بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی ، گرایش جبر

عنوان

کیلی گراف‌ها روی گروه‌های دووجهی

استاد راهنما

دکتر حیدر جعفری

استاد مشاور

دکتر نادر جعفری راد

پژوهشگر

زهرا عابدین زاده پیسخانی

۱۳۹۱

خدای متعال را سپاس که نعماتش بی‌شمار، قدرتش بی‌انتها، رحمتش فراگیر و الطافش لایتناهی است؛ او که در لحظه لحظه زندگی یاور و پشتیبانم بوده و در سختی‌ها و ناملایمات تکیه‌گاهم...

تقدیم به مادرم

دریای بی‌کران فداکاری و عشق
که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر.

تشکر و قدردانی

حال که به یاری پروردگار، این دوره از تحصیلات خود را به پایان رساندم، بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌شائبه‌ی پدر و مادر عزیزم و برادر و خواهران نازنینم و همسر مهربانم که همواره مشوق و پشتیبان من بودند و صبورانه ادامه این راه را برایم هموار نمودند تشکر کنم.

از زحمات فراوان استاد فرهیخته و توانمندم جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری که راهنمایی‌ها و نظرات ارزنده، صبر و حوصله فراوان ایشان، نقش مهمی در به ثمر رساندن این پروژه داشت، صمیمانه تشکر می‌کنم. از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که به عنوان مشاور در این پروژه نقش داشتند و نیز جناب آقای دکتر مهدی رضا خورسندی نهایت قدردانی را دارم و سلامتی و موفقیت همیشگی این بزرگواران را از درگاه یزدان پاک خواستارم.

نام خانوادگی دانشجو: عابدین‌زاده پسیخانی نام: زهرا

عنوان: کیلی گراف‌ها روی گروه‌های دووجهی

استاد راهنما: دکتر حیدر جعفری

استاد مشاور: دکتر نادر جعفری راد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: جبر

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۷۸

واژگان کلیدی: گروه دووجهی D_n، گراف کیلی، گراف یک-منتظم

چکیده

در این پایان‌نامه گراف‌های کیلی روی گروه‌های دووجهی را مطالعه می‌کنیم. در ابتدا تعاریف و مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی گراف‌ها و نظریه‌ی گروه‌ها را بیان می‌کنیم. سپس به تعریف گراف کیلی می‌پردازیم و گراف‌های کیلی یک-منتظم نرمال ۴-ظرفیت G را روی یک گروه دووجهی، که پایدارساز رأس آن در $Aut(G)$ دوری است، مشخص می‌کنیم. هم‌چنین دسته‌ای از این چنین گراف‌ها با ظرفیت ۶ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این پایان‌نامه بر اساس مقاله [۱۲] تهیه و تدوین گردیده است.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه، گراف‌ها متناهی، ساده و بدون جهت می‌باشند. فرض کنید $V(G)$، $E(G)$، $A(G)$ و $Aut(G)$ به‌ترتیب مجموعه‌ی رئوس، مجموعه‌ی یال‌ها، مجموعه‌ی کمان‌ها و همه‌ی خودریختی‌های گراف G باشند. حال رأس $v \in V(G)$ را در نظر بگیرید. $N_i(v)$ مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی از گراف G است که به فاصله‌ی i از رأس v قرار دارند. گراف G رأس-انتقالی، یال-انتقالی و کمان-انتقالی نامیده می‌شود اگر $Aut(G)$ به‌ترتیب روی مجموعه‌ی رئوس، مجموعه‌ی یال‌ها و مجموعه‌ی کمان‌ها، به‌طور انتقالی عمل کند. گراف G یک-منتظم است اگر $Aut(G)$ روی مجموعه‌ی کمان‌ها، $A(G)$، به‌طور انتقالی و نیم-منتظم عمل کند و همچنین پایدارساز کمان در $Aut(G)$ همانی باشد. گروه Γ و مجموعه‌ی مولد S از Γ که $S = S^{-1}$ و $1 \notin S$ داده شده است، گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ روی گروه Γ، دارای مجموعه رئوس Γ و مجموعه یال‌های $\{\{g, h\} \mid g^{-1}h \in S\}$ می‌باشد. $Aut(\Gamma, S) = \{\alpha \in Aut(\Gamma) \mid \alpha(S) = S\}$ زیرگروهی از $Aut(\Gamma)$ است که S را مجموعه‌وار ثابت نگه می‌دارد. واضح است که $Aut(\Gamma, S)$ زیرگروهی از پایدارساز عنصر همانی 1 در $Aut(Cay(\Gamma, S))$ می‌باشد. گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ نرمال نامیده می‌شود هرگاه انتقال چپ $L(\Gamma)$ از Γ زیرگروه نرمالی از $Aut(Cay(\Gamma, S))$ باشد. در این پایان‌نامه، منظور از یک پایدارساز رأس از گراف G، یک پایدارساز رأس تحت عمل $Aut(G)$ می‌باشد. برای $n \geq 2$، گروه دووجهی D_n، یک گروه از مرتبه‌ی $2n$ است که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, \ \ bab = a^{-1} \rangle.$$

برخی از ریاضیدانان به خودریختی گروه‌هایی از گراف‌های مکعبی کمان-انتقالی پرداختند. به‌عنوان مثال می‌توان به [۳، ۶، ۷، ۱۵، ۱۸] مراجعه نمود. ماروزیک[1] و مالنیک[2] [۱۴، ۱۳] تعدادی از گراف‌های یک-

[1]Marusic
[2]Malnic

منتظم نامتناهی را ساختند. ژو[۳] و همکارانش [۲۳] گراف‌های کیلی یک-منتظم از ظرفیت بیشتر از ۴ را روی گروه‌های جابه‌جایی متناهی مشخص کردند و برخی دیگر از ریاضیدانان [۱۱] تعدادی از گراف‌های یک-منتظم نامتناهی که از ظرفیت زوج و از کمر ۴ می‌باشند را مشخص کردند.

در بخش ۱.۲ نشان می‌دهیم که برای هر گراف کیلی همبند $Cay(D_n, S)$ از ظرفیت $k \geq ۳$، اگر $Aut(D_n, S)$ شامل یک زیرگروه دوری از مرتبه‌ی k باشد که روی مجموعه‌ی $S = N_۱(۱)$ به‌طور انتقالی عمل کند، آنگاه $Cay(D_n, S)$ از کمر ۴ یا ۶ می‌باشد. برای هریک از این دو حالت، در بخش ۲.۲ کیلی گراف‌های ۴-ظرفیت یک-منتظم نرمال را روی گروه دووجهی D_n با پایدارساز رأس دوری مشخص می‌کنیم. در فصل ۳ گراف‌های کیلی ۶-ظرفیت یک-منتظم نرمال روی گروه دووجهی D_n با پایدارساز رأس دوری که از کمر ۴ می‌باشند را مشخص می‌کنیم. هم‌چنین در این فصل به گراف‌های کیلی ۶-ظرفیت یک-منتظم نرمال روی گروه دووجهی D_n با پایدارساز رأس دوری که از کمر ۶ می‌باشند نیز به‌طور جزئی پرداخته می‌شود.

زهرا عابدین‌زاده پیخانی

۱۳۹۱

[۳] Xu

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مفاهیمی از گروه‌ها

تذکر ۱.۱.۱. *تمام مطالب ارجاع داده نشده این بخش به مرجع [۲] باز می‌گردد.*

تعریف ۲.۱.۱. اگر یک n ضلعی منتظم را در یک صفحه درنظر بگیرید، آنگاه توسط n دوران حول مرکز n ضلعی به اندازه $\frac{2k\pi}{n}$ رادیان، برای $k \in \{1, 2, \dots, n\}$، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و n انعکاس نسبت به n محور تقارن n ضلعی، می‌توان n ضلعی را بر خودش منطبق نمود. مجموعه‌ی تمام این دوران‌ها و انعکاس‌ها تشکیل یک گروه به نام گروه تقارن‌های یک n ضلعی منتظم می‌دهد که آن را $n-$امین گروه دووجهی می‌نامند و با D_n نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. زیرگروه H را یک زیرگروه مشخصه‌ی G نامند درصورتی‌که برای هر خودریختی G مانند α، $\alpha(H) = H$.

تعریف ۴.۱.۱. گروه Γ و مجموعه‌ی ناتهی X را درنظر بگیرید. فرض کنید به‌ازای هر g از Γ و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \bullet g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به‌طوری‌که

(۱) به‌ازای هر x از X، $x \bullet 1 = x$، و

(۲) به‌ازای هر g_1 و g_2 از Γ و هر x از X، $x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2$.

دراین‌صورت گوئیم Γ بر X عمل می‌کند و $\bullet$ را عمل Γ بر X گویند. برای سهولت در نوشتن، به‌جای $x \bullet g$ از xg استفاده می‌کنیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی X عمل کند و $g \in \Gamma$ و $x \in X$. گوئیم g عضو (یا نقطه‌ی) x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه‌ی اعضایی از Γ را که هر عضو X را ثابت نگه‌می‌دارد، هسته‌ی عمل می‌نامند.

مثال ۶.۱.۱. گروه متقارن S_X بر مجموعه‌ی ناتهی X با فرض $f \in S_X$ و $x \in X$ به‌صورت $x \bullet f = xf$ عمل می‌کند.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند و $x \in X$، دراین‌صورت مجموعه‌ی $\{g \in \Gamma \mid xg = x\}$ را پایدارساز x در Γ می‌نامند و با علامت $St_\Gamma(x)$ نشان می‌دهند.

توجه ۸.۱.۱. *از این پس برای سهولت در نوشتن به‌جای نماد $St_\Gamma(x)$، از نماد $St(x)_\Gamma$ استفاده می‌کنیم.*

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم: گوییم $x_1 \sim x_2$ درصورتی‌که به ازای عضوی از Γ مانند g، $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X است. هر رده‌ی هم‌ارزی را یک مدار عمل، یا گاهی از اوقات یک Γ-مدار، می‌نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه رده هم‌ارزی شامل x را مدار x در Γ می‌نامیم و آن را با علامت $Orb_\Gamma(x)$ (یا مختصرا با $Orb(x)$) نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف فوق، $Orb_\Gamma(x) = \{xg \mid g \in \Gamma\}$. بر طبق خواص رده‌های هم‌ارزی، معلوم می‌شود که مدارها افرازی از Xاند و در نتیجه هر دو مدار متمایز از هم جدا هستند و اجتماع آنها برابر با X است. در صورتی که $Orb_\Gamma(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، عده‌ی اعضای آن را طول مدار x در Γ می‌نامیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی X عمل کند. برای هر g از Γ، تابع X $\varphi_g : X \longrightarrow X$ را با ضابطه‌ی $x\varphi_g = xg$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت $\varphi_g \in S_X$ و نگاشت $\varphi : \Gamma \longrightarrow S_X$ با ضابطه‌ی $g \longmapsto \varphi_g$ یک همریختی است که هسته‌ی آن با هسته‌ی عمل برابر است.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود. □

نتیجه ۱۱.۱.۱. *فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی X عمل کند و K هسته‌ی عمل باشد. دراین‌صورت $K \lhd \Gamma$ و Γ/K با زیرگروهی از S_X یکریخت است.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود. □

قضیه ۱۲.۱.۱. ***(مدار-پایدارساز)*** *فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. دراین‌صورت، تناظری یک‌به‌یک بین $Orb(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی همدسته‌های راست $St(x)$ در Γ وجود دارد. به‌ویژه اگر $Orb(x)$ متناهی باشد آنگاه $|\Gamma : St(x)| = |Orb(x)|$.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه Γ باشد. دراین‌صورت مجموعه‌ی $N_\Gamma(X) = \{g \in \Gamma \mid gXg^{-1} = X\}$ زیرگروهی از Γ است و به آن نرمالساز X در Γ گویند.

توجه ۱.۱.۱۴. *از این پس برای سهولت در نوشتن، به‌جای نماد $N_\Gamma(X)$ از نماد $N(X)_\Gamma$ استفاده می‌کنیم.*

قضیه ۱.۱.۱۵. *فرض کنیم Γ یک گروه باشد و $H, K \leq \Gamma$. دراین‌صورت*

(۱) *$H \lhd K$ اگر و تنها اگر $K \leq N(H)_\Gamma$. به‌عبارت دیگر، $N(H)_\Gamma$ بزرگترین زیرگروه Γ است که H در آن نرمال است. به‌ویژه $H \lhd \Gamma$ اگر وتنها اگر $\Gamma = N(H)_\Gamma$.*

(۲) *اگر $H \leq K$ آنگاه $N(H)_K = N(H)_\Gamma \cap K$.*

برهان. برای اثبات به مرجع [۲] مراجعه شود. □

لم ۱.۱.۱۶. نگاشت $\alpha : D_n \to D_n$ *با ضابطه‌ی $a \mapsto a^l$ و $b \mapsto a^k b$ که در آن $gcd(l,n) = ۱$ و $۰ \leq k \leq n-۱$، یک خودریختی گروهی از D_n می‌باشد.*

برهان. فرض کنید برای $۰ \leq m_۱, m_۲, i_۱, i_۲ \leq n-۱$، $a^{m_۱}b, a^{m_۲}b, a^{i_۱}, a^{i_۲} \in D_n$ دلخواه باشند.

اثبات خوش‌تعریفی: اگر $a^{m_۱}b = a^{m_۲}b$، آنگاه $a^{m_۱} = a^{m_۲}$، بنابراین $a^{m_۱l+k}b = a^{m_۲l+k}b$ و درنتیجه $\alpha(a^{m_۱}b) = \alpha(a^{m_۲}b)$.

حال کافیست نشان دهیم که $\alpha(b^{-۱})\alpha(a)\alpha(b) = \alpha(a^{-۱})$، $\alpha(a)^n = ۱$ و $\alpha(b)^۲ = ۱$.

$\alpha(a) = a^l$ و $gcd(l,n) = ۱ \Rightarrow \alpha(a)^n = ۱$

$(a^k b)^۲ = ۱$ و $\alpha(b) = a^k b \Rightarrow \alpha(b)^۲ = ۱$

$\alpha(b^{-۱})\alpha(a)\alpha(b) = a^{-l}$ و $\alpha(a^{-۱}) = a^{-l} \Rightarrow \alpha(b^{-۱})\alpha(a)\alpha(b) = \alpha(a^{-۱}).$

همچنین ازآنجایی‌که $\langle \alpha(a), \alpha(b) \rangle = D_n$، α پوشا نیز می‌باشد. □

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند. عمل را انتقالی گوییم درصورتی‌که X تنها مدار عمل باشد. به‌عبارت دیگر برای هر دو عضو X مانند x_1 و x_2 ، عضوی از Γ مانند g موجود باشد به‌طوری‌که $x_1 g = x_2$. گاهی از اوقات به‌جای این‌که بگوییم عمل انتقالی است خواهیم گفت Γ بر مجموعه‌ی X به‌طور انتقالی عمل می‌کند.

تعریف ۱.۱.۱۸. گروه Γ بر مجموعه‌ی ناتهی X نیم-منتظم عمل می‌کند هرگاه پایدارساز هر عضو X در Γ همانی باشد.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید Γ یک گروه و $g \in \Gamma$ باشد. نگاشت‌های $L_g, R_g : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ که به‌صورت

$$L_g(h) = gh \quad , \quad R_g(h) = hg$$

تعریف می‌شوند را به‌ترتیب انتقال چپ و انتقال راست توسط g می‌نامند. مجموعه‌ی همه‌ی انتقال‌های چپ Γ را با $L(\Gamma)$ و مجموعه‌ی همه‌ی انتقال‌های راست Γ را با $R(\Gamma)$ نشان می‌دهند.

۲.۱ مفاهیمی از گراف‌ها

تذکر ۱.۲.۱. *تمام مطالب ارجاع داده نشده این بخش به مرجع [۱] باز می‌گردد.*

تعریف ۱.۲.۲. گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$، متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ی رأس‌ها، مجموعه‌ی $E(G)$ی یال‌ها مجزا از $V(G)$، و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G، یک جفت نامرتب (نه لزوما مجزا) از رأس‌های G را همراه می‌کند. اگر e یک یال و u و v رأس‌هایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e) = uv$، آن‌گاه می‌گویند e، u را به v وصل می‌کند، رأس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۳. تعداد یال‌هایی از گراف G که رأس v بر آنها واقع است را درجه یا ظرفیت رأس v می‌نامند و با $d_G(v)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۴. به گرافی که درجه‌ی هر رأس آن k باشد گراف $k-$ظرفیت گویند.

تعریف ۱.۲.۵. هر زوج مرتب به‌صورت (v_0, v_1) از رأس‌های به‌هم متصل گراف را یک کمان می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. گراف G را ساده نامند، هرگاه هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال نباشد.

تعریف ۷.۲.۱. در گراف G دنباله‌ی ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ که جمله‌های آن به‌طورمتناوب رأس‌ها و یال‌های G می‌باشند را گشت می‌نامند. قابل ذکر است که در گراف‌های ساده گشت W بوسیله‌ی دنباله‌ی $v_0 v_1 \dots v_k$ مشخص می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. اگر یال‌های e_1، e_2، ... و e_k در گشت $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ مجزا باشند گشت W را گذر می‌نامند.

تعریف ۹.۲.۱. اگر علاوه بر مجزا بودن یال‌های e_1، e_2، ... و e_k در گشت $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ ، رأس‌های v_0، v_1، ... و v_k نیز مجزا باشند گشت W را مسیر نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. گذر بسته‌ای که رأس‌های داخلی و مبدأ آن مجزا باشند را دور می‌نامند.

تعریف ۱۱.۲.۱. دوری به طول k را یک $k-$دور می‌نامند.

تعریف ۱۲.۲.۱. طول کوتاهترین دور از گراف G را کمر G می‌نامند.

تعریف ۱۳.۲.۱. تعداد یال‌هایی که درکوتاهترین گشت رئوس u و v از گراف G را به‌هم متصل می‌کند را فاصله‌ی بین u و v می‌نامند و با نماد $d(u,v)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۴.۲.۱. مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی از گراف G را که به فاصله‌ی i از رأس v قرار دارند را با $N_i(v)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. گراف H را زیرگراف G نامند هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H تحدید ψ_G به $E(H)$ باشد و آن را با نماد $H \subseteq G$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد و V' زیرمجموعه‌ی ناتهی V باشد. زیرگرافی از G را که مجموعه رأس‌هایش V' و مجموعه یال‌هایش مجموعه‌ای از آن یال‌های G است که هر دو انتهایش در V' است، زیرگراف القایی G نامند و با $G[V']$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۷.۲.۱. دو رأس u و v در گراف G را همبند نامند هرگاه مسیری از u به v در G موجود باشد. همبندی یک رابطه‌ی هم‌ارزی در مجموعه رئوس V از گراف G است، بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_۱$، $V_۲$، ... و V_k وجود دارد به‌طوری که دو رأس u و v همبند می‌باشند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه‌ی V_i باشند. زیرگراف‌های $G\left[V_۱\right]$، $G\left[V_۲\right]$، ... و $G\left[V_k\right]$ را مؤلفه‌های G می‌نامند.

تعریف ۱۸.۲.۱. گراف G را همبند گویند هرگاه G دقیقا دارای یک مؤلفه باشد، درغیراین‌صورت G را ناهمبند نامند.

تعریف ۱۹.۲.۱. گراف ساده‌ای را که در آن هر جفت از رأس‌های متمایز بوسیله‌ی یک یال به‌هم متصل باشند را گراف کامل می‌نامند و با K_n نشان می‌دهند، که n تعداد رئوس گراف می‌باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱. گراف G را دوبخشی می‌نامند هرگاه بتوان مجموعه رئوس G را به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز کرد که هر یال G دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱. گراف دوبخشی کامل، گراف دوبخشی ساده‌ای با افراز (X, Y) می‌باشد که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل است. اگر $| Y |= n$ و $| X |= m$ ، آنگاه گراف دو بخشی کامل را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهند.

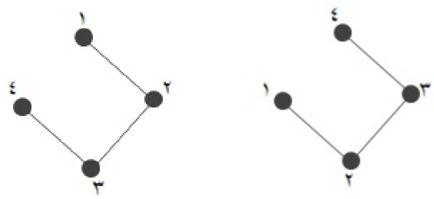
تعریف ۲۲.۲.۱. گراف‌های ساده G و H را یکریخت می‌نامند درصورتی‌که دوسویی $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$ موجود باشد به‌طوری‌که $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

تعریف ۲۳.۲.۱. خودریختی گراف یک یکریختی از گراف به‌روی خودش است. خودریختی‌های گراف G تحت عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند که به آن گروه خودریختی‌های گراف می‌گویند و با

$Aut(G)$ نشان می‌دهند. خودریختی در گراف‌های ساده را می‌توان به‌صورت جایگشتی روی مجموعه رئوس گراف که مجاورت را حفظ می‌کند نیز درنظرگرفت.

ملاحظه ۲۴.۲.۱. *خودریختی γ از گراف G که کمان (u, v) را ثابت نگه می‌دارد را به‌صورت $\gamma \in Aut(G)_{(u,v)}$ نشان می‌دهیم.*

مثال ۲۵.۲.۱. گراف G را با مجموعه رئوس $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و مجموعه یال‌های $\{۱۲, ۲۳, ۳۴\}$ درنظر بگیرید. گراف G دارای دو خودریختی است، یکی جایگشت همانی و دیگری جایگشتی که رأس ۱ را به رأس ۴ و رأس ۲ را با رأس ۳ جابه‌جا کند، که شکل آن در زیر آورده شده است.



شکل ۱.۱: خودریختی‌های گراف G

تعریف ۲۶.۲.۱. گراف G را کمان-انتقالی گویند هرگاه $Aut(G)$ روی مجموعه کمان‌های G به‌طور انتقالی عمل کند.

تعریف ۲۷.۲.۱. گراف G را رأس-انتقالی گویند هرگاه $Aut(G)$ روی مجموعه رئوس G به‌طور انتقالی عمل کند.

تعریف ۲۸.۲.۱. گراف G را یک-منتظم می‌نامند اگر $Aut(G)$ روی مجموعه کمان‌های G به‌طور انتقالی و نیم-منتظم عمل کند.

۳.۱ گراف کیلی

تذکر ۱.۳.۱. *تمام مطالب ارجاع داده نشده این بخش به مراجع [۴] و [۱۲] باز می‌گردد.*

فرض کنید Γ یک گروه متناهی با عنصر همانی ۱ است و فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از Γ باشد با این ویژگی که $1 \notin S$ و برای هر $s \in S$، $s^{-1} \in S$.

تعریف ۲.۳.۱. گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ گراف ساده‌ای است که مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$V(G) = \Gamma \quad \text{و} \quad E(G) = \Big\{\{g, h\} \ \mid \ g^{-1}h \in S\Big\}$$

لم ۳.۳.۱. *گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ یک گراف همبند است اگر و تنها اگر S یک مجموعه‌ی مولد برای G باشد.*

برهان. $(\Rightarrow)$ کافیست نشان دهیم از رأس ۱ به هر رأس دلخواه a از G مسیری در G وجود دارد. ازآنجایی‌که مجموعه‌ی S مولدی برای G است لذا هر رأس G را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضربی از عناصر S نوشت. لذا $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ وجود دارند که $a = s_1 s_2 \ldots s_k$. از آنجایی که یال‌های $\{1, s_1\}$، $\{s_1, s_1 s_2\}$، ... و $\{s_1 s_2 \ldots s_{k-1}, s_1 s_2 \ldots s_k\}$ در $E(G)$ موجود می‌باشند، لذا بین رأس ۱ و رأس دلخواه a از G مسیری موجود است، بنابراین گراف کیلی G همبند است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید $g \in \Gamma$ دلخواه و ثابت باشد. چون G همبند است، مسیری بین g و ۱ وجود دارد. فرض کنید

$$1 - s_1 - s_1 s_2 - \ldots - s_1 \ldots s_k = g$$

مسیری بین g و ۱ باشد که در آن $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$. بنابراین S یک مجموعه‌ی مولد برای Γ است.

$\square$

تذکر ۴.۳.۱. *با توجه به لم قبل در سرتاسر این پایان‌نامه S را یک مجموعه‌ی مولد برای Γ درنظر می‌گیریم.*

قضیه ۵.۳.۱. **(۱)** *گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ رأس-انتقالی است.*

(۲) *فرض کنید π یک خودریختی گروهی از Γ باشد به‌طوری‌که $\pi(S) = S$، آنگاه π، به‌عنوان جایگشتی از رئوس $Cay(\Gamma, S)$، یک خودریختی گرافی است که رأس ۱ را ثابت نگه می‌دارد.*

برهان. **(۱)** برای هر $g \in \Gamma$، جایگشت $\overline{g}$ از $V(G) = \Gamma$ را با ضابطه‌ی $\overline{g}(h) = gh \ (h \in \Gamma)$ تعریف می‌کنیم. این جایگشت یک خودریختی از G است، زیرا

$$\{h, k\} \in E(G) \Rightarrow h^{-1}k \in S$$

$$\Rightarrow (gh)^{-1}(gk) = h^{-1}k \in S$$

$$\Rightarrow \{\overline{g}(h), \overline{g}(k)\} \in E(G)$$

مجموعه‌ی همه‌ی$\overline{g}$ ها گروه $\overline{\Gamma}$ (یکریخت با Γ) را می‌سازد که زیرگروهی از گروه همه‌ی خودریختی‌های $Cay(\Gamma, S)$ است. حال ازآنجایی‌که برای هر $h_1, h_2 \in \Gamma$، با قرار دادن $g = h_2h_1^{-1}$ داریم $\overline{g}(h_1) = h_2$، بنابراین $\overline{\Gamma}$ روی مجموعه رئوس G به‌طور انتقالی عمل می‌کند.

(۲) از آنجایی‌که π یک خودریختی گروهی است، π رأس ۱ را ثابت نگه‌می‌دارد به‌علاوه π یک خودریختی گرافی است زیرا

$$\{h, k\} \in E(G) \Leftrightarrow h^{-1}k \in S$$

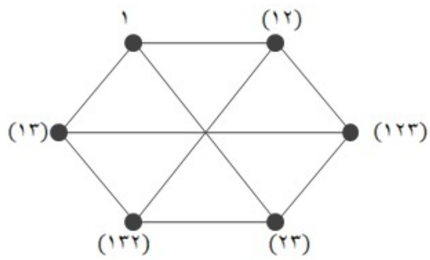
$$\Leftrightarrow \pi(h^{-1}k) \in S$$

$$\Leftrightarrow \pi(h^{-1})\pi(k) \in S$$

$$\Leftrightarrow \{\pi(h), \pi(k)\} \in E(G).$$

□

مثال ۶.۳.۱. در گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$، Γ را گروه متقارن $S_۳$ و S را مجموعه‌ی $\{(۱\ ۲), (۲\ ۳), (۱\ ۳)\}$ درنظربگیرید. دراین‌صورت گراف کیلی $Cay(S_۳, S)$ یکریخت با $K_{۳,۳}$ می‌باشد. که شکل آن در صفحه‌ی بعد آورده شده است.

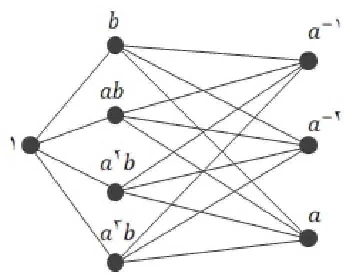


شکل ۲.۱: گراف کیلی $G = Cay(S_۳, \{(۱\ ۲), (۲\ ۳), (۱\ ۳)\})$

تعریف ۷.۳.۱. برای $n \geq ۲$، گروه دووجهی D_n گروهی از مرتبه‌ی $۲n$ است که به‌صورت زیر مشخص می‌شود.

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^۲ = ۱\ , \ bab = a^{-۱} \rangle$$

مثال ۸.۳.۱. گراف کیلی $G = Cay(\Gamma, S)$ برای $\Gamma = D_۴$ و $S = \{b, ab, a^۲b, a^۳b\}$ به‌صورت زیر رسم می‌شود.



شکل ۳.۱: گراف کیلی $G = Cay(D_۴, \{b, ab, a^۲b, a^۳b\})$

تعریف ۹.۳.۱. $\{\alpha \in Aut(\Gamma) \mid \alpha(S) = S\}$ زیرگروهی از $Aut(\Gamma)$ است که S را مجموعه‌وار ثابت نگه‌می‌دارد این مجموعه را $Aut(\Gamma, S)$ می‌نامند. به‌علاوه $Aut(\Gamma, S)$ زیرگروهی از پایدارساز عنصر همانی در $Aut\Big(Cay(\Gamma, S)\Big)$ می‌باشد.

تعریف ۱۰.۳.۱. گراف کیلی $Cay(\Gamma, S)$ را نرمال گویند هرگاه انتقال چپ $L(\Gamma)$ از Γ زیرگروه نرمالی از $Aut\Big(Cay(\Gamma, S)\Big)$ باشد.