بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بیرجند
دانشکده علوم
گروه آمار

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

مدلسازی تغییرنگار داده‌های فضایی–زمانی با تابع کواریانس تفکیک-ناپذیر

استاد راهنما :

دکتر یدالله واقعی

استاد مشاور:

دکتر حمیدرضا نیلی ثانی

نگارش:

الهه رجبیون

تیرماه ۱۳۹۰

دنیا نباشد

فقط کوچه‌ای باشد و باران

و همراهانی که زلالتر از بارانند

تقدیم به:

پدرو مادر عزیزم

همسر مهربان و فداکارم

و پارسا کوچولو

سپاسگزاری:

خداوند مهربان را شاکرم که به من نیرو بخشید تا نگارش این پایان‌نامه را به اتمام برسانم. قبل از هر چیز لازم است کمال تقدیر و تشکر خود را نثار استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر یدالله واقعی نمایم، نه تنها به دلیل مقام استادی ایشان بلکه به خاطر راهنمایی‌های بی‌دریغشان.

مایلم حق شناسی خود را از استاد مشاورِ ارجمندم آقای دکتر حمیدرضا نیلی ثانی، به جا آورم.

هر چند سپاسگزاری از همه کسانی که در طول مدت تحصیل و نگارش پایان نامه در کنارم بودند امکان پذیر نیست اما لازم می‌بینم از همراهی برخی افرادِ دیگر نیز تشکر کنم. بطور خاص از همسرم به خاطر تمامی حمایتهایش سپاسگزارم. همچنین از همه دوستان عزیزم که در طول این مدت هیچ‌گاه لطف خود را از من دریغ نکردند تشکر و قدردانی می‌کنم؛ به ویژه خانمها بنت‌الهدی خسروی، مریم محمدی، راضیه ناصری، زهرا خوجه و کلثوم دهقان.

در نهایت برای همه عزیزان، سلامتی و توفیق روزافزون را در تمام مراحل زندگی از خداوند مهربان آرزومندم.

University of birjand

Fcullty of science

A Thesis presented for the M. Sc. Degree Statistics

Title:

Modeling Space –Time Variogram With Non-Separable Covariance Function

Supervisor:

Dr. Yadollah Waghei

Advisor:

Dr. Hamid Reza Nili Sani

By:

Elahe Rajabioun

July.2011

چکیده:

داده‌هایی که نوعاً بر حسب موقعیت (مکان) قرارگرفتن آنها در فضای مورد مطالعه همبسته باشند و این همبستگی تابعی از فاصله موقعیت آنها باشد، داده‌های فضایی نامیده می‌شوند. مجموعه‌ای از داده‌های فضایی که در زمانهای متوالی(منظم یا نامنظم) مشاهده شوند را داده‌های فضایی-زمانی می‌نامند.

هدف اصلی این پایان نامه یافتن ساختار وابستگی داده‌های فضایی- زمانی و مدلسازی این وابستگی است که به‌وسیله تابع تغییرنگار یا هم‌تغییرنگار است. با استفاده از مدلهای هم‌تغییرنگار تفکیک‌پذیر می‌توان هم‌تغییرنگار توام فضایی-زمانی را به کمک مدلهای هم‌تغییرنگار صرفا فضایی و صرفا زمانی مدلسازی کرد. فرض تفکیک‌پذیری علی‌رغم سادگی در تفسیر و کاربرد با محدودیت‌هایی روبرو است که ما سعی داریم برای رفع این محدودیت‌ها مدلهای مختلف را مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار داده و نحوه برازش آنها به داده‌ها را بیان کنیم.

در این پایان‌نامه ضمن مرور مدلهای مختلف کوواریانس فضایی-زمانی(اعم از تفکیک‌پذیر و تفکیک‌ناپذیر)، روش کرسی و هوانگ را برای ساخت توابع کوواریانس مانای تفکیک‌ناپذیر مورد نقد و بررسی قرار می‌دهیم. سپس به کمک آن، چند نمونه از مدلهای کوواریانس تفکیک‌ناپذیر را ساخته و مدل نیم‌تغییرنگار متناظر آنها را بدست می‌آوریم. در بخش کاربردی این پایان نامه ضمن ارائه برنامه نرم‌افزاری برای برآورد تابع نیم‌تغییرنگار داده‌های مربوط به سطح آبهای زیرزمینی دشت بیرجند شامل**۲۵** چاه از مهر سال ۱۳۷۶ تا اسفند ۱۳۸۸، به برازش این تابع می‌پردازیم و از بین مدلهای مختلف برازش داده شده بهترین مدل را برای برازش انتخاب می‌کنیم..

واژگان کلیدی: داده‌های فضایی-زمانی، مدلهای کوواریانس تفکیک‌پذیر، مدلهای کوواریانس تفکیک‌ناپذیر، هم‌تغییرنگار فضایی- زمانی.

فهرست مطالب

عنـــــــــــوان مطلب **صفحه**

فصل اول: مقدمات و کلیات آمار فضایی

فصل دوم: برآورد تغییرنگار و هم‌تغییرنگار داده‌های فضایی– زمانی

فصل سوم: مدلهایی برای تابع کواریانس ایستای فضایی- زمانی

فصل چهارم: برازش مدلهای کوواریانس تفکیک ناپذیر

فصل اول:

مقدمات و کلیات آمار فضایی

۱-۱مقدمه

در بسیاری از روشهای آماری مقدماتی و پیشرفته فرض استقلال مشاهدات یک فرض اساسی است، زیرا نظریه‌های مربوط براساس این فرض بنا نهاده شده‌اند. اما در عمل با داده‌هایی مانند سریهای زمانی یا داده‌های فضایی روبرو می‌شویم که به نوعی به یکدیگر وابسته‌اند. داده‌هایی که بر حسب موقعیت قرارگرفتن آنها در فضای مورد مطالعه همبسته باشند و این نوع همبستگی، نوعاً، تابعی از فاصله بین موقعیت آنها باشد، داده‌های فضایی[1] نامیده می‌شوند. به عنوان مثالی از داده‌های فضایی می‌توان به میزان گازهای آلاینده هوا در نقاط مختلف یک شهر اشاره کرد، میزان گاز آلاینده به همراه موقعیت جغرافیایی آن در چند مکان مختلف یک مجموعه داده فضایی را بوجود می‌آورد. امروزه تحلیل داده-

1 .Spatial Data

های فضایی در شاخه‌های مختلف علوم از قبیل کشاورزی، پزشکی، زمین‌شناسی، جغرافیا و محیط زیست به یکی از مباحث مهم آمار بدل شده است. در این موارد داده‌ها با موقعیت مکانی نزدیکتر، دارای شباهت بیشتری هستند که این امر سبب بروز همبستگی فضایی بین داده‌ها می‌شود. مجموعه‌ای از داده‌های فضایی که در زمانهای متوالی(منظم یا نامنظم) مشاهده شوند را داده‌های فضایی- زمانی[1] می-نامند.

به دلیل همبستگی فضایی، روشهای متداول آماری برای تحلیل چنین داده‌هایی قابل استفاده نیستند. لذا شاخه‌ای به نام آمار فضایی[2] به منظور مدلسازی ساختار وابستگی داده‌های فضایی و لحاظ نمودن آن در تحلیل آنهاگسترش یافته است. در واقع آمار فضایی شاخه‌ای از آمار است که در آن به بررسی متغیرهایی پرداخته می‌شود که دارای ساختار همبستگی فضایی هستند و تلاش می‌شود این ساختار که همان ارتباط بین مقادیر متغیر و فاصله و جهت قرارگیری آنهاست، تعیین و برای افزایش دقت در تجزیه و تحلیل آماری آنها مورد استفاده قرارگیرد.

حتی اگر داده‌ها واقعاً دارای این نوع همبستگی نباشند، انتظار داریم دقت این روشها کمتر از دقت سایر روشهای آماری (روشهای رگرسیونی و رویه روند) نباشند ولی از آنجایی که بکارگیری آنها دشوارتر از سایر روشها است، لازم است قبل از استفاده از این روشها از وجود همبستگی بین داده-ها مطمئن شویم. در آمار فضایی این همبستگی از طریق تابع تغییرنگار[3] یا هم تغییرنگار[4] برآورد و محاسبه می‌شود. قبل از پرداختن به آنها، داشتن درک صحیح از مفاهیم کلی آمار فضایی ضروری به نظر می‌رسد.

1 .Spatial - Temporal Data
2 .Spatial Statistics
3.Variogarm
4 .Covariogram

آمار فضایی شاخه نسبتاً جدیدی از آمار است که در چند دهه اخیر مورد توجه بسیاری از متخصصین آمار قرارگرفته است و در این مدت افراد زیادی به بحث پیرامون داده‌های فضایی پرداخته‌اند. استیودنت(۱۹۰۷) در بررسی توزیع ذارت معلق در مایعات پیشنهادکرد داده‌ها در سطوح مختلف بطور جداگانه بدست‌آورده شوند. فیشر (۱۹۳۵) با توجه به اینکه کرت‌های نزدیک به هم از لحاظ محصول شباهت بیشتری نسبت به کرت‌های دور از هم دارند، به وجود همبستگی فضایی در طرح آزمایشهای کشاورزی اشاره‌کرد، اما مدل آماری مناسبی برای توصیف چنین پدیده‌هایی ارائه نشد، تا اینکه براساس پژوهشهای افرادی مانند سیشل و کریگ، ماترون با انتشار مقاله‌ای در سال ۱۹۶۲ پایه‌های زمین‌آمار[1] را بنا نهاد. زمین‌آمار شاخه‌ای از علم آمار است که به تجزیه و تحلیل داده‌های همبسته فضایی می‌پردازد، البته سیشل و کریگ اصطلاح متغیرهای ناحیه‌ای را به جای داده‌های فضایی بکار بردند. در واقع زمین‌آمار که ارتباط بسیار نزدیکی با آمار فضایی دارد، بین مقادیر مختلف یک متغیر و فاصله و جهت قرارگیری آنها ارتباطی را برقرار می‌کند که ساختارفضایی نامیده می‌شود. در شکل‌گیری آمار فضایی افراد دیگری نیز همزمان با سیشل، کریگ و ماترون فعالیت داشتند. در دهه شصت میلادی گاندین کاربرد آمار فضایی را در هواشناسی بیان کرد. دیوید(۱۹۷۷) در مورد پیشگویی فضایی ذخایر معدنی مطالب بسیاری ارائه نموده‌است. یورنل و هیگبرتس(۱۹۸۷) بطور مفصل روش‌های زمین‌آماری را با اصطلاحات خاص شرح دادند. ریپلی(۱۹۸۱) در کتاب آمار فضایی پیشگویی فرآیندهای تصادفی را مطرح نمود و کرسی(۱۹۹۳) نیز با انتشار کتاب آمار برای داده‌های فضایی بطور مبسوط به بررسی مباحث مختلف آمار فضایی پرداخته و یکی از بنیانگذاران و محققان آمار فضایی به سبک جدید است که دهها مقاله و کار تحقیقی در این زمینه دارد.

1 .Geostatistics

مهمترین هدف در تحلیل داده‌های فضایی- زمانی پیشگویی متغیر مورد بررسی در نقاط فضایی- زمانی حال یا آینده با استفاده از نظریه میدانهای تصادفی فضایی می‌باشد که برای این منظور از روشهای مختلفی می‌توان استفاده‌کرد. مشهورترین این روشها روش منتسب به دی.جی.کریگ(۱۹۵۱) می‌باشد که روش کریگیدن[1] نامیده می‌شود. در این روش برای پیشگویی در یک نقطه فضایی- زمانی مشخص یک ترکیب خطی از همه داده‌ها در نظر گرفته شده و ضرایب این ترکیب خطی به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند که اولاً پیشگویی نااریب و ثانیاً دارای کمترین واریانس باشد به این نوع پیشگویی که نوعی پیشگویی ناپارامتری به حساب می‌آید BLUP[2] گفته می‌شود.

مهمترین مساله در تحلیل داده‌های فضایی- زمانی مساله مدلسازی ساختار وابستگی داده‌ها از طریق تابع کواریانس(هم‌تغییرنگار) یا تابع تغییرنگار است. برای مدلسازی وابستگی داده‌ها به دو روش تفکیک پذیر و تفکیک ناپذیر می‌توان عمل کرد.

۱-۲ سابقه مطالعات فضایی- زمانی

نخستین بار اینون و سویتزر (۱۹۸۳) برای ارائه راهکار کاهش آلودگی جوی از داده‌های فضایی - زمانی استفاده کردند. افرادی چون ایرونیک (۱۹۸۵)، روحانی وهمکاران (۱۹۹۰) درتوسعه و مدلبندی توزیع‌های فضایی- زمانی نقش بسزایی داشتند. سردار مرادی(۱۳۸۴) فرض ایستایی و تفکیک‌پذیری توابع کواریانس فضایی- زمانی را بررسی کرد. ریواز و همکاران (۱۳۸۶) براساس مدل تغییرنگار فضایی- زمانی تفکیک پذیر رهیافت بیز تجربی را برای پیشگویی آلودگی هوا مورد مطالعه قراردادند ، روحانی و هال (۱۹۸۹) بحث مدلسازی وابستگی داده‌ها را با استفاده ازمدل جمعی (خطی)،

1. Kriging
2 .Best Linier Unbiased Prediction

دی سزار و همکاران (۱۹۹۷) با استفاده از مدل ضربی و دی آیکو، میرز و پوسا (۲۰۰۱) با استفاده از مدل جمعی- ضربی تعمیم یافته مطرح کردند. کرسی و هوانگ (۱۹۹۹) با استفاده از انتگرالهای فوریه و عکس تبدیل فوریه روشی را برای ساخت مدلهای کواریانس تفکیک ناپذیر ارائه دادند. گه-نایتینگ(۲۰۰۲) بدون استفاده از انتگرالهای فوریه، روش جدیدی را با استفاده از توابع کاملاً یکنوا[1] (تابعی که دارای مشتقات از همه مراتب باشد) برای ساخت توابع کواریانس مانای تفکیک ناپذیر پیشنهاد کرد. از آنجا که فرض‌های مانایی و تفکیک‌پذیری در عمل ممکن است غیرواقعی باشند فیونتر و همکاران(۲۰۰۸) با استفاده از نمایش طیفی میدانهای تصادفی، کلاس جدیدی را برای توابع کواریانس فضایی-زمانی نامانا و تفکیک‌ناپذیر ارائه کردند. فون‌سکا و استیل(۲۰۰۹) با استفاده از ترکیب مدلهای کواریانس مجزا ،کلاس کلی و انعطاف‌پذیری از مدلهای کواریانس تفکیک‌ناپذیر معتبر را پیشنهاد کردند.

از لحاظ کاربردی اطمینان (۱۳۸۴) برای یک مجموعه داده فضایی- زمانی که مربوط به آبهای زیرزمینی مشاهده شده در ۲۱ چاه حوزه دشت بیرجند در ماههای مختلف بود بدون در نظرگرفتن بعد زمان، به ارائه تحلیل های صرفاً فضایی پرداخت. درادامه شفیعی(۱۳۸۶) بعد زمان را به عنوان بعد سوم داده‌های فضایی- زمانی در نظر گرفت. صادقیان (۱۳۸۷) ضمن مطالعه مدل‌های مختلف تابع کواریانس فضایی- زمانی، مدل تفکیک پذیر ضربی را برای مدلسازی تابع کواریانس در نظر گرفت. اما فرض تفکیک پذیری علیرغم سادگی در تفسیر و کاربرد با محدودیت‌هایی روبرو است که ما در این پایان-نامه سعی داریم برای رفع این محدودیت‌ها، مدلهای مختلف را مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار داده و نحوه برازش آنها به داده‌ها را به کمک یک مثال کاربردی (داده های مربوط به سطح آب‌های زیر زمینی دشت بیرجند) بیان کنیم.

1 .Completely Monotone

۱- ۳ میدان تصادفی

برای بیان برخی اصول، نظریه‌ها و روشهای تجزیه و تحلیل داده‌های فضایی نیاز به آشنایی با میدان تصادفی و برخی مفاهیم مرتبط با آن داریم که در این بخش معرفی می‌شوند.

۱-۳-۱ میدان تصادفی فضایی

فرض کنید $s \in D \subset R^d$ موقعیت یک مشاهده در فضای اقلیدسی d بعدی و $Z(s)$ یک متغیر در موقعیت s باشد، مجموعه $\{Z(s); s \in D\}$ را *میدان تصادفی فضایی*[1] می‌گویند که آن را با نماد اختصاری $Z(.)$ می توان نشان داد. در حالت خاص $d=1$ میدان تصادفی فضایی همان فرآیند تصادفی[2] خواهد بود.

اگر برای هر $k \geq 1$ و موقعیتهای $s_1, s_2, ..., s_k$ بردار $(Z(s_1), Z(s_2), ..., Z(s_k))$ دارای توزیع نرمال k متغیره باشد، میدان تصادفی $Z(.)$ *میدان تصادفی گاوسی* نامیده می‌شود. لذا اگر در n موقعیت $(s_1, s_2, ..., s_k)$ یک نمونه تصادفی بگیریم در صورتی که توزیع توام $(Z(s_1), Z(s_2), ..., Z(s_n))$ نرمال n متغیره باشد می‌توانیم میدان تصادفی مربوط را گاوسی بنامیم، زیرا طبق قضیه در صورت نرمال چند متغیره بودن توزیع یک بردار، توزیع هر زیر بردار آن نیز نرمال چند متغیره خواهد بود(مثلاً فصل دوم عباسی و همکاران۱۳۸۵). اگر یک میدان گاوسی داشته باشیم می‌توان پارامترهای مدل تغییرنگار یا هم‌تغییرنگار را به روش حداکثر درستنمایی برآورد کرد. البته در این پایان‌نامه توزیع میدان تصادفی را گاوسی فرض نمی‌کنیم، زیرا برازش مدل تغییرنگار را به روش کمترین توانهای دوم معمولی (OLS) انجام می‌دهیم و در پیشگویی به روش کریگیدن نیاز به توزیع داده‌ها نداریم.

---

1 .Spatial Random Field
2 .Random Process

۱-۳-۲ میدان تصادفی فضایی- زمانی

در بخش قبل میدان تصادفی فضایی که بعضاً به اختصار به آن میدان تصادفی می‌گویند تعریف شد. تعمیمی از میدان تصادفی فضایی بدین شرح است. گردایه ای از متغیرهای تصادفی به صورت $\{Z(\boldsymbol{s},t);\boldsymbol{s}\in D\subset R^{d},t\in T\subset R^{+}\}$ را *میدان تصادفی فضایی-زمانی*[1] می‌نامند و آنرا با نماد اختصاری $Z(.,.)$ نشان می‌دهند. در اینجا $\boldsymbol{s}$ نشان‌دهنده اندیس فضایی متغیرها است که می‌تواند بطور پیوسته در بخشی از فضای اقلیدسی d بعدی تغییر کند، مجموعه D در فضای dبعدی مشخص‌کننده فضای مورد مطالعه می‌باشد که موقعیت فضایی داده‌ها از آن انتخاب شده است مثلا اگر نمونه‌گیری برای بررسی آلودگی هوا از چند نقطه از سطح یک شهر باشد مجموعه D کل منطقه جغرافیایی شهر خواهد بود. t نشان‌دهنده اندیس زمانی متغیرها است که آن هم می‌تواند در فضای یک بعدی معمولاً (اعداد صحیح مثبت) تغییر کند و T شامل اعداد صحیح (مثبت) خواهد بود. هر چند d هر عدد طبیعی مثبتی می‌تواند باشد در اغلب مطالعات $d=۲$ خواهد بود به این معنا که متغیر در فضای دو بعدی در زمانهای مختلف(به بیان دیگر در فضای سه بعدی) قابل مشاهده است . از این به بعد بجای میدان تصادفی فضایی- زمانی به جهت اختصار از واژه میدان تصادفی استفاده می‌کنیم.

میانگین و کوواریانس میدان تصادفی $Z(.,.)$ به ترتیب به صورت:

$$E(Z(\boldsymbol{s},t))=\mu(\boldsymbol{s},t)\qquad ;\forall(\boldsymbol{s},t)\in D\times T \qquad (۱-۱)$$

$$Cov(Z(\boldsymbol{s}_1,t_1),Z(\boldsymbol{s}_2,t_2))=E[(Z(\boldsymbol{s}_1,t_1)-\mu(\boldsymbol{s}_1,t_1))(Z(\boldsymbol{s}_2,t_2)-\mu(\boldsymbol{s}_2,t_2))] \\ ;\forall(\boldsymbol{s}_1,t_1),(\boldsymbol{s}_2,t_2)\in D\times T \qquad (۲-۱)$$

تعریف می‌شوند.

1 . Spatial-Temporal Random Field

متغیر تصادفی $Z(s,t)$ را می‌توان به صورت $Z(s,t)=\mu(s,t)+\varepsilon(s,t)$ به مؤلفه‌های غیرتصادفی و تصادفی تجزیه‌کرد، که در آن $\mu(s,t)$ روند غیر تصادفی (تغییرات مقیاس بزرگ) و $\varepsilon(s,t)$ مؤلفه خطای‌تصادفی (تغییرات مقیاس کوچک) می‌باشد. اگر چه $\mu(s,t)$ در حالت کلی به s و t بستگی دارد ولی متغیر تصادفی نیست، اما برای هر s و t، $Z(s,t)$ و $\varepsilon(s,t)$ متغیرهای تصادفی هستند و توزیع آنها مشابه است تنها تفاوت توزیع $Z(s,t)$ و $\varepsilon(s,t)$ در میانگین آنهاست. تغییرات مقیاس کوچک ممکن است ناشی از خطای اندازه گیری یا تغییرپذیری در درون موقعیت مشاهدات باشد و تغییرات مقیاس بزرگ ممکن است ناشی از تغییرپذیری بین موقعیت‌های مشاهده شده باشد.

در واقع $\varepsilon(.,.)$ نیز مانند $Z(.,.)$ یک میدان تصادفی می‌باشد. $\varepsilon(s,t)$ در اینجا نقش ε را در مدلهای آماری متداول (مانند رگرسیون و مدلهای آنالیز واریانس) دارد و بطور غیرمستقیم توزیع داده‌ها را مشخص می‌کند و تنها تفاوت آن‌ها در این است که در مدلهای آماری متداول $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ مستقل از همدیگر فرض می‌شوند در حالی که در این‌جا $\varepsilon(s_1,t_1),...,\varepsilon(s_n,t_m)$ مستقل نیستند و دارای یک ساختار همبستگی هستند.

۴-۱ مانایی[1] و همسانگردی[2]

از آنجایی که تحلیل داده‌های فضایی- زمانی(فضایی) از روی اطلاعات نمونه بسیار دشوار است برای تحلیل این داده‌ها نیاز به برقراری فرض مانایی(ایستایی) در فضا و زمان داریم. گونه‌های مختلفی از مانایی در کتب و مقالات تعریف شده که در عمل بسته به شرایط داده‌ها و تئوریهای لازم یکی از انواع مانایی را به ناچار می‌پذیریم.

1.Stationary
2.Isotropy

۱-٤-۱ مانایی قوی

میدان تصافی $Z(.,.)$ را مانای قوی[1] گویند هرگاه به ازای موقعیت های دلخواه $(\boldsymbol{s}_i, t_j)$ که $i=1,2,...,k; j=1,2,...,l$ هستند، توزیع توام $Z(\boldsymbol{s}_k,t_l),...,Z(\boldsymbol{s}_2,t_2),Z(\boldsymbol{s}_1,t_1)$ همانند توزیع توام $Z(\boldsymbol{s}_k+\boldsymbol{h}_s,t_l+h_t),...,Z(\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{h}_s,t_2+h_t),Z(\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{h}_s,t_1+h_t)$ باشد، یعنی:

$$(Z(\boldsymbol{s}_1,t_1),...,Z(\boldsymbol{s}_k,t_l)) \overset{D}{=} (Z(\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{h}_s,t_1+h_t),...,Z(\boldsymbol{s}_k+\boldsymbol{h}_s,t_l+h_t))$$

به عبارت دیگر با انتقال هر تعداد از متغیرها به اندازه بردار $(\boldsymbol{h}_s,h_t)$ توزیع توام آنها تغییر پیدا نکند.

حالت خاص : اگر $k=l=1$ باشند داریم:

$$(Z(\boldsymbol{s}_1,t_1) \overset{D}{=} (Z(\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{h}_s,t_1+h_t))) \qquad ;\forall \boldsymbol{s}_1,t_1,\boldsymbol{h}_s,h_t$$

در نتیجه، با پذیرش مانایی قوی، همه مشاهدات هم‌توزیع هستند.

۱-٤-۲ مانایی مرتبه دوم(ضعیف)

هرگاه در یک میدان تصادفی میانگین میدان $Z(.,.)$ ثابت باشد و کواریانس آن فقط تابعی از فاصله بین موقعیت های فضایی و زمانی باشد ، به عبارت دیگر:

$$\mu = E(Z(\boldsymbol{s},t)) \qquad ;\forall \boldsymbol{s},t \in D\times T \qquad (۱-۳)$$

$$Cov(Z((\boldsymbol{s}_i,t_i),Z((\boldsymbol{s}_j,t_j)) = C(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_j,t_i-t_j) \qquad ;\forall((\boldsymbol{s}_i,t_i),(\boldsymbol{s}_j,t_j)\in D\times T \qquad (۱-۴)$$

میدان را مانای مرتبه دوم[2] گویند.

در نتیجه تحت شرط مانایی مرتبه دوم واریانس $Z(\boldsymbol{s},t)$ نیز به $\boldsymbol{s}$ و t وابسته نیست زیرا برای $i=j$ داریم:

1.Strong Stationary
2.Second-Order Stationary