بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی آمار گرایش آمار ریاضی

ارزیابی قابلیت اعتماد براساس داده‌های فرسایشی تسریع‌یافته

استاد راهنما:

دکتر مجید اسدی

استاد مشاور:

دکتر نصراله ایران‌پناه

پژوهشگر:

راضیه صالحی رزوه

آبان ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادي مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوري هاي ناشي از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمار ریاضی

خانم راضیه صالحی

تحت عنوان

ارزیابی قابلیت اعتماد بر اساس داده های فرسایشی تسریع یافته

در تاریخ ۹۱/۸/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر نصراله ایران پناه با مرتبه ی استادیار امضاء

۳- استاد داور داخل گروه پایان‌نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۴- استاد داور خارج ازگروه پایان‌نامه دکتر علی زینل همدانی با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

امضای مدیر گروه

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" :ازپدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر مجید اسدی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛از استاد صبور و با تقوا ، جناب آقای دکتر نصراله ایران‌پناه که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی‌رسید.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تقدیم به سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم ...

موهایشان سپید شد تا ماروسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

چکیده

از دوران تولید سنتی محصولات تا امروز که دوران نانوتکنولوژی و سیستم‌های پیشرفته‌ی اتوماسیون می‌باشد، ابزار و ماشین آلات، به عنوان عوامل اصلی تولید به کار می‌روند. در اکثر کارخانه‌ها خراب شدن ماشین و تعمیر آن در موقع از کارافتادگی، کارایی سیستم را پایین می‌آورد. در بعضی از موارد هزینه تعمیر سیستم از خرید یک سیستم جدید هم بیشتر می‌شود. بنابراین لزوم داشتن قابلیت بالا برای یک سیستم یا محصول ضروری به نظر می‌رسد. آزمون‌های قابلیت اعتماد براساس اندازه‌های زمان شکست اغلب به خاطر فقدان شکست‌های مشاهده شده کارایی خود را از دست می‌دهد. بنابراین ضروری به نظر می‌رسد که برای محصولاتی با قابلیت اعتماد بالا، تدابیری برای ارزیابی قابلیت اعتماد محصولات در نظر گرفته شود. در این پایان‌نامه ضمن معرفی داده‌های فرسایش به بررسی خواص سالخوردگی توزیع‌های طول عمر براساس مدل‌های فرسایشی پرداخته و از روش‌های کلاسیک، بیزی و بازه اطمینان بوت‌استرپ برای تحلیل داده‌های فرسایش استفاده می‌کنیم. بنابراین اگرمحصول مشخصه‌ای داشته باشد که با قابلیت اعتماد در ارتباط باشد و در طول زمان دچار فرسایش شود، می‌توان از آن برای به دست‌آوردن داده‌های فرسایشی استفاده نمود. همچنین می توان با تعریف یک مقدار به عنوان آستانه شکست، داده‌های طول عمر را از داده‌های فرسایشی به دست آورد. در این صورت برای تحلیل رابطه بین اندازه‌های فرسایش و زمان شکست، مدل‌های تصادفی را برای فرسایش در نظر می‌گیریم و برخی خواص بسته IFR، IFRA، NBU و سایر خواص رده‌های توزیع طول‌عمر را روی مدل‌های فرسایش بررسی و علاوه بر این خواص بسته‌ای از ترتیب‌بندی تصادفی را براساس مدل‌های فرسایشی فراهم می‌کنیم. به دلیل این‌که در اکثر کاربردها نرخ‌های فرسایش در شرایط نرمال خیلی کم است و در زمان عملی آزمون، فرسایش قابل ارزیابی و مشاهده نیست، برای دستیابی سریع به اطلاعات قابلیت اعتماد آزمون، آزمون‌های فرسایش تسریع‌یافته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به طور کلی، اطلاعات آزمون‌های به دست آمده از متغیرهای تسریع‌یافته در سطوح بالا، برای برآورد طول عمر یا نرخ‌های فرسایش در شرایط نرمال براساس مدل آماری به دست می‌آید. در برخی موارد، مسئله نمونه کوچک در روش عملکرد آزمون فرسایش تحت زمان به وجود می‌آید. در واقع زمانی که داده‌های عملکرد فرسایش جمع‌آوری شده نمونه کوچک باشد، برآورد پارامترهای مدل، دقت و صحت نتایج ارزیابی قابلیت اعتماد را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بنابراین برای تحلیل قابلیت اعتماد داده‌های فرسایشی، داده‌های فرسایشی تسریع‌یافته و مخرب استفاده از روش بیزی را پیشنهاد می‌دهیم.

کلید واژه‌ها: فرایند فرسایش، فرسایش تسریع‌یافته، فرسایش مخرب، روش بیزی، روش دو–گامی، بازه اطمینان بوت-استرپ، شبیه‌سازی مونت کارلو، الگوریتم EM

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: مفاهیم و تعاریف اولیه

۱-۱ مقدمه ۱
۱-۲ اندازه‌های مهم در مطالعات طول عمر ۲
۱-۲-۱ تابع نرخ شکست ۲
۱-۲-۲ تابع نرخ شکست معکوس ۵
۱-۲-۳ ترتیب‌های جزئی ۵
۱-۳ آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته ۸
۱-۳-۱ مدل آرینوس ۹
۱-۳-۲ مدل ایرینگ ۱۰
۱-۳-۳ مدل قانون توانی ۱۱
۱-۴ الگوریتم EM ۱۲
۱-۵ استنباط بیزی ۱۵
۱-۵-۱ روش بیز ۱۵
۱-۵-۲ اطلاعات پیشین ۱۵
۱-۵-۳ روش‌های MCMC ۱۷
۱-۵-۴ استفاده از توزیع پسین برای برآورد ۱۹
۱-۵-۴-۱ برآورد نقطه‌ای بیزی ۱۹
۱-۵-۴-۲ برآورد فاصله‌ای بیزی ۲۰
۱-۶ نیوتن رافسون ۲۱
۱-۷ توزیع‌های خاص ۲۱
۱-۷-۱ توزیع وایبل ۲۲
۱-۷-۲ توزیع گاما ۲۲
۱-۷-۳ توزیع لگ‌نرمال ۲۳
۱-۷-۴ توزیع لگ-لجستیک ۲۳
۱-۷-۵ توزیع Burr XII ۲۴
۱-۷-۶ توزیع توانی نمایی ۲۴
۱-۷-۷ توزیع گامای وارون ۲۵
۱-۷-۸ توزیع مقدار غایی ۲۵

فصل دوم: داده‌های فرسایشی

۲-۱ مقدمه ۲۶

۲-۲ انواع فرسایش ۲۸

عنوان **صفحه**

۲-۲-۱ فرسایش خطی ۲۸
۲-۲-۲ فرسایش محدب ۲۹
۲-۲-۳ فرسایش مقعر ۲۹
۲-۳ مدل‌های پارامتری مربوط به داده‌های فرسایشی ۳۰
۲-۳-۱ تعاریف، نمادها و فرضیات ۳۰
۲-۳-۲ مدل مسیر متداول ۳۱
۲-۳-۳ پارامترهای مدل ۳۱
۲-۴ روش‌های کلاسیک آماری برای تحلیل داده‌های فرسایشی ۳۲
۲-۴-۱ روش تقریبی ۳۳
۲-۴-۲ روش تحلیلی ۳۴
۲-۴-۳ روش دومرحله‌ای ۳۵
۲-۴-۴ روش عددی ۳۸
۲-۵ ارزیابی $F_T(T)$ ۳۹
۲-۵-۱ برآورد نقطه‌ای ۳۹
۲-۵-۲ بازه اطمینان $F_T(T)$ ۴۰
۲-۶ الگوریتم EM برای تحلیل داده‌های فرسایشی ۴۲
۲-۶-۱ روش الگوریتم EM ۴۳
۲-۶-۱-۱ مرحله E ۴۴
۲-۶-۱-۲ مرحله M ۴۵
۲-۶-۲ الگوریتم EM مونت‌کارلو ۴۷
۲-۶-۳ برآورد خطای استاندارد ۴۸
۲-۶-۴ بازه اطمینان مجانبی ۴۹
۲-۷ مثال کاربردی ۵۰

فصل سوم: خواص سالخوردگی داده‌های فرسایشی

۳-۱ مقدمه ۵۵
۳-۲ مدل‌های فرسایش ۵۶
۳-۲-۱ مدل فرسایش جمع‌پذیر ۵۷
۳-۲-۲ مدل فرسایش ضربی ۵۹
۳-۳ مثال ۶۰
۳-۳-۱ توزیع وایبل ۶۰
۳-۳-۲ توزیع گاما ۶۳

۳-۳-۳ توزیع لگ-لجستیک ۶۵
۳-۴ خواص سالخوردگی توزیع‌های طول عمر ۶۶

عنوان **صفحه**

۳-۴-۱ خواص DFR و IFR ۶۷
۳-۴-۲ خواص DFRA و IFRA ۷۲
۳-۴-۳ خواص NBU و NWU ۷۵
۳-۵ ترتیب‌بندی تصادفی توزیع طول عمر فرسایشی ۸۰

فصل چهارم: داده‌های فرسایشی تسریع‌یافته

۴-۱ مقدمه ۸۳
۴-۲ مدل فرسایش با نرخ ثابت ۸۴
۴-۲-۱ مدل آرینوس ۸۵
۴-۲-۲ مدل توانی ۸۵
۴-۲-۳ مدل نمایی ۸۶
۴-۲-۴ مدل ایرینگ ۸۶
۴-۳ روابط آرینوس ۸۷
۴-۴ مدل با ضرایب ثابت ۸۹
۴-۵ مدل مسیر رایج ۹۰
۴-۵-۱ مدل تسریع‌یافته مسیر رایج ۹۱
۴-۶ برآورد پارامترهای مدل فرسایش تسریع‌یافته ۹۴
۴-۷ ارزیابی و برآورد $F(T)$ ۹۶
۴-۷-۱ ارزیابی تحلیلی $F(T)$ ۹۶
۴-۷-۲ ارزیابی عددی $F(T)$ ۹۷
۴-۷-۳ ارزیابی مونت‌کارلو $F(T)$ ۹۸
۴-۸ برآورد $F(T)$ ۹۸
۴-۸-۱ بازه اطمینان بوتاسترپ ۹۸
۴-۹ داده‌های فرسایشی مخرب تسریع‌یافته ۱۰۰
۴-۱۰ مدل‌های فرسایش مخرب تسریع‌یافته ۱۰۱
۴-۱۰-۱ توزیع فرسایش مخرب ۱۰۱
۴-۱۰-۲ تحلیل فرسایش برای بررسی مخرب ۱۰۳
۴-۱۱ روش‌های آزمون ۱۰۳
۴-۱۱-۱ تحلیل داده‌ها ۱۰۵
۴-۱۲ مثال کاربردی (فرسایش توان خروجی دستگاه B (میکر و همکاران (۱۹۹۸))) ۱۰۷

فصل پنجم: تحلیل بیزی داده‌های فرسایشی تسریع‌یافته

۵-۱ مقدمه ۱۱۱
۵-۲ مدل خطی ۱۱۳

عنوان **صفحه**

۵-۳ مدل آمیخته ۱۱۵
۵-۴ مثال کاربردی ۱۱۷
۵-۴-۱ آزمون فرسایش ۱۱۷
۵-۴-۲ آزمون فرسایش تسریع‌یافته ۱۲۱
۵-۴-۳ آزمون فرسایش مخرب ۱۲۶
۵-۵ آینده تحقیق ۱۳۱
واژه‌نامه ۱۳۲
منابع و مأخذ ۱۳۶

فهرست شکل‌ها

عنوان صفحه

شکل ۲-۱ نمودار داده‌های فرسایش چرخ..... ۵۱

شکل۲-۲ نمودار احتمال توزیع لگ‌نرمال شکست‌های ساختگی..... ۵۳

شکل ۲-۳ نمودار احتمال توزیع وایبل شکست‌های ساختگی..... ۵۳

شکل ۳-۱ نمودار نرخ شکست توزیع توانی نمایی..... ۶۲

شکل۳-۲ نمودار نرخ شکست توزیع دوپارمتری II..... ۶۳

شکل ۳-۳ نمودار نرخ شکست تابعی از توزیع گاما با $\lambda = 1$..... ۶۴

شکل۳-۴ نمودار نرخ شکست توزیع $b\left(F_{2,2^{\frac{1}{2}}}\right)$..... ۶۶

شکل ۴-۱ تصویر اثرات فرسایش وابسته به دمای آرینوس حاصل از واکنش شیمیایی تک مرحله‌ای. ۹۲

شکل ۴-۲ تصویر اثرات مدل فرسایش خطی وابسته دمای آرینوس..... ۹۳

شکل ۴-۳ نمودار فرسایش توانی شبیه‌سازی‌شده با سطح توانی مجانبی $A_2(\infty)$ و نرخ فرسایش k. ۹۸

شکل ۴-۴ مسیرهای فرسایش و عملکرد نزولی پراکندگی..... ۱۰۴

شکل ۴-۵ نتایج آزمون فرسایش تسریع‌یافته به دست آمده از افت توان خروجی دستگاه B برای یک نمونه از واحدهای آزمودنی در ۳ سطح دما..... ۱۰۷

شکل ۴-۶ مشاهدات افت فشار دستگاه B مدل فرسایش برای ۳۴ مسیرهای نمونه..... ۱۰۹

شکل ۴-۷ برآوردهایی از توزیع‌های طول عمر دستگاه B براساس داده‌های فرسایش در دماهای۱۹۵°C، ۱۵۰°C، ۱۰۰°C و ۸۰°C..... ۱۱۰

شکل ۴-۸ برآورد توزیع طول عمر دستگاه B در دمای ۸۰°C با بازه‌های اطمینان بوت‌استرپ دوطرفه نقطه‌ای ٪۸۰ و ٪۹۰ براساس داده‌های افت توان IC با آستانه شکست $D_f = -.5dB$..... ۱۱۰

شکل ۵-۱ نمودار هسته چگالی توزیع پسین با استفاده از نمونه تولید شده از نمونه‌گیری گیبز. ۱۲۰

شکل ۵-۲ قابلیت اعتماد پسین میانه رشد شکاف تحت میلیون دوره و بازه‌های اعتبار..... ۱۲۰

عنوان **صفحه**

شکل ۵-۳ نمودار داده‌های درخشندگی LED برحسب زمان t در دماهای (a) ۲۵°C (b) ۶۵°C (c) ۱۰۵ °C..... ۱۲۲

شکل ۵-۴ نمودار هسته چگالی توزیع پسین با استفده از نمونه تولید شده از نمونه‌گیری گیبز..... ۱۲۵

شکل ۵-۵ قابلیت اعتماد LED برحسب زمان t_i و بازه‌های اعتبار ۹۰٪ در دمای ۲۵°C..... ۱۲۶

شکل ۵-۶ نمودار هسته چگالی توزیع پسین با استفاده از نمونه تولید شده از نمونه‌گیری گیبز..... ۱۲۹

شکل ۵-۷ قابلیت اعتماد عایق برحسب زمان t و بازه‌های اعتبار ۹۰٪ در ۱۵۰°C..... ۱۳۰

فهرست جدول‌ها

عنوان صفحه

جدول ۲-۱ زمان‌های شکست ساختگی..... ۵۲

جدول ۲-۲ بازه‌ها و برآوردهای نقطه‌ای به دست آمده از هر ۳ روش..... ۵۳

جدول ۵-۱ خلاصه از توزیع پسین پارامترها مدل داده‌های رشد شکاف..... ۱۱۹

جدول ۵-۲ خلاصه توزیع پسین پارامترهای مدل داده‌های LED ۱۲۵

جدول ۵-۳ خلاصه توزیع پسین پارامترهای مدل داده‌های فرسایش قدرت عایق..... ۱۲۹

مخفف و کوتاه‌نوشت‌ها

ADDT	آزمون فرسایش مخرب تسریع‌یافته
ALT	آزمون عمر تسریع‌یافته
SAFT	مقیاس زمان شکست تسریع‌یافته
BT	وانی شکل
UBT	وانی شکل وارون
DFR	نرخ شکست نزولی
DDP	مسیر فرسایش نزولی
DIR	نرخ درستنمائی نزولی
DRHR	نرخ خطر معکوس نزولی
EP	توانی نمایی
HNBUE	امید ریاضی هارمونیک نو بهتر از کهنه
HNWUE	امید ریاضی هارمونیک نو بدتر از کهنه
IDP	مسیر فرسایش صعودی
IFR	نرخ شکست صعودی
IFR(2)	نرخ شکست صعودی مرتبه ۲
IFRA	متوسط نرخ شکست صعودی
IIR	نرخ درستنمایی صعودی
MCMC	زنجیره مارکوف مونت‌کارلو
M − H	متروپلیس هستینگز
MCEM	ماکسیمم امید ریاضی مونت‌کارلو
NBU	نو بهتر از کهنه
NWU	نو بدتر از کهنه

NBUE	امید ریاضی نو بهتر از کهنه
NWUE	امید ریاضی نو بدتر از کهنه
NBUC	نو بهتر از کهنه محدب
NWUC	نو بدتر از کهنه محدب
NR	نیوتن رافسون
star − shaped	ستاره شکل
UBT	وانی شکل وارون
MVN	توزیع نرمال چندمتغیره

فصل اول

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱-۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم و تعاریف اولیه فرسایش تسریع‌یافته و مفاهیم مرتبط با آن که در فصل‌های آینده استفاده می‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش ۱-۲ اندازه‌های مهم در طول عمر، در بخش ۱-۳ آزمون‌های عمر تسریع‌یافته، در بخش ۱-۴ الگوریتم EM، در بخش ۱-۵ استنباط بیزی و در بخش ۱-۶ الگوریتم نیوتن رافسون بیان گردیده و در بخش ۱-۷ توزیع‌های خاص معرفی می‌شوند.

۱-۲ اندازه‌های مهم در مطالعات طول عمر

هنگامی که متغیر تصادفی نامنفی است، اندازه‌های قابلیت اعتماد را می‌توان براساس مدل‌های فرسایش مختلف به دست آورد. در این بخش بعضی از اندازه‌های مطرح در قابلیت اعتماد معرفی می‌گردد. لازم به ذکر است که در سراسر این رساله، منظور از متغیر تصادفی طول عمر یک متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته و نامنفی است. با وجود $F(t)$، تابع بقا یا تابع قابلیت اعتماد به صورت

$$\bar{F}(t) = \Pr(X > t) = 1 - F(t)$$

تعریف می‌شود که در آن X بیانگر طول عمر یک مؤلفه و یا زمان اولین شکست آن می‌باشد. مقدار مورد انتظار X با μ نشان داده می‌شود. تابع

$$\bar{F}(x|t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} \qquad x, t \geq 0$$

بیانگر تابع بقا قطعه‌ای است که طول عمر t دارد. به عنوان مثال، احتمال شرطی اینکه یک واحد با طول عمر t تا زمان $x + t$ زنده بماند. مقدار مورد انتظار طول عمر باقیمانده واحدی با طول عمر t به صورت

$$\mu(t) = E(X - t|X > t) = \int_t^{\infty} \bar{F}(x|t)\, dx$$

است. واضح است که $\mu(0) = \mu$.

۱-۲-۱ تابع نرخ شکست

فرض کنید یک سیستم دارای طول عمر X با تابع چگالی f و تابع بقای $\bar{F}$ باشد. وقتی که $F'(t) = f(t)$ وجود داشته باشد، کمیت تابع نرخ شکست مؤلفه را با $r(t)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود (مارشال و الکین[1] (۲۰۰۷))

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

که در آن برای هر t، $\bar{F}(t) > 0$.

همچنین می‌توان تابع نرخ شکست را به صورت زیر تعریف کرد.

$$r(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(t \leq X < t + \Delta | X \geq t)}{\Delta} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

[1] Marshal and Olkin

که در آن Δ مقدار کوچک و $r(t)\Delta$ تقریباً برابر با احتمال رخ‌دادن شکست در بازه $(t, t+\Delta]$ است به شرطی که در بازه $(0,t]$ هیچ شکستی رخ نداده باشد یعنی مؤلفه مورد بررسی حداقل تا زمان $\mathbf{t}$ کار کرده باشد. تابع نرخ شکست در حالت پیوسته یک تابع احتمال نیست چون مقادیر بزرگتر از یک را می‌تواند اختیار کند. از طرفی همواره نامنفی است و برحسب زمان ممکن است تابعی ثابت، صعودی یا نزولی باشد و یا از روند پیچیده‌تری پیروی کند.

رابطه بین تابع نرخ شکست با تابع بقا یک به یک است. به عبارت دیگر تابع نرخ شکست، توزیع $\mathbf{X}$ را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کند. اگر $r(t)$ وجود داشته باشد آنگاه

$$\mathrm{R}(t) = 1 - \bar{F}(t) = \int_0^t r(x)\,dx = -log\,\bar{F}(t)$$

تابع نرخ شکست تجمعی نامیده می‌شود. از آنجا که $\bar{F}(0) = 1$، $\bar{F}(t)$ در بازه $(0,t)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\bar{F}(t) = exp\left(-\int_0^t r(x)\,dx\right)$$

یک توزیع طول عمر می‌تواند با استفاده از میانگین باقیمانده عمر (MRL)

$$\mu(t) = \mathrm{E}(\mathrm{X} - \mathrm{t}|X > t)$$

بطور منحصر بفرد مشخص شود. به عبارت دیگر

$$\bar{F}(t) = \frac{\mu}{\mu(t)}\,exp\left(-\int_0^t \mu(x)^{-1}\,dx\right) \qquad t \geq 0$$

است.

از آنجایی که تابع نرخ شکست می‌تواند رفتارهای مختلفی را به خود بگیرد، کلاس‌های متنوعی برای توزیع‌های طول عمر براساس رفتار نرخ شکست معرفی می‌شوند. بنابراین در ادامه کلاس‌هایی از توزیع‌های طول عمر براساس رفتار نرخ شکست آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که در سراسر این رساله، منظور از صعودی غیرنزولی و منظور از نزولی غیرصعودی است.

تعریف ۱-۱ توزیع F متعلق به کلاس توزیع‌های با نرخ شکست صعودی (IFR) (نزولی (DFR)) است هرگاه $\bar{F}(x|t)$ به ازای $0 \le t \le \infty$ برای هر $x \ge 0$ یک تابع نزولی (صعودی) باشد. همچنین F دارای خاصیت $IFR\ (DFR)$ است اگر و فقط اگر $-log\bar{F}(t)$ محدب (مقعر) باشد.

زمانی که تابع چگالی وجود داشته باشد خاصیت $IFR\ (DFR)$ هم‌ارز با صعودی (نزولی) بودن $r(t)$ به ازای $t > 0$ است.

تعریف ۱-۲ توزیع F را متعلق به کلاس توزیع‌های با متوسط نرخ شکست صعودی $(IFRA)$ (نزولی $(DFRA)$) گویند هرگاه $-t^{-1}log\bar{F}$ تابعی صعودی (نزولی) از $t(t > 0)$ باشد که به ازای $0 < \alpha < 1$ و $0 \le t$ هم‌ارز با $\bar{F}^{\alpha}(t) \ge \bar{F}(\alpha t)\big)\bar{F}^{\alpha}(t) \le \bar{F}(\alpha t)$ است (بارلو و پروشان[1] (۱۹۸۱)).

تعریف ۱-۳ توزیع F متعلق به کلاس توزیع‌های با نرخ شکست وانی‌شکل (وانی‌شکل معکوس)[2] است هرگاه نرخ شکست آن که در بازه $0 \le t_1 \le t_2 \le +\infty$ تعریف می‌شود به ازای $t < t_1$ تابعی اکیداً نزولی (اکیداً صعودی)، به ازای $t_1 < t < t_2$ تقریباً ثابت و به ازای $t > t_2$ تابعی اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد.

تعریف ۱-۴ توزیع F برای هر s و t متعلق به کلاس توزیع‌های با خاصیت نو بهتر از کهنه (NBU) (نو بهتر از کهنه (NWU)) است هرگاه

$$\bar{F}(x|t) \le \bar{F}(x)$$

یعنی

$$\bar{F}(s+t) \le (\ge)\bar{F}(s)\bar{F}(t) \qquad x,t \ge 0$$

باشد.

تعریف ۱-۵ فرض کنید تابع $f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد $f(t)$ را ستاره شکل (پاد ستاره شکل) گوئیم هرگاه $\frac{1}{t}f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ صعود (نزول) کند.

همچنین تابع $f(t)$ در نقطه t_0 دارای خاصیت ستاره شکل (پاد ستاره شکل)[3] است هرگاه $\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}$ نسبت به $t \ne t_0$ صعودی (نزولی) است.

---

[1] Barlow and Proschan
[2] Bathtub shape (Upside-down bathtub shape)
[3] Star-shaped (anti-star-shaped)