دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

جبرهای مشبکه‌ای استلزامی

نگارش:

انسیه مقیمی

استاد راهنما:

دکتر علی معدنشکاف

استاد مشاور

دکتر رحمان بهمنی

آبان ۱۳۸۹

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

تشکرو قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی وقفه و راهنمایی‌های ارزشمند استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر علی معدنشکاف در راستای نگارش این پایان‌نامه کمال تشکر و سپاس‌گزاری را داشته باشم.

همچنین از داوران محترم این پایان نامه جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی و سرکار خانم دکترناهید اشرفی که راهنمایی های ایشان نقش موثری در هرچه بهتر شدن این رساله داشت تقدیر و تشکرمی‌نمایم.

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی‌شان

به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امید بخش وجودشان

به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند،

تقدیم به :

پدر بزرگوار و مادرمهربانم

چکیده

در این پایان نامه یکی از ساختارهای جبری منطبق بر منطق غیرکلاسیک، به نام جبرهای مشبکه‌ای استلزامی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با تکیه بر مراجع [۹]، [۱۳] و [۱۵] فیلتر، فیلتر استلزامی، فیلتر اول، فیلتر ماکزیمال، فیلتر مثبت و فیلتر شرکت‌پذیر را دراین جبرها تعریف و ویژگی‌ها و روابط بین آن‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم. ضمن بررسی رابطه‌ی این جبرها با $MV-$ جبرها خواهیم دید رسته‌ی جبرهای مشبکه‌ای استلزامی با رسته‌ی $MV-$ جبرها و در نتیجه با رسته‌ی گروه‌های مشبکه‌ای مرتب جابجایی با عضو یکه‌ی قوی هم‌ارز است. همچنین با بکارگیری مفهوم مجموعه‌های فازی در این جبرها فیلترهای فازی و فیلترهای استلزامی فازی را معرفی و ویژگی‌های آن ها را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: جبر مشبکه‌ای استلزامی، $H-$ جبر مشبکه‌ای استلزامی، فیلتر، فیلتر استلزامی، فیلتر اول، $MV-$ جبر، مجموعه‌ی فازی.

مقدمه

منطق غیر کلاسیک ابزاری مهم برای علم کامپیوتر و هوش مصنوعی در برخورد با اطلاعات مبهم و غیر قطعی است. منطق چند ارزشی نیز که به نوعی گسترشی از منطق کلاسیک است در راستای منطق غیر کلاسیک قرار می‌گیرد. به منظور تحقیق در مورد سیستم‌های منطقی چند ارزشی که به آن‌ها ارزش گزاره‌ای در یک مشبکه می‌دهند، در سال ۱۹۹۰، یانگ یو[۱]، مفهوم جبرهای مشبکه‌ای استلزامی را با ترکیب مفهوم مشبکه و جبر استلزامی معرفی و به برخی از ویژگی‌های این جبرها اشاره کرد. پس از آن این جبرهای منطقی به طور گسترده‌تر مورد بررسی قرار گرفتند. ابتدا رده مهمی از جبرهای مشبکه‌ای استلزامی ($H-$ جبرهای مشبکه‌ای استلزامی) معرفی شدند. سپس با توجه به نقش مهم نظریه‌ی فیلترها دربررسی و گسترش یک جبر، فیلتر، فیلتر استلزامی، فیلتر مثبت و شرکت‌پذیر، فیلتر اول و فیلتر ماکزیمال در این جبرها معرفی و روابط بین آن‌ها بررسی شدند.

پایان نامه حاضر نگارشی است در چهار فصل که به تحلیل و بررسی جبرهای مشبکه‌ای استلزامی می‌پردازد. در فصل اول سعی شده است مفاهیم و تعاریفی که در نظر اول و برای فهم بهتر مطالب لازم است، به صورت یادآوری گنجانده شود. تعاریف و قضایای این فصل را از [۱]، [۲] و [۱۸] آورده‌ایم. فصل دوم را به تعریف و بررسی ساختار جبرهای مشبکه‌ای استلزامی اختصاص داده‌ایم. در بخش اول جبرهای مشبکه‌ای استلزامی و $H-$ جبر مشبکه‌ای استلزامی تعریف می‌شوند. خواهیم دید که $H-$ جبرهای مشبکه‌ای استلزامی با جبرهای بولی معادلند. در بخش دوم تعریفی دیگر از جبرهای مشبکه‌ای استلزامی و تنها بر پایه یک عملگر یعنی عملگر استلزام را خواهیم دید. در بخش سوم همریختی استلزامی همریختی مشبکه‌ای استلزامی و همچنین با تعریف عملگرهای $\otimes$ و $\oplus$ در این جبرها، $\otimes-$ همریختی‌ها را تعریف و رابطه‌ی بین آن‌ها را بررسی خواهیم کرد. در بخش چهارم و مهمترین بخش این فصل فیلترها و انواع آن‌ها را دریک جبر مشبکه‌ای استلزامی تعریف و روابط بین آن‌ها را بدست می آوریم و در ادامه همنهشتی روی جبرهای مشبکه‌ای استلزامی را تعریف و با استفاده از همنهشتی متناظر با یک فیلتر جبر مشبکه‌ای استلزامی خارج قسمتی را می‌سازیم و از این حیث نیز

---

[۱] Yung Xu

جبرهای مشبکه‌ای استلزامی را مطالعه می‌کنیم. مراجع [۵, ۶, ۹, ۱۳, ۱۵, ۲۲].

در بخش آخر از این فصل نیز رابطه بین نیم‌گروه‌های $(L, \otimes)$ و $(L, \oplus)$ و نیم‌گروه الحاقی $M(L, o, ۱_L)$ را بیان می‌کنیم. مرجع [۲۷].

در فصل سوم ضمن معرفی رسته جبرهای مشبکه‌ای استلزامی خواهیم دید جبرهای مشبکه‌ای استلزامی و $MV-$ جبرها رسته‌های هم‌ارزند. با توجه به هم ارز بودن رسته $MV-$ جبرها و رسته گروه‌های مشبکه‌ای مرتب جابجایی با عضو یکه قوی ($l-$ گروه‌ها) هم‌ارزی رسته جبرهای مشبکه‌ای استلزامی و $l-$ گروه‌ها نمایان می‌شود. مطالب این فصل گرفته شده از [۴, ۲۰, ۲۷, ۳۱] است.

در فصل چهارم نیز با توجه به کاربرد روز افزون نظریه مجموعه‌های فازی در علوم و فناوری‌های جدید فیلتر و فیلتر استلزامی را از منظر منطق فازی نیز تعریف و روابط بین آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم. مطالب این فصل را از مراجع [۱۱, ۳۰] گرفته‌ایم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به مفاهیم و تعاریفی که در فصل‌های بعدی مورد نیازاست اشاره می‌کنیم.

۱.۱ مشبکه

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم L یک مجموعه ناتهی و R رابطه‌ای دوتایی روی آن باشد. R را هم‌ارزی می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ شرایط زیر برقرار باشد.

۱) xRx،

۲) اگر xRy آن‌گاه yRx،

۳) اگر xRy و yRz آن‌گاه xRz.

تعریف ۲.۱.۱ رابطه‌ی دوتایی R را رابطه‌ی ترتیب جزئی گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ شرایط زیر برقرار باشد.

۱) xRx،

۲) اگر xRy و yRx آن‌گاه $x = y$،

۳) اگر xRy و yRz آن‌گاه xRz.

علاوه براین اگر برای هر $x, y \in L$ داشته باشیم xRy یا yRx آن‌گاه R را رابطه ترتیب کلی گوییم و L را

یک زنجیر یا مجموعه کلی مرتب می‌نامیم.

معمولاً رابطه‌ی ترتیب جزئی R روی مجموعه دلخواه L را با علامت $\leq$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم $(L, \leq)$ مجموعه جزئی مرتب و $S \subseteq L$ باشد. عضو $u \in L$ را یک کران بالا برای S می‌گوییم هرگاه برای هر $s \in S$، $s \leq u$. کوچکترین کران بالا برای S که آن‌را با $\bigvee S$ نمایش می‌دهیم نیز کران بالای $u_\circ$ است که به ازای هر کران بالای دیگر u از S داشته باشیم $u_\circ \leq u$. $v \in L$ را کران پایین برای S گوییم هرگاه برای هر $s \in S$، $v \leq s$. بزرگترین کران پایین برای S نیز که آن‌را با $\bigwedge S$ نمایش می‌دهیم کران پایین $v_\circ$ است که برای هر کران پایین دیگر v از S داشته باشیم $v \leq v_\circ$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید L مجموعه جزئی مرتب با رابطه ترتیب جزئی $\leq$ باشد. اگر برای هر $x, y \in L$ کوچکترین کران بالای x, y موجود باشد آن‌را با $x \vee y$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه بزرگترین کران پایین x, y را در صورت وجود با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید $(L, \leq)$ مجموعه جزئی مرتب باشد. اگر هر زیر مجموعه از L، $\bigwedge$ و $\bigvee$ در L داشته باشد آن‌گاه L را مجموعه جزئی مرتب کامل می‌گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ مجموعه جزئی مرتب L همراه با رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ را که برای هر $x, y \in L$، $x \vee y$ و $x \wedge y$ موجود باشند مشبکه می‌نامیم.

مثال ۷.۱.۱ اگر X یک مجموعه باشد مجموعه زیر مجموعه‌های آن با ترتیب مشمولیت $(\subseteq)$ یک مشبکه است.

در ادامه تعریف دیگری از مشبکه‌ها که با تعریف قبل معادل است را خواهیم دید.

تعریف ۸.۱.۱ مجموعه ناتهی L همراه با دو عمل دوتایی $\vee$ و $\wedge$ روی L را مشبکه می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ داشته باشیم:

۱) $x \vee y = y \vee x$ و $x \wedge y = y \wedge x$،

۲) $x \vee x = x$ و $x \wedge x = x$،

۳) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ و $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$،

۴) $x \wedge (x \vee y) = x$ و $x \vee (x \wedge y) = x$.

مثال ۹.۱.۱ برای هر دو عدد طبیعی a, b، $a \vee b$ را کوچکترین مضرب مشترک a, b و $a \wedge b$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترک a, b تعریف می‌کنیم. با این تعریف مجموعه اعداد طبیعی به همراه $\vee, \wedge$ یک مشبکه است.

قضیه ۱۰.۱.۱ هر دو تعریف ٦.۱.۱ و ۸.۱.۱ از مشبکه‌ها با هم معادلند.

برهان: مرجع [۲]. ■

قضیه ۱۱.۱.۱ اگر $(L, \vee, \wedge)$ یک مشبکه باشد، آن‌گاه $(L, \wedge, \vee)$ نیز مشبکه است.

برهان: مرجع [۲] را ببینید. ■

مشبکه $(L, \wedge, \vee)$ را دوگان مشبکه $(L, \vee, \wedge)$ می‌گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱ مشبکه L را در نظر بگیرید. اگر L به عنوان مجموعه جزئی مرتب، کامل باشد آن‌را مشبکه کامل می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ مشبکه L را توزیع‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

۲) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

فرض کنید L مشبکه کامل باشد. می‌گوییم L در شرط توزیع‌پذیری نامتناهی $\wedge$ روی $\vee$ صادق است هرگاه:

$$x \wedge (\bigvee_{j\in J} x_j) = \bigvee_{j\in J} (x \wedge x_j)$$

تعریف ۱۴.۱.۱ در مشبکه L، ۰ و ۱ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین عضو L تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر برای هر $x \in L$، $x \wedge 0 = 0,\ x \wedge 1 = x,\ x \vee 0 = x,\ x \vee 1 = 1$.

مشبکه L را کران‌دار گوییم هرگاه $0, 1 \in L$.

مثال ۱۵.۱.۱ مشبکه‌های متناهی و همچنین مجموعه اعداد حقیقی با ترتیب معمولی (البته با لحاظ کردن $-\infty, +\infty$) نمونه‌هایی از مشبکه‌های کامل می‌باشند.

تعریف ۱۶.۱.۱ مشبکه L را متمم‌دار گوییم هرگاه برای هر x در L عضوی مانند x^* موجود باشد به طوری که $x \wedge x^* = 0$ و $x \vee x^* = 1$.

مثال ۱۷.۱.۱ اگر X یک مجموعه باشد، مجموعه زیر مجموعه‌های آن با ترتیب مشمولیت یک مشبکه متمم‌دار است.

تعریف ۱۸.۱.۱ مشبکه L را در نظر بگیرید. مجموعه $\{x \in L;\ \ a \leq x \leq b\}$ را یک بازه در L می‌نامیم و آن‌را با $[a, b]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید L یک مشبکه‌ی کران‌دار باشد. $F \subseteq L$ فیلتر مشبکه است هرگاه:

۱) $1 \in F$،

۲) اگر $x \leq y$ و $x \in F$ آن‌گاه $y \in F$،

۳) اگر $x, y \in F$ آن‌گاه $x \wedge y \in F$.

تعریف ۲۰.۱.۱ در مشبکه‌ی کران‌دار L، $I \subseteq L$ ایدال مشبکه است هرگاه:

۱) $0 \in I$،

۲) اگر $x \leq y$ و $y \in I$ آن‌گاه $x \in I$،

۳) برای هر $x, y \in I$، $x \vee y \in I$.

تعریف ۲۱.۱.۱ برای مشبکه‌های کران‌دار L_1 و L_2، تابع $f : L_1 \to L_2$ همریختی مشبکه‌ای است هرگاه داشته باشیم $f(0) = 0$، $f(1) = 1$ و همچنین

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad , \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

همریختی مشبکه‌ای f را یکریختی مشبکه‌ای گوییم و می‌نویسیم $L_1 \simeq L_2$، هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱ اگر P_1 و P_2 دو مجموعه جزئی مرتب باشند و α تابعی از P_1 به P_2 باشد. α را حافظ ترتیب می‌گوییم اگر از $x \leq y$ نتیجه شود $\alpha(x) \leq \alpha(y)$.

قضیه ۲۳.۱.۱ مشبکه های L_1, L_2 را در نظر بگیرید. $L_1 \simeq L_2$ اگر و تنها اگر تابع دوسویی $\alpha : L_1 \to L_2$ وجود داشته باشد به طوری‌که α و α^{-1} حافظ ترتیب باشند.

برهان: به مرجع [۲] مراجعه کنید. ■

تعریف ۲۴.۱.۱ زیر مجموعه A از مشبکه L را مجموعه‌ای $\vee-$ بسته گوییم هرگاه برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $x \vee y \in A$.

۲.۱ جبرها

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید A یک مجموعه جزئی مرتب باشد. تابع $f: A \to A$ که برای هر $a \in A$ داریم $f^{۲}(a) = f(f(a)) = a$ را یک برگشت[۱] روی A می‌گوییم.
برگشت f ترتیب عکس کننده[۲] است هرگاه برای $x \leq y$ داشته باشیم $f(x) \geq f(y)$.

تعریف ۲.۲.۱ مجموعه ناتهی A را در نظر بگیرید. هر نگاشت f از A^n به A را یک عمل n تایی روی A می‌گوییم. توجه کنید که منظور از A^n، $\underbrace{A \times A ... \times A}_{n}$ است.
اگر $n = ۰$ باشد f را یک عمل پوچ یا صفرتایی و اگر $n = ۱$ آن‌گاه f را عملی یکانی می‌گوییم.

تعریف ۳.۲.۱ جبر A جفت (A, F) است که در آن A یک مجموعه ناتهی و F مجموعه‌ای از عمل‌ها روی A است. به‌طور معمول اعضای F را با λ_A نمایش می‌دهیم.
اگر $\lambda_A : A^{n_\lambda} \to A$ آن‌گاه n_λ را رتبه λ_A می‌نامیم. بدین ترتیب F توسط یک مجموعه مثل Ω، اندیس دار شده است. خانواده $\tau = (n_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ را نوع جبر A می‌نامیم.

مثال ۴.۲.۱

۱) گروه G مجموعه‌ای با عمل دوتایی $f: G^{۲} \to G$ که $f(x, y) = x * y$ و عمل یکانی $g: G \to G$ که $g(x) = x^{-۱}$ و عمل صفرتایی e یک جبر از نوع $(۲, ۱, ۰)$ است.

۲) مشبکه $(L, \vee, \wedge)$ یک جبر از نوع $(۲, ۲)$ است.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید B مجموعه‌ای ناتهی و $\vee, \wedge$ اعمال دوتایی روی B و $'$ عمل یکانی روی آن باشد. $(B, \vee, \wedge, ', ۰, ۱)$ را یک جبر بولی می‌گوییم هرگاه:

---
[۱] involution
[۲] order-reversing

۱) $(B, \vee, \wedge)$ مشبکه‌ای توزیع‌پذیر باشد.

۲) برای هر $x \in B$، $x \vee 1 = 1$ و $x \wedge 0 = 0$.

۳) برای هر $x \in B$، داشته باشیم $x \vee x' = 1$ و $x \wedge x' = 0$. به عبارت دیگر هر مشبکه توزیع‌پذیر و متمم‌دار یک جبر بولی است.

تعریف ۶.۲.۱ اگر A و B جبرهای از نوع $\tau = (n_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ باشند، نگاشت $\alpha : A \to B$ را همریختی جبرها می‌نامیم هرگاه برای $a_1, ..., a_n \in A$ داشته باشیم:

$$\alpha(\lambda_A(a_1, a_2, ..., a_n)) = \lambda_B(\alpha(a_1), ..., \alpha(a_n)).$$

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید B, A جبرهایی از نوع $\tau = (n_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ باشند. حاصل‌ضرب A و B جبر $C = (A \times B, (\lambda_c)_{\lambda \in \Omega})$ است که برای هر λ_C و $a_i \in A$ و $b_i \in B$ داریم:

$$\lambda_C((a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)) = (\lambda_A(a_1, a_2, ..., a_n), \lambda_B(b_1, b_2, ..., b_n))$$

جبر C را حاصل‌ضرب A و B می‌نامیم.

تعریف ۸.۲.۱ نگاشت

$$\pi_i : A_1 \times A_2 \to A_i, \qquad i \in \{1, 2\},$$

که $\pi_i((a_1, a_2)) = a_i$ برای هر$(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$، نگاشت تصویری روی $i-$ امین مولفه $A_1 \times A_2$ نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید A جبری از نوع $\tau = (n_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ باشد. رابطه هم ارزی θ روی A که در ویژگی زیر صدق کند را همنهشتی روی A می‌گوییم.

برای $a_i, b_i \in A$ اگر $a_i \theta b_i$، برای هر $1 \leq i \leq n$ آن‌گاه $\lambda_A(a_1, ..., a_n) \theta \lambda_A(b_1, ..., b_n)$.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنید θ_1 و θ_2 همنهشتی روی جبر A باشند.
$(a,b) \in \theta_1 o \theta_2$ اگر و تنها اگر $c \in A$ باشد به طوری که $(a,c) \in \theta_1$ و $(c,b) \in \theta_2$.

تعریف ۱۱.۲.۱ جبر A را در نظر بگیرید. اگر برای هر دو همنهشتی θ_1 و θ_2 روی آن A داشته باشیم $\theta_1 o\, \theta_2 = \theta_2 o\, \theta_1$، آن‌گاه می‌گوییم جبر A در شرط همنهشتی جایگشت‌پذیر[۳] صادق است.

$MV-$ جبرها

تعریف ۱۲.۲.۱ جبر $(A, \oplus, \odot, ^*, \circ, 1)$ از نوع $(2, 2, 1, \circ, \circ)$ را $MV-$ جبر می‌نامند هرگاه A مجموعه ناتهی صادق در شرایط زیر باشد:

۱) $x \oplus y = y \oplus x$

۲) $x \odot y = y \odot x$

۳) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

۴) $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$

۵) $x \oplus x^* = 1$

۶) $x \odot x^* = \circ$

۷) $x \odot 1 = x \ , \ x \oplus 1 = 1$

۸) $x \odot \circ = \circ \ , \ x \oplus \circ = x$

۹) $(x \oplus y)^* = x^* \odot y^*$

۱۰) $(x \odot y)^* = x^* \oplus y^*$

۱۱) $(x^*)^* = x$

---
[۳] congruence-permutable

۱۲) $0^* = 1$

۱۳) $x \vee y = y \vee x$

۱۴) $x \wedge y = y \wedge x$

۱۵) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

۱٦) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge z) \wedge z$

۱۷) $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$

۱۸) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$

توجه کنید که در اینجا منظور از $x \vee y$ و $x \wedge y$ به ترتیب $(x \odot y)^* \oplus y$ و $(x \oplus y^*) \odot y$ می‌باشد.

روی $MV-$ جبر $(A, \oplus, \odot, ^*, 0, 1)$ رابطه دوتایی $\leq$ را برای هر $x, y \in A$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \vee y = y \iff x \leq y$$

قضیه ۱۳.۲.۱ $MV-$ جبر $(A, \oplus, \odot, ^*, 0, 1)$ را در نظر بگیرید:

۱) $\leq$ یک رابطه ترتیب جزئی است و $x \vee y$ و $x \wedge y$ به ترتیب کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین برای هر $x, y \in A$ می‌باشند. همچنین $0 \leq x \leq 1$ برای هر $x \in A$.

۲) $(A, \vee, \wedge, ^*)$ مشبکه توزیع‌پذیر و "$*$" یک برگشت ترتیب عکس کننده است.

برهان: [۴] و [۲۸]. ■

نکته ۱۴.۲.۱ در $MV-$ جبرها داریم $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x^* \oplus y = 1$.(مرجع [۴] را ببینید.)

لم ۱۵.۲.۱ جبر $\mathbf{A}= (B, \oplus, \odot^*, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. $\mathbf{A}$ یک $MV-$ جبراست اگر و تنها اگر برای هر $x, y, z \in A$، ۱) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

۲) $x \oplus 0 = x$

۳) $x \oplus y = y \oplus x$

۴) $x \oplus 1 = 1$

۵) $(x^*)^* = x$

٦) $0^* = 1$

۷) $x \oplus x^* = 1$

۸) $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (x \oplus y^*)^* \oplus x$

۹) $x \odot y = (x^* \oplus y^*)^*$

برهان: مرجع [۱۹]. ■

فرض کنید $\mathbf{A_1}= (A_1, \oplus, \odot, ^*, 0_1, 1_1)$ و $\mathbf{A_2}= (A_2, \oplus, \odot, ^*, 0_2, 1_2)$ دو $MV-$ جبر باشند. تابع $\psi : A_1 \to A_2$ را همریختی $MV-$ جبرها می‌گوییم هرگاه ψ حافظ $\oplus$، $\odot$ و * باشد و $\psi(1_1) = 1_2$ و $\psi(0_1) = 0_2$.

۳.۱ رسته

تعریف ۱.۳.۱ یک رسته $\mathcal{C}$ عبارت است از:

۱) رده‌ای از اشیاء مانند $A, B, C, ...$

۲) رده‌ای از مجموعه‌های از هم جدا که با $hom(A, B)$ نموده می‌شود به طوری‌که برای هر جفت از اشیاء در $\mathcal{C}$ مانند A و B عنصر f از $hom(A, B)$ را یک ریخت از A به B نامیده و با $f : A \to B$ نمایش می‌دهیم.

۳)به ازای هر سه شی A, B و C یک عمل ترکیب $\circ$ وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود: