خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف در فضاهایی که شامل ℓ_1 نمی باشند

توسط

زهرا فضائلی

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ

کارشناسی ارشد ریاضیات محض (آنالیز)

زیر نظر

دکتر علیرضا جانفدا

استاد مشاور

دکتر امان ا... اسدی

۵ مرداد ۱۳۹۰

دانشکدهٔ ریاضی

دانشگاه بیرجند

بسم الله الرحمن الرحیم

این پایان نامه

«اثری» کوچک است، خیلی کوچک و شاید هیچ!

اما به رسم ادب تقدیم به پدر و مادر عزیزم . . .

و تقدیم به استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر علیرضا جانفدا

به نام خداوندی که داشتن او جبران همه ی نداشته‌های من است

می ستایمش، چون لایق ستایش است...

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، خانواده‌ای نصیبم ساخته تا در سایه سار وجودشان بیاسایم و از ریشه ی آن‌ها شاخ و برگ گیرم و در سایه ی وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم.

سپاس گزارم از والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم.

پس از آن بر خود لازم می دانم سپاس بیکران را از تمام کسانی که مرا در پیشبرد این پایان نامه یاری کردند به جا آورم.

از زحمات استاد راهنمایم، معلم اخلاقم جناب آقای دکتر علیرضا جانفدا که با راهنمایی‌ها و هدایت گران بهایشان مرا در تدوین این پایان نامه یاری فرمودند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر امان ا... اسدی که مشاوره ی پایان نامه را به عهده داشتند، از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر محمدرضا میری و جناب آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد به خاطر مطالعه و داوری پایان نامه و هم چنین نماینده ی محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر اسدا... محمودزاده ی وزیری که در جلسه ی دفاعیه ی اینجانب حضور داشتند متشکرم.

و در نهایت از دوستان عزیزم نفیسه خدنگی، جواهر لنگری، عالیه فقهی، اکرم کرمی، مریم احسنی، سودابه شعبانی، نسرین حسینی، الهه رشیدمهر، سمیرا توانایی، سمانه دشت بیاض و نغمه قشلاقی...

خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف در فضاهایی که شامل ℓ_1 نمی باشند

چکیده

مطالعات مربوط به نظریه‌ی خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف در فضاهای برداری توپولوژیک ، [۲]، توسط بارُسو[۱] در سال (۲۰۰۹) آغاز شده است و خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف برای زیرمجموعه‌های محدب به طور ضعیف فشرده از فضاهای باناخ اثبات گردیده است. پس از آن بارسو و پی-کِی-لین[۲]، [۳]، در سال (۲۰۱۰) به بررسی این موضوع برای مجموعه‌های محدب، بسته و کراندار کلی از فضاهای باناخ و البته بیشتر با تأکید بر جنبه‌های هندسی آن پرداخته اند. پی-کی-لین و باروسو ثابت کردند که فضاهای اسپلاند دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف می‌باشند. مطالب این تحقیق در راستا و ادامه‌ی کار نویسندگان مذکور است. بدین ترتیب که با معرفی یک مفهوم جدید در یک فضای باناخ مانند X، تحت عنوان ℓ_1-دنباله‌ها و هم‌چنین تعریف نگاشتی که در نگاه اول بسیار ساده به نظر می‌رسد، متناظر با هر ℓ_1-دنباله، شروع به کار می‌کنیم و در نهایت ارتباط جالبی را به صورت یک شرط لازم و کافی برای اینکه فضای باناخ X دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف باشد و اینکه یک کپی یکریخت با ℓ_1 را شامل نباشد، برقرار می‌کنیم. در نهایت سعی می‌کنیم تا نتایج نقطه‌ی ثابتی را که برای فضاهای باناخ به دست آوردیم، ابتدا به فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب مترپذیر و سپس برای برخی از فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب مترناپذیر تعمیم دهیم.

واژه‌های کلیدی: *خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف، ℓ_1-دنباله، فضای فرشه-اوریسون*

---

[۱] $C.S.Barroso$
[۲] $P.-K.Lin$

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است.
فصل اول تحت عنوان تعاریف مقدماتی و پیش نیازها، به بیان تعاریف، قضایا و نکاتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز داریم.
فصل دوم تحت عنوان خاصیت نقطه‌ی ثابت برای برخی از فضاهای باناخ کلاسیک، مشتمل بر دو بخش است. در بخش اول پس از اثبات چند قضیه در مورد ارتباط خاصیت نقطه‌ی ثابت، با فشردگی یک زیرمجموعه‌ی بسته، محدب و کراندار از $(L^۱[۰,۱], \|\|_۱)$، به یک محک برای فشردگی زیرمجموعه‌های بسته، کراندار و محدب از $\ell_۱$ بر اساس خاصیت نقطه‌ی ثابت دست خواهیم یافت. در بخش دوم ابتدا به معرفی یک مفهوم نسبتاً جدید تحت عنوان $\ell_۱$–پایه‌ی طولپای مجانبی می‌پردازیم و سپس نشان می‌دهیم اگر یک مجموعه‌ی محدب، بسته و کراندار از یک فضای باناخ شامل یک $\ell_۱$–پایه‌ی طولپای مجانبی باشد آن‌گاه این مجموعه خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت‌های آفین غیرانبساطی ندارد.
فصل سوم تحت عنوان خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف در فضاهایی که شامل $\ell_۱$ نمی‌باشند، در واقع مهمترین فصل این پایان‌نامه است و شامل دو بخش است. در این فصل فضاها باناخ فرض می‌شوند. مطالب این فصل برگرفته از یکی از دو مرجع اصلی این تحقیق، [۱۳]، است. در بخش اول تعریف خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف برای یک فضای باناخ را با اقتباس از همین تعریف برای زیرمجموعه‌های بسته، محدب و کراندار از

فضاهای باناخ ارائه می‌دهیم و چند لم مورد نیاز در بخش بعد را بیان و اثبات می‌کنیم. در بخش دوم ماحصل مطالب ارائه شده از ابتدای این فصل را در قالب یک شرط لازم و کافی برای اینکه فضای باناخ X دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف باشد و اینکه شامل یک نسخه‌ی یکریخت با ℓ_1 نباشد، ثابت می‌کنیم.
فصل چهارم تحت عنوان خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف در فضاهای مجرد، مشتمل بر سه بخش است. مطالب این فصل برگرفته از دومین مرجع اصلی این پایان‌نامه، [۴]، می‌باشد. در بخش اول همانطور که در فصل قبل خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف را برای یک فضای باناخ تعریف کردیم، به طور مشابه خاصیت نقطه‌ی ثابت $\sigma(X,Z)$−تقریبی را برای یک فضای برداری توپولوژیک تعریف می‌کنیم. که در آن Z زیرفضایی از X^* است. در این بخش به اثبات یک قضیه‌ی مهم در رابطه با خاصیت نقطه‌ی ثابت $\sigma(X,Z)$−تقریبی در یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که اگر (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف، C زیرمجموعه‌ای ناتهی، محدب و کراندار از X و Z یک زیرفضا از X^* باشد آن‌گاه برای هر نگاشت پیوسته‌ی دنباله‌ای

$$f:(C,\tau)\longrightarrow(\overline{C},\sigma(X,Z)),$$

نقطه‌ی صفر در بستار نسبت به توپولوژی $\sigma(X,Z)$ مجموعه‌ی $\{x-f(x):x\in C\}$ قرار دارد و اگر Z با توپولوژی قوی جدایی‌پذیر باشد، آن‌گاه دنباله‌ای چون (z_n) در C چنان موجود است که $(z_n-f(z_n))$ با توپولوژی $\sigma(X,Z)$ به صفر همگراست. در بخش دوم، تعریف ℓ_1−دنباله‌ها در فضاهای برداری توپولوژیک را مشابه این تعریف در فضاهای باناخ بیان می‌کنیم و مهمترین قضیه‌ی فصل قبل که به آن اشاره شد را به فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب مترپذیر تعمیم می‌دهیم. هم‌چنین یک نسخه‌ی کلی‌تر از ℓ_1−قضیه‌ی روزنتال که در [۷]، ذکر شده را بیان و اثبات می‌کنیم.
در بخش سوم با مقایسه‌ی نتایج اثبات شده در بخش قبل و مطالب فصل سوم، این سؤال را

مطرح می‌کنیم که آیا فرض مترپذیری در بخش قبل ضروری است؟ مثالی را ارائه می‌دهیم که نشان دهنده‌ی اهمیت این فرض است و می‌کوشیم تا نتایج بخش قبل را برای برخی از فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب مترناپذیر ارتقاء دهیم. این فضاها، فضاهای موضعاً محدب مترناپذیری هستند که یک توپولوژی موضعاً محدب متر‌پذیر سازگار با دوگانشان را می‌پذیرند. در واقع پس از تعمیم مهمترین قضیه‌ی فصل سوم به فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب متر‌پذیر، ثابت می‌کنیم اگر (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب هاسدورف باشد، به طوری که یک توپولوژی موضعاً محدب متر‌پذیر سازگار با دوگانش وجود داشته باشد و هم‌چنین C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته، محدب و کراندار از X باشد آن‌گاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته و محدب از C خاصیت نقطه‌ی ثابت تقریبی ضعیف دارد اگر و تنها اگر هر دنباله در C دارای زیردنباله‌ای به طور ضعیف کوشی باشد.

در نهایت مطالب این فصل و این تحقیق را با طرح دو سؤال که همچنان جزء سؤالات باز تلقی می‌شوند، به پایان می‌رسانیم. این سؤالات می‌تواند روشنگر مسیری برای ادامه‌ی کار این پایان نامه باشد.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی و پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و نتایج مقدماتی خواهیم پرداخت که در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند. از این رو نگاهی گذرا به پیش نیازها خواهیم داشت و اغلب قضایا را بدون اثبات بیان خواهیم کرد.

۱.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. فضای نرم‌دار X، که نسبت به متر حاصل از نرم کامل باشد را فضای باناخ می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. الف) : زیرمجموعه‌ی C از فضای برداری X، روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را محدب گوئیم، اگر

$$\forall\lambda \in [0, 1], \qquad \lambda C + (1 - \lambda)C \subseteq C.$$

ب) : زیرمجموعه‌ی Y از X را زیرفضا می‌نامیم، اگر

$$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{F}, \qquad \alpha Y + \beta Y \subseteq Y.$$

پ) : زیرمجموعه‌ی B از X را متوازن نامیم، اگر

$$\forall\alpha \in \mathbb{F}, \quad |\, \alpha \,| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha B \subseteq B.$$

ت) : زیرمجموعه‌ی C از X را مطلقاً محدب نامیم، هرگاه محدب و متوازن باشد.

تعریف ۳.۱.۱. دنباله‌ای از اعداد یا توابع، که به ترتیب به عدد صفر یا تابع صفر همگرا باشد، دنباله‌ی پوچ نامیده می‌شود.

۲.۱ نگاشت‌های غیرانبساطی، انقباضی، $k-$لیپ شیتز یکنواخت و آفین

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و C یک زیرمجموعه از X باشد. در این صورت $T : C \longrightarrow C$ را بر C غیرانبساطی می‌نامند، هرگاه برای هر $x, y \in C$، $\|T(x) - T(y)\| \leqslant \|x - y\|$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ، C یک زیر مجموعه از X و $0 < \alpha < 1$ عددی ثابت باشد. در این صورت نگاشت $T : C \longrightarrow C$ را $\alpha-$انقباضی می‌نامند، هرگاه برای هر دو عضو متمایز C مانند x, y، $\|T(x)-T(y)\| \leqslant \alpha\|x-y\|$. نگاشت ۱-انقباضی را به طور خلاصه انقباضی می‌خوانند.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید (K, d) و (S, ρ) فضاهای متریک باشند. نگاشت $f : K \longrightarrow S$ یک نگاشت لیپ شیتزی نامیده می‌شود اگر

$$sup\{\frac{\rho(f(x), f(z))}{d(x,z)} : x, z \in K\} < \infty.$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید K یک زیرمجموعه از فضای نرم‌دار X باشد و $k > 0$، در این صورت نگاشت $T : K \longrightarrow K$ را نگاشت $k-$لیپ شیتز یکنواخت گویند، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x, y \in K$ داشته باشیم

$$\|T^n(x) - T^n(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

اگر $n = 1$ و $k < 1$، آن‌گاه این نگاشت را لیپ شیتز با ثابت k می‌نامند.

تعریف ۵.۲.۱. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ بر فضای برداری X را آفین می‌نامند، هرگاه نگاشت خطی $T_0 : X \longrightarrow X$ و بردار ثابتی مانند $x_0 \in X$ موجود باشند، که برای هر $x \in X$، $T(x) = T_0(x) + x_0$.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. در این صورت نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته‌ی دنباله‌ای نامیم، در صورتی که به ازای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X، اگر $\{x_n\}$ به نقطه‌ای چون $x \in X$ همگرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(x_n)\}$ در Y، به $f(x)$ همگرا باشد.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. در این صورت نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه‌ی ثابت نگاشت $T : X \longrightarrow X$ می‌نامند، هرگاه $T(x) = x$.

تعریف ۸.۲.۱. زیرمجموعه‌ی K از فضای باناخ X دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت است، هرگاه هر نگاشت غیرانبساطی $T : K \longrightarrow K$ نقطه‌ی ثابت داشته باشد و خواهیم گفت فضای باناخ X دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت است، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی، بسته، محدب و کراندار از آن، از خاصیت نقطه‌ی ثابت برخوردار باشد.

۳.۱ فضای برداری توپولوژیک، توپولوژی ضعیف و تابعک مینکوفسکی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد. زوج (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیک (به اختصار $T.V.S$[۱]) نامیم، اگر اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر تحت توپولوژی τ پیوسته باشند.

از مهمترین فضاهای برداری توپولوژیک می‌توان به فضاهای نرم‌دار و باناخ اشاره کرد.

تعریف ۲.۳.۱. زیرمجموعه‌ی E از فضای برداری توپولوژیک (X, τ) را کراندار می‌نامند، اگر برای هر همسایگی V از صفر، اسکالر حقیقی $s > 0$ موجود باشد، به طوری که برای هر $t > s$، داشته باشیم $E \subseteq tV$.

[۱] *Topological vector space*

تعریف ۳.۳.۱. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای نرمدار (یا لااقل برداری توپولوژیک) را آیزومورفیسم خوانیم اگر T خطی، دوسوئی و پیوسته بوده و T^{-1} نیز پیوسته باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند. نگاشت دوسوئی $\varphi : X \longrightarrow Y$ را یک همئومورفیسم از X به روی Y نامیم، هرگاه φ و φ^{-1} هر دو پیوسته باشند.

تعریف ۵.۳.۱. خانوادهٔ $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک (X,τ) را یک شبکه گوئیم اگر هر مجموعهٔ باز در X، اجتماعی از عناصر این خانواده باشد.

تعریف ۶.۳.۱. فضای برداری توپولوژیک (X,τ) را $\aleph_0$-یکپارچه خوانیم، در صورتی که هر زیرمجموعهٔ جدایی‌پذیر آن دارای شبکهٔ شمارا باشد.

تعریف ۷.۳.۱. گوییم خانوادهٔ $\mathfrak{F}$ از توابع، نقاط مجموعهٔ X را جدا می‌کند، اگر برای هر x و y متمایز در X، تابعی چون f در $\mathfrak{F}$ طوری یافت شود که $f(x) \neq f(y)$.

تعریف ۸.۳.۱. اگر (X,τ) یک فضایی برداری توپولوژیک باشد، X^* دوگان توپولوژیک X و X' دوگان جبری X به صورت زیر تعریف می‌شوند :

X^* مجموعهٔ تمام تابعک‌های خطی و پیوسته بر X می‌باشد و X' مجموعهٔ تمام تابعک‌ها- ی خطی بر X می‌باشد. X^* و X' هر دو فضای برداری اند و $X^* \leqslant X'$.

تعریف ۹.۳.۱. فضای برداری توپولوژیکی که در نقطهٔ صفر، پایهٔ موضعی متشکل از مجموعه‌های باز محدب دارد، فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب می‌نامیم. یا به طور معادل، فضای برداری توپولوژیک X موضعاً محدب نامیده می‌شود، هرگاه توپولوژی آن توسط خانواده‌ای از شبه‌نرم‌ها مانند $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in J}$ با خاصیت $\cap_{\alpha\in J} ker\rho_\alpha = \{0\}$ تولید شود.

تعریف ۱۰.۳.۱. فضای برداری توپولوژیک X که توپولوژی آن توسط یک متر تولید شده باشد، فضای برداری توپولوژیک مترپذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۳.۱. مجموعه‌ی X و خانواده‌ی $\{Y_f\}$ از فضاهای توپولوژیک و خانواده‌ی $\mathfrak{F} = \{f : X \longrightarrow Y_f\}$ از توابع مفروضند. ضعیف‌ترین توپولوژی بر X که همه‌ی عناصر $\mathfrak{F}$ را پیوسته می‌سازد، توپولوژی ضعیف تولید شده توسط خانواده‌ی $\mathfrak{F}$ یا $\mathfrak{F}-$توپولوژی می‌نامند.

در واقع $S = \{f^{-1}(U_f) : U_f \subseteq Y_f\}_{f\in\mathfrak{F}}$ که در آن U_f در Y_f باز است، زیرپایه‌ای برای $\mathfrak{F}-$توپولوژی است و هم‌چنین مجموعه‌ی β متشکل از اشتراک‌های متناهی از عناصر S پایه‌ای برای $\mathfrak{F}-$توپولوژی است و $\mathfrak{F}-$توپولوژی عبارت است از گردایه‌ای متشکل از زیر مجموعه‌هایی از X که اجتماع دلخواهی از عناصر β باشند.

قضیه ۱.۳.۱. *فرض کنید X یک فضای برداری و $\mathfrak{F} \leqslant X'$ زیرفضایی از فضای تابعک‌های خطی بر X باشد که نقاط X را جدا می‌کند، در این صورت $(X, \mathfrak{F}-top)$ یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب است و $\mathfrak{F} = (X, \mathfrak{F} - top)^*$.*

برهان. به صفحه‌ی ۶۴ از [۱۸] رجوع شود. □

تعریف ۱۲.۳.۱. اگر (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد (توپولوژی τ را توپولوژی اصلی یا اولیه می‌نامیم) به طوری که X^* نقاط X را جدا کند، آن‌گاه طبق قضیه‌ی ۱.۳.۱، $(X, X^* - top)$ یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب با دوگان X^* است. اغلب توپولوژی ضعیف حاصل از X^* روی X را با نمادهای $X^* - top$ یا w یا $\sigma(X, X^*)$ یا τ_w نشان می‌دهند و به طور خلاصه آن را توپولوژی ضعیف روی X می‌خوانند.

دلیل این نام گذاری آن است که همواره توپولوژی ضعیف τ_w از توپولوژی اصلی بر X ضعیف‌تر است.

در ادامه هرگاه یک مفهوم توپولوژیک با پسوند ضعیف قید شود، منظور همان مفهوم با توپولوژی ضعیف است.

نکته۱: اگر (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب باشد. دنباله‌ی $\{x_n\}$ به طور ضعیف به نقطه‌ی x میل می‌کند اگر و تنها اگر

$$\forall \Lambda \in X^* \qquad \Lambda x_n \longrightarrow \Lambda x.$$

نکته۲: $E \subseteq X$ به طور ضعیف کراندار است اگر و تنها اگر هر تابعک $\Lambda \in X^*$ مجموعه‌ی E را به یک مجموعه‌ی کراندار در $\mathbb{C}$ ببرد.

نکته۳: دنباله‌ی $\{x_n\} \subseteq X$ به طور ضعیف کشی است اگر و تنها اگر برای هر $\Lambda \in X^*$ دنباله‌ی $\{\Lambda(x_n)\}$ کشی باشد. (در واقع همگرا نیز می‌باشد.)

تعریف ۱.۳.۱۳. فرض کنیم (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک دلخواه باشد. (فرض نمی‌کنیم که X^* نقاط X را جدا کند.) در این صورت هر $x \in X$ یک تابعک خطی بر فضای X^* تلقی می‌شود. به این معنا که

$$\widehat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\widehat{x}(x^*) = x^*(x).$$

بدین ترتیب $X \approx \mathfrak{F} = \{\widehat{x}\}_{x\in X}$ یک زیرفضای برداری از فضای تابعک‌های خطی روی X^* است، که نقاط X^* را جدا می‌کند. بنابراین توپولوژی ضعیف حاصل از $X \approx \mathfrak{F}$ بر X^* که توپولوژی ضعیف ستاره نام دارد و با نمادهای w^* و $\sigma(X^*, X)$ نشان داده می‌شود، X^* را به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب با دوگانی برابر با $X = (X^*, w^*)^*$ تبدیل می‌کند.

تعریف ۱.۳.۱۴. فرض کنید (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد. در این صورت توپولوژی مک‌کی[۲] عبارت است از، ظریف‌ترین توپولوژی موضعاً محدب بر X مانند ρ به گونه‌ای که $(X,\tau)^* = (X,\rho)^*$. به عبارت دیگر توپولوژی مک‌کی ظریف‌ترین توپولوژی موضعاً محدب بر X است، که تابعک‌های خطی پیوسته با توپولوژی τ را پیوسته نگه می‌دارد. (اصطلاحاً سازگار با دوگان (X,τ) می‌باشد.)

تعریف ۱.۳.۱۵. زیرمجموعه‌ی A از فضای برداری X را جاذب نامیم، اگر $X = \cup_{t>0} tA$.
به عبارتی برای هر $x \in X$، یک عدد $t > 0$ یافت شود که $x \in tA$.
مثلاً هر همسایگی حول نقطه‌ی صفر در یک فضای برداری توپولوژیک، جاذب است.

تعریف ۱.۳.۱۶. به ازای زیرمجموعه‌ی جاذب A از فضای برداری X، نگاشت
$\mu_A : X \longrightarrow [0,\infty)$ با ضابطه‌ی

$$\mu_A(x) = \inf\ \{t > 0\ :\ x \in tA\}$$

را تابعک مینکوفسکی نظیر مجموعه‌ی A می‌نامند.

گزاره ۱.۳.۲. *اگر X یک فضای برداری و $A \subseteq X$ جاذب و محدب باشد، آن‌گاه*
الف) : به ازای هر $x,y \in X$، $\mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y)$؛
ب) : به ازای هر $x \in X$ و به ازای هر $t > 0$، $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$.
اگر علاوه بر این A متوازن نیز باشد، آن‌گاه μ_A یک شبه‌نرم است. (یعنی به ازای هر $x \in X$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{F}$، $\mu_A(\alpha x) = \mid \alpha \mid \mu_A(x)$)

برهان. به [۱۸]، صفحه‌ی ۲۶ رجوع شود. □

[۲] $Mackey$

۴.۱ فضاهای پیرافشرده

تعریف ۱.۴.۱ . یک تظریف از یک پوشش برای فضای X پوشش جدیدی از همان فضاست، به طوری که هرمجموعه از پوشش جدید، زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه در پوشش قبلی باشد. به عبارت دیگر پوشش $V = \{V_\beta : \beta \in B\}$ یک تظریف از پوشش $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ است، اگر برای هر $V_\beta \in V$ وجود داشته باشد $U_\alpha \in U$ به طوری که $V_\beta \subseteq U_\alpha$.

تعریف ۲.۴.۱. یک پوشش باز از فضای توپولوژیک (X, τ) موضعاً متناهی نامیده می‌شود، اگر هر نقطه از فضا یک همسایگی داشته باشد، که فقط تعداد متناهی از مجموعه‌های پوشش را قطع کند. به عبارت دیگر پوشش $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ موضعاً متناهی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ همسایگی $V(x)$ از x وجود داشته باشد به طوری که $\{\alpha \in A \mid U_\alpha \cap V(x) \neq \emptyset\}$ متناهی باشد.

تعریف ۳.۴.۱. فضای توپولوژیکی که هر پوشش باز آن یک تظریف باز موضعاً متناهی داشته باشد را فضای پیرافشرده می‌نامیم.

- *هر فضای فشرده، پیرافشرده است.*
- *هر فضای متریک، پیرافشرده است. به* [۱۹]*، رجوع شود.*

تعریف ۴.۴.۱. پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ از فضای توپولوژیک (X, τ) مفروض است. خانواده‌ی $\{\varphi_\alpha : X \longrightarrow [۰, ۱]\}_{\alpha \in J}$ از توابع پیوسته را یک افراز واحد فضای X تحت تسلط پوشش $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ گوئیم، اگر سه خاصیت زیر را داشته باشد:

الف) برای هر اندیس $\alpha \in J$، داشته باشیم $supp\ \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$؛

ب) خانواده‌ی $\{supp\ \varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ موضعاً متناهی باشد؛

پ) به ازای هر $x \in X$، $\sum_{\alpha \in J} \varphi_\alpha(x) = ۱$.