد، می‌گوییم فضای $V$ با بعد متناهی می‌باشد. در غیر این‌صورت $V$ دارای بعد نامتناهی می‌باشد.

**مثال ۵.۱.** فرض کنید $A$ ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر روی $F$ باشد و $A = [A_1, ..., A_n]$، که در آن $A_i$ها ستون‌های ماتریس $A$ هستند. در این‌صورت بردارهای ستونی $A_1, ..., A_n$ مستقل خطی‌اند، زیرا فرض کنید $x_1A_1 + ... + x_nA_n = 0$، در این‌صورت اگر فرض کنیم $x = [x_1, \cdots, x_n]^T$ باشد؛ آن‌گاه $Ax = x_1A_1 + ... + x_nA_n = 0$. از طرفی $A$ معکوس‌پذیر است پس جواب دستگاه $Ax = b$ فقط $x = 0$ می‌باشد یا به عبارت ساده‌تر $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. بنابراین بردارهای $A_1, A_2, ..., A_n$ مستقل خطی هستند. حال فرض کنید $Y$ ماتریسی در $F^{n\times 1}$ باشد، قرار می‌دهیم: $x = A^{-1}Y$؛ لذا $Y = Ax$ یا $Y = A_1x_1 + ... + A_nx_n$، پس بردارهای $A_1, A_2, ..., A_n$ فضای ماتریس‌های $F^{n\times 1}$ را تولید می‌کنند. در نتیجه ستون‌های ماتریس $A$ یعنی $A_1, A_2, ..., A_n$، پایه‌ای برای فضای ماتریس‌های $F^{n\times 1}$ است.

---

[۱۵] Base

[۱۶] Dimention

**مثال ۶.۱.** فرض کنید $F$ میدان باشد. در این‌صورت:

۱) بعد $F^n$ برابر $n$ می‌باشد.

۲) بعد فضای همه‌ی ماتریس‌های $m\times n$ روی $F$ برابر $mn$ می‌باشد. زیرا فرض کنید که $E_{ij}$ ماتریسی باشد که درایه‌ی $(i,j)$ ام آن ۱، و بقیه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. در این‌صورت مجموعه‌ی $\{E_{ij} \mid ۱ \le i \le m,\ ۱ \le j \le n\}$ مستقل خطی است. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ روی $F$ مفروض است، بنابراین:

$$A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}, \qquad ۱ \le i \le m, \qquad ۱ \le j \le n.$$

پس مجموعه‌ی $\{E_{ij} \mid ۱ \le i \le m,\ ۱ \le j \le n\}$ فضای $M_{m\times n}(F)$ را تولید می‌کند. بنابراین این مجموعه پایه‌ای برای $M_{m\times n}(F)$ خواهد بود و در نتیجه:

$$dim(M_{m\times n}(F)) = mn.$$

۳) بعد زیرفضای همه‌ی ماتریس‌های متقارن $n\times n$ حقیقی، برابر با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ است، زیرا $\{E_{ij} \mid ۱ \le i,j \le n \quad j \ge i\}$ پایه‌ای برای این زیرفضا می‌باشد.

## نرم[۱۷]

**تعریف ۱۰.۱.** اگر به هر بردار $x$ در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ بتوان یک عدد حقیقی $\|x\|$ نسبت داد به‌طوری که در شرایط زیر صدق کند، آن‌گاه تابع $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با خواص زیر را یک نرم برداری روی $\mathbb{R}^n$ گویند.

*1)* $\|x\| \ge 0 \qquad ,\forall x \in \mathbb{R}^n$

*2)* $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

*3)* $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad ,\forall \alpha \in \mathbb{C}$

*4)* $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad , \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

---

[۱۷] norm

**مثال ۷.۱.** فرض کنید $x$ برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد. در این‌صورت $p$-نرم برداری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = (\sum_{i=۱}^{n} \mid x_i \mid^p)^{\frac{۱}{p}}, \quad p \geq ۱$$

در صورتی که $p = ۲$ باشد، آن را نرم دو (نرم اقلیدسی) می‌نامند.

**تعریف ۱۱.۱.** یک نرم ماتریسی روی $\mathbb{C}^{m\times n}$ تابعی است از $\mathbb{C}^{m\times n}$ به $\mathbb{R}$ به‌طوری که در شرایط زیر صدق کند:

*1)* $\|A\| \geq 0 \qquad , \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

*2)* $\|A\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$

*3)* $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad , \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n} \quad , \forall \alpha \in C$

*4)* $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad , \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$

### فضای سطری و ستونی[۱۸]

فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریسی $m \times n$ روی میدان $F$ باشد. بردارهای $a_{ij} = [a_{i۱}, ..., a_{in}]$، $۱ \leq i \leq m$ را بردارهای سطری ماتریس $A$ می‌نامیم و زیرفضایی از $F^n$ تولید شده توسط این بردارها را فضای سطری ماتریس $A$ و بعد فضای سطری $A$ را رتبه‌ی سطری $A$ می‌گوییم. فضای ستونی ماتریس $A$ نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

**قضیه ۹.۱.** فرض کنید $A$ ماتریسی $n \times n$ روی میدان $F$ باشد، در این‌صورت ماتریس $A$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر، بردارهای سطری (بردارهای ستونی) $A$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی در $F^n$ باشند[۳].

**تعریف ۱۲.۱.** ماکزیمم تعداد سطرها و ستون‌های مستقل خطی ماتریس $B$ را رتبه‌ی آن ماتریس نامیده، با $rank(B)$ نشان می‌دهند.

**قضیه ۱۰.۱.** فرض کنید $A$ ماتریسی $m \times n$ روی میدان $F$ باشد، در این‌صورت رتبه‌ی سطری، برابر رتبه‌ی ستونی ماتریس $A$ است [۳].

[۱۸] Row and column space