بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض گرایش جبر جابجایی

عنوان

Δ- کاهش ها و Δ- بستارهای یک ایده آل نسبت به یک مدول آرتینی

استادان راهنما

دکتر علی اکبر مهرورز

دکتر عظیم اهری

استاد مشاور

دکتر رضا نقی پور

پژوهشگر

مهناز حاتمی خسرقی

شهریورماه ۸٦

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

و همسر و پسرم حسین

آنان که همواره حامی و پشتیبانم بودند

تشکر و قدردانی

لطف بی پایانی که جبرانش ممکن نیست

با سپاس و تشکر از استادان گرامی جناب آقای دکتر علی اکبر مهرورز و آقای دکتر عظیم اهری

که در نگارش پایانامه مرا راهنمایی نمودند.

باتقدیر و تشکر فراوان از استاد فرزانه و گرامی جناب آقای دکتر رضا نقی پور که مشاوره پایانامه را بر عهده داشتند

و در طول نگارش پایانامه همیشه رهنمودهای دانشمندانه شان یارویاور من بود.

تشکر از سرکار خانم دکتر منیره صدقی که داوری پایانامه را پذیرفتند.

و با صمیمانه ترین سپاس ها از خواهر و برادرانم

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام او که زینت زبانها و یادگار جانها نام او .

به نام او که آسایش دلها و آرایش کارها نام او .

به نام او که روح روح ها و مفتاح فتوحها نام او .

به نام او که فرمانها روان و حالها بر نظام از نام او .

بس قفلها که به این نام از دلها برداشته ، بس رقمهای محبت که به این نام در سینه انگاشته ،

بس بیگانگان که به وی آشنا گشته ،بس غافلان که به وی هشیار شده، بس مشتاقان که به این نام دوست را یافته .

هم یاد است و و هم یادگار ، به نازش میدار تا وقت دیدار.

و درود بر محمد مصطفی (ص) که امین اسرار ربوبیت است ونیز بر جمله یاران اهل بیت وی .

نام خانوادگی دانشجو: حاتمی خسرقی   نام : مهناز

عنوان پایان نامه : Δ- کاهش ها و Δ- بستارهای یک ایده آل نسبت به یک مدول آرتینی

استادان راهنما : دکتر علی اکبر مهرورز، دکتر عظیم اهری

استاد مشاور : دکتر رضا نقی پور

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد   رشته : ریاضی محض   گرایش : جبرجابجایی   دانشگاه : تبریز

دانشکده : علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی : شهریورماه ۸۶   تعداد صفحه : ۸۳

کلید واژه ها : Δ- کاهش، Δ- بستار، Δ- وابسته، عملگر نیم اول، بطورصحیح بسته

چکیده

فرض کنید A یک مدول آرتینی روی حلقه جابجایی R و Δ یک مجموعه بسته ضربی از ایده‌آل‌های غیرصفر R باشد. هدف از این پایان نامه این است که با استفاده ازخاصیت آرتینی A مفهوم مهم Δ- کاهش ها و Δ- بستارهای یک ایده‌آل نسبت به A که در یک خلقه جابجایی توسط راتلیف مغرفی شده، تعمیم واثبات کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که $I \longrightarrow I_{\Delta}^{(A)}$ عملگر نیم اول روی مجموعهٔ ایده‌آل‌های I در R است که در قانون حذف صدق می‌کند. بعلاوه اگر هر ایده‌آل در Δ با تولید متناهی باشد، $I_{\Delta}^{(A)}$ تجزیه‌پذیربوده وهرایده‌آل اول وابستهٔ آن یک ایده‌آل اول وابسته $I_{\Delta}^{(A)}K$ و $(IK)_{\Delta}^{(A)}$ برای هر $K \in \Delta$ است. بالاخره درحالتی که R موضعی کامل (نوتری) و هرایده‌آل در Δ، A- هم منظم باشد نشان می‌دهیم که دنبالهٔ $\{Ass_R \frac{R}{(I^n)_{\Delta}^{(A)}}\}_{n\geq 1}$ از ایده‌آل‌های اول وابسته صعودی و سرانجام ثابت است.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایاننامه بر اساس مقالات زیر گرد آوری شده است .

1. **Ratliff,L.J.,Jr.** $\Delta-$ closures of ideals and rings. *Trans. Amer. Math. Soc. 313:221-247.*

2. **Naghipour, R., Sedghi, M.** $\Delta-$ reductions and $\Delta-$ closures of ideals with respect to an Artinian module. *Comm. Algebra 34:763-777.*

کاهش و بستار صحیح حلقه‌ها و ایده‌آلها یکی از بحث های مهم در هندسه جبری و جبر جابجایی است که در حالت های خاص توسط ریاضیدانان مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در [۱۲]، نورثکات و ریس، کاهش و بستار صحیح یک ایده‌آل در حلقه نوتری و جابجایی R (با همانی غیر صفر) معرفی نموده‌اند. برادمن و شارپ در فصل ۱۸، [۳]، اطلاعاتی درباره ویژگی اساسی کاهش ها و بستارهای صحیح ایده‌آلها ثابت کرده‌اند. این مفاهیم به ایده‌آلها روی یک حلقه جابجایی توسط راتلیف در [۱۵]، توسیع داده شده‌اند. یعنی مفاهیم مهم $\Delta-$ کاهش‌ها و $\Delta-$ بستارهای یک ایده‌آل در یک حلقه جابجایی R توسط راتلیف در [۱۵]، و راتلیف و راش در [۱٦]، معرفی شده‌اند.

فرض کنید R یک حلقه جابجایی (با همانی غیر صفر) باشد. فرض کنید I یک ایده‌آل R باشد. فرض کنید Δ یک مجموعه بسته ضربی از ایده‌آلهای غیر صفر R باشد. $\Delta-$ بستار I، با نماد I_Δ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_\Delta := \cup_{K\in\Delta}(IK :_R K) = \Sigma_{K\in\Delta}(IK :_R K)$$

که یک ایده‌آل R است. گوییم I، Δ بسته است هرگاه $I = I_\Delta$. همچنین I، یک $\Delta-$ کاهش J است هرگاه $I \subseteq J \subseteq I_\Delta$.

در این پایاننامه با استفاده از خاصیت مدول آرتینی A مفهوم مهم $\Delta-$ کاهش و $\Delta-$ بستار یک ایده‌آل نسبت به A که در یک حلقه جابجایی توسط راتلیف معرفی شده، تعمیم می‌دهیم. بالاخره درحالتی که R موضعی کامل (نوتری) و هر ایده‌آل در Δ، $A-$ هم منظم باشد نشان می‌دهیم که دنباله $\{Ass_R \frac{R}{(I^n)^{(A)}_\Delta}\}_{n\geq ۱}$ از ایده‌آل‌های اول وابسته صعودی و سرانجام ثابت است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ رادیکال یک ایده‌آل و لم ناکایاما[۱]

تعریف ۱.۱.۱ اگر R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد، رادیکال I رابصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sqrt{(I)} = \{a \in R \mid a^n \in I \text{ عددطبیعی } n \text{ موجود است که }\}.$$

به ویژه اگر $I = (\circ)$ باشد، در اینصورت $\sqrt{(I)}$ مجموعهٔ همه اعضای پوچتوان R است که با نماد $nil(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ مقطع همه ایده‌آلهای ماکسیمال حلقه $R(\neq \circ)$ رارادیکال جاکبسون[۲] یا به طور ساده‌رادیکال R نامیده و با نماد $rad(R)$ نشان می‌دهیم .

لم ۳.۱.۱ اگر I یک ایده‌آل در حلقهٔ جابجایی R باشد، در اینصورت $\sqrt{(I)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\supseteq I \\ \mathfrak{p}\in Spec(R)}} \mathfrak{p}$ (که در آن Spec(R) مجموعه تمام ایده‌آلهای اول R است).

برهان . مراجعه شود به صفحه ۵۲ ، مرجع [18]. □

تبصره ۴.۱.۱ اگر R یک حلقه و I و J ایده‌آلهای R باشند، داریم

(۱) $I \subseteq \sqrt{I}$.

(۲) $\sqrt{(\sqrt{I})} = \sqrt{I}$.

(۳) $\sqrt{(IJ)} = \sqrt{(I \cap J)} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

(۴) $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$.

(۵) اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R باشد، $\sqrt{(\mathfrak{p}^n)} = \mathfrak{p}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

قضیه ۵.۱.۱ (لم ناکایاما) فرض کنید M یک $R-$ مدول با تولید متناهی وI یک ایده‌آل R باشد. اگر $M = IM$ ، در اینصورت $a \in R$ موجود است بطوریکه $aM = \circ$ و $a \equiv 1 (mod\ I)$. بعلاوه اگر$I \subseteq rad(R)$ باشد، آنگاه $M = \circ$.

برهان. مراجعه شود به صفحه ۸، مرجع [9]. □

تعریف ٦.۱.۱ فرض کنید I و J ایده‌آلهای حلقه جابجایی R باشند. ایده‌آل $(I : J)$ را به صورت زیر

---

[۱] Nakayama

[۲] Jacobson radical

تعریف می‌کنیم

$$(I : J) = \{a \in R \mid aJ \subseteq I\} \ .$$

واضح است که $(I : J)$ یک ایده‌آل R است و $I \subseteq (I : J)$. در حالت خاص که $I = 0$ باشد، $(0 : J) = \{a \in R \mid aJ = 0\}$ رابا علامت $Ann_R J$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۷.۱.۱ فرض کنیم I و J و K ایده‌آلهای حلقه جابجایی R باشند. فرض کنیم $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ خانواده‌ای از ایده‌آلهای R باشد. در اینصورت

(۱) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$.

(۲) $(\cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda : K) = \cap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda : K)$.

(۳) $(J : \Sigma_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} (J : I_\lambda)$.

۲.۱ تجزیه اولیه [۳]

تعریف ۱.۲.۱ ایده‌آل $\mathfrak{q}$ را یک ایده‌آل اولیه در R می‌نامند، هرگاه

(i) $\mathfrak{q} \neq R$.

(ii) $\forall x, y \in R, xy \in \mathfrak{q} \Longrightarrow x \in \mathfrak{q}$ یا $y \in \sqrt{\mathfrak{q}}$.

واضح است که هر ایده‌آل اول، یک ایده‌آل اولیه است.

گزاره ۲.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه در R باشد. در این صورت $\sqrt{\mathfrak{q}}$ یک ایده‌آل اول R شامل $\mathfrak{q}$ است و به ازای هر ایده‌آل اول مانند $\mathfrak{p}$ از R شامل $\mathfrak{q}$ داریم $\sqrt{\mathfrak{q}} \subseteq \mathfrak{p}$. به عبارت دیگر $\sqrt{\mathfrak{q}}$، کوچکترین ایده‌آل اول شامل $\mathfrak{q}$ است .

برهان . مراجعه شود به صفحه ۵۰، مرجع [1]. □

تعریف ۳.۲.۱ اگر $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه در R باشد، دیدیم که $\sqrt{\mathfrak{q}}$ یک ایده‌آل اول R است . اگر قرار دهیم $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. در این صورت $\mathfrak{q}$ را یک ایده‌آل $\mathfrak{p}-$ اولیه در R می‌نامند.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. یک تجزیه اولیه برای $\mathfrak{a}$ عبارت است از مقطع تعداد متناهی از ایده‌آلهای اولیه. یعنی $\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ که به ازای هر i ، $\mathfrak{q}_i$ یک ایده‌آل اولیه است. در این تجزیه اولیه اگر $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ ها متمایز باشند و $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \cap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathfrak{q}_j$، آنگاه تجزیه فوق را مینیمال می‌نامند.

---

[۳] *Primary decomposition*

۳.۱ موضعی‌سازی [۴]

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار و S یک زیر مجموعه R باشد بطوریکه $1 \in S$ و به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$. در این حالت S را یک زیر مجموعه بسته ضربی در R می‌گویند.

لم ۲.۳.۱ فرض کنید S یک زیر مجموعه بسته ضربی از حلقه جابجایی R باشد. رابطه $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall (a,s),(b,t) \in R \times S,\ \ (a,s) \sim (b,t) \Longleftrightarrow \exists\ u \in S; u(ta - sb) = 0$$

در اینصورت $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $R \times S$ می‌باشد.

برهان . مراجعه شود به صفحه ۸۱، مرجع [18]. □

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنید شرایط لم (۲.۳.۱) برقرار باشد. فرض کنید a/s نشان‌دهنده دسته هم‌ارزی (a,s) باشد. یعنی

$$a/s = \{(b,t) \in R \times S; (b,t) \sim (a,s)\}$$

در اینصورت $S^{-1}R$ یک حلقه جابجایی تحت اعمال زیر می‌باشد:

$$a/s + b/t = (ta + sb)/st\ ,\ \ a/s.b/t = ab/st$$

برای هر $a, b \in R$ و $s, t \in S$. حلقه‌$S^{-1}R$ را حلقه کسرهای R نسبت به S می‌نامیم.

برهان . مراجعه شود به صفحه ۸۱ و ۸۲، مرجع [18]. □

مثال ۴.۳.۱ فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار و$\mathfrak{p} \in SpecR$ باشد. فرض کنید $S = R - \mathfrak{p}$. در اینصورت S یک مجموعه بسته ضربی از R است. داریم:

$$S^{-1}R = \{x/s; x \in R, s \notin \mathfrak{p}\}$$

---

[۴] *localization*

$S^{-1}R$ را با نماد $R_\mathfrak{p}$ نشان می‌دهیم. قرار می‌دهیم $\mathfrak{m} := \{x/s; x \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\}$. در اینصورت $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ میدان است. لذا $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکزیمال $R_\mathfrak{p}$ است. چون $\mathfrak{m}$ تنها ایده‌آل ماکزیمال $R_\mathfrak{p}$ است، $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی است. ایده‌آل $\mathfrak{m}$ را با نماد $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۵.۳.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول و $S \subset R$ یک مجموعه بسته ضربی باشد. در اینصورت برای هر $m, m' \in M$ و $s, s' \in S$ تعریف می‌کنیم:

$$(m, s) \sim (m', s') \Longleftrightarrow \exists\ s'' \in S; s''(s'm - sm') = 0$$

در اینصورت $S^{-1}M = \{m/s; m \in M, s \in S\}$ با دو عمل زیر

$$m/s + m'/s' = (s'm + sm')/ss'\ ,\ m/s.m'/s' = mm'/ss'$$

برای هر $m, m' \in M$ و $s, s' \in S$ یک $S^{-1}R-$ مدول می‌شود. $S^{-1}M$ را مدول کسرهای M نسبت به S می‌گویند.

۴.۱ ایده‌آلهای اول وابسته

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد . ایده‌آل $\mathfrak{p}$ از R را یک ایده‌آل اول وابسته [۵] M می‌نامند هرگاه $x(\neq 0) \in M$ موجود باشد بطوریکه $\mathfrak{p} = Ann_R x$.
مجموعهٔ همه ایده‌آلهای اول وابسته M را با علامت $Ass_R(M)$ یا به اختصار $Ass(M)$ نشان می‌دهیم.
پس

$$Ass(M) = \{\mathfrak{p} \in SpecR \mid \mathfrak{p} = Ann_R x;\ x(\neq 0) \in M \text{ برای برخی }\}.$$

مثال ۲.۴.۱ اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R باشد، در اینصورت $Ass_R(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

برهان. اگر $\mathfrak{q} \in Ass_R(R/\mathfrak{p})$، بنا به تعریف $\mathfrak{q} = Ann_R(r+\mathfrak{p})$ بطوریکه $r \notin \mathfrak{p}$. لذا $\mathfrak{q}(r+\mathfrak{p}) = \bar{0}$ در نتیجه $\mathfrak{q}r \subseteq \mathfrak{p}$. چون $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول است و $r \notin \mathfrak{p}$، بنابراین

$$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\ .$$

اما به ازای هر $x \in \mathfrak{p}$ داریم

$$x(r+\mathfrak{p}) = xr + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \Longrightarrow x \in Ann_R(r+\mathfrak{p}) = \mathfrak{q} \Longrightarrow \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\ .$$

لذا $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ و حکم برقرار است. □

لم ۳.۴.۱ فرض کنید M یک مدول روی حلقه نوتری و جابجایی R باشد. فرض کنید S یک زیر مجموعه بسته ضربی از R باشد. در اینصورت

$$Ass_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{\mathfrak{p}S^{-1}R \mid \mathfrak{p} \in Ass_R(M), \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}.$$

برهان. مراجعه شود به صفحه ۱۸۲، مرجع [18] . □

نتیجه ۴.۴.۱ اگر R حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R باشد، داریم

$$\mathfrak{p} \in Ass_R(M) \Longleftrightarrow \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in Ass_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\ .$$

---
[۵] *Associated Prime*

برهان. مراجعه شود به‌صفحه ۳۸، مرجع [9]. □

تبصره ۵.۴.۱ اگر R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R باشد بطوریکه $\mathfrak{p} \in Ass_R(M)$. در اینصورت

(۱) زیر مدولی با تولید متناهی مانند N از M است بطوریکه $R/\mathfrak{p} \cong N$ است.

(۲) اگر N، $R-$ مدول دیگری باشد بطوریکه $N \cong M$ باشد، در اینصورت $Ass_R M = Ass_R N$.

قضیه ۶.۴.۱ فرض کنید R یک حلقه و $\circ \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \circ$ یک رشتهٔ دقیق از $R-$مدولها باشد. در اینصورت

$$Ass(M) \subseteq Ass(M') \cup Ass(M'').$$

برهان. مراجعه شود به صفحه ۳۸، مرجع [9]. □

نتیجه ۷.۴.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری جابجایی و M یک $R-$ مدول باشد. در اینصورت

$$M = \circ \Longleftrightarrow Ass_R(M) = \varnothing.$$

برهان. مراجعه شود به صفحه ۱۸۱، مرجع [18]. □

تعریف ۸.۴.۱ فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. یک مقسوم علیه صفر در R، یک عضو $a \in R$ است بطوریکه $b(\neq \circ) \in R$ موجود باشد بطوریکه $ab = \circ$. عضوی از R که مقسوم علیه صفر نباشد، یک نامقسوم علیه صفر گویند. مجموعه مقسوم علیه های صفر R را با علامت $Zdv(R)$ نشان می‌دهیم.

لم ۹.۴.۱ اگر R یک حلقه نوتری جابجایی و M یک $R-$ مدول باشد که $Z_R(M) := \{a \in R; \exists\, x(\neq \circ) \in M, ax = \circ\}$. در اینصورت $Z_R(M) = \cup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(M)} \mathfrak{p}$.

برهان. مراجعه شود به صفحه ۱۸۱، مرجع [18]. □

قضیه ۱۰.۴.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و $\circ \neq M$ یک $R-$ مدول با تولید متناهی باشد. در اینصورت یک زنجیری به صورت

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$$

از زیر مدولهای M و ایده‌آلهای اول $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ در R موجودند بطوریکه $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ برای $i = 1, 2, ..., n$.

برهان. مراجعه شود به صفحه ۳۹، مرجع [9]. □

قضیه ۱۱.۴.۱ اگر R یک حلقه نوتری و $M \neq 0$ یک R- مدول با تولید متناهی باشد، در اینصورت $Ass_R(M)$ یک مجموعه متناهی است.

برهان. طبق قضیهٔ(۱۰.۴.۱)، رشته های دقیق زیر را داریم

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1/M_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_n \longrightarrow M_n/M_{n-1} \longrightarrow 0$$

حال بنا به قضیه (۶.۴.۱)، داریم $Ass(M_i) \subseteq AssM_{i-1} \cup Ass(M_i/M_{i-1})$. بنا به قضیه (۷.۴.۱)، داریم $AssM_0 = Ass(0) = \varnothing$ وبنا به مثال (۲.۴.۱) و قسمت (۲)، تبصرهٔ (۵.۴.۱)، و قضیه (۱۰.۴.۱)، داریم $Ass(M_i/M_{i-1}) = Ass(R/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$. در نتیجه $Ass(M_n) = Ass(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n\}$ و حکم برقرار است. □

۵.۱ نمایش ثانویه

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد، آنرا یک مدول ثانویه گویند هرگاه، $M \neq 0$ و به ازای هر $r \in R$ اندومورفیسم ضرب توسط r، یعنی $\Phi_r : M \longrightarrow M$ با ضابطه $\Phi_r(m) = rm$، به ازای هر $m \in M$ ، پوشا یا پوچتوان باشد.

گزاره ۲.۵.۱ اگر M یک $R-$ مدول ثانویه باشد در اینصورت $\mathfrak{p} = \sqrt{Ann_R(M)}$ یک ایده‌آل اول در R است.

برهان . فرض کنیم $a, b \in R$ چنان باشند که $ab \in \mathfrak{p}$ و $a \notin \mathfrak{p}$. در این صورت $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(ab)^n \in Ann_R(M)$ و به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $a^k \notin Ann_R(M)$. حال اندومورفیسم $\phi_{a^n} : M \longrightarrow M$ را با ضابطه $\phi_{a^n}(m) = a^n m$ در نظر می گیریم. در این صورت ϕ_{a^n} پوچتوان نیست. زیرا اگر $k \in N$ موجود باشدکه $(\phi_{a^n})^k = 0$، آنگاه به ازای هر $m \in M$، $(\phi_{a^n})^k(m) = 0$. پس به ازای هر $m \in M$ ، $a^{nk}m = 0$. لذا $a \in \sqrt{Ann_R(M)} = \mathfrak{p}$ که تناقض است. در نتیجه بنا به فرض ϕ_{a^n} پوشا است. لذا به ازای هر $y \in M$، $x \in M$ موجود است که $a^n x = y$. لذا $b^n y = b^n a^n x = 0$. بنابراین ، به ازای هر $y \in M$ ، $b^n y = 0$. در نتیجه $b \in \mathfrak{p}$. واضح است که $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل واقعی R است. لذا $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول در R است. □

تعریف ۳.۵.۱ ملاحظه شد که اگر M یک $R-$ مدول ثانویه باشد، $\mathfrak{p} = \sqrt{Ann_R(M)}$ یک ایده‌آل اول در R است. دراینصورت M را یک $R-$ مدول $\mathfrak{p}-$ ثانویه می‌نامند.

تعریف ۴.۵.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. گوییم M دارای یک نمایش ثانویه [۶] است، هرگاه تعداد متناهی زیرمدول ثانویه $M_1, M_2, ..., M_n$ وجود داشته باشند بطوریکه

$$M = M_1 + M_2 + ... + M_n.$$

این نمایش را مینیمال می‌نامند هرگاه

(۱) به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، ایده‌آلهای اول $\mathfrak{p}_i = \sqrt{Ann_R(M_i)}$ دو به دو متمایز باشند.

(۲) به ازای هر $1 \leq j \leq n$ ، داشته باشیم $M_j \not\subseteq \Sigma_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} M_i$.

---

[۶] *Secondary representation*

قضیه ۵.۵.۱ اگر M یک $R-$ مدول آرتینی باشد، در اینصورت دارای نمایش ثانویه است.

برهان . مراجعه شود به صفحه ۴۴، مرجع [9]. □