بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم صغری ابوطالبیان** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۰۰۶ تحت عنوان: «**مدل همراه برای تئوری‌های با یک خودریختی**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر مسعود پورمهدیان	دانشیار	
۲- استاد مشاور	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مرتضی منیری	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته   است

که در سال   در دانشکده   دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار

خانم/جناب آقای دکتر   ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر

و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ٤: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ٥: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ٤ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ٦: اینجانب **صغری ابوطالبیان** دانشجوی رشته **ریاضی(منطق ریاضی)** مقطع

تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: **صغری ابوطالبیان**

تاریخ و امضا: ۹۵/۱۰/۲۰

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **صغری ابوطالبیان** دانشجوی **رشته ریاضی محض(منطق ریاضی)** ورودی ۸۸ سال تحصیلی**۹۱-۹۰** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: ۹۰/۱۰/۲۰

تاریخ:

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد
ریاضی‌محض، گرایش منطق

مدل همراه برای تئوری هایی با يك خودریختی

نگارنده

صغری ابوطالبیان

استاد راهنما

دکتر مسعود پورمهدیان

استاد مشاور

دکتر سید محمد باقری

دی ۱۳۹۰

تقدیم به پدرم

به استواری کوه

تقدیم به مادرم

به زلالی چشمه

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود،
آدمی را زیور عقل آراست.

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مسعود پورمهدیان، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکترسید محمد باقری که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند و کمال امتنان را دارم.

چکیده

در این پایان نامه، بعضی از تئوری‌هایی که درآن مدل همراه موجود نیست را معرفی می‌کنیم.
از طرف دیگر میدان‌های بسته‌ی جبری با یک خودریختی (ACF_σ) را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم این تئوری مدل همراه دارد و آن را ACFA می نامیم.
ACFA را که اصول گذاری از مدل‌های به طور وجودی بسته‌ی میدان‌های تفاضلی معرفی می کنیم، این تئوری را میدان‌های تفاضلی کلی می‌نامیم.
مراجع اصلی این پایان‌نامه [۱۶] و [۱۸] است.

کلمات کلیدی: *مدل همراه، ساختارهای با یك خودریختی، مدل به طور وجودی بسته، میدان تفاضلی کلی*

فهرست

فصل ۱

پیش‌گفتار

مطالعه‌ی مدرن مدل همراه از تئوری هایی با یك خودریختی دو جنبه دارد، یك خط ناشی از لاسکار [۱] است که جزئیات با یك خودریختی از ساختارهای دلخواه. دوم، با چتزیداکیس [۲] و هورشوسکی [۳] شروع و سوال مکین‌تایر درباره‌ی خودریختی‌های فربنیوس است که بیشتر به تئوری‌های خاص جبری می پردازد. ما در این پایان نامه گذری به هر دو جنبه از مدل همراه با یک خودریختی را داریم. این پایان‌نامه دارای سه فصل می باشد که در فصل اول به معرفی مفاهیم مقدماتی مدل تئوری به خصوص مفاهیم اساسی چون مدل همراه و به طور وجودی بسته و بعضی تئوری‌های خاص پرداخته شده است.
فصل دوم،به مفهوم تقریباً مدل همراه وقتی تئوری پایه مدل کامل نیست توجه شده است. این فصل را با معرفی تئوری به صورت زیر آغاز می‌شود: فرض کنید T یك تئوری در زبان L و $L_\sigma = L \cup \{\sigma\}$ که σ یك نشانه‌ی تابع یك جایی است و

$$T_\sigma = T \cup \{\sigma \text{خودریختی است}\}.$$

بعد از معرفی تئوری، توسیع راست رابیان کرده و به کمك آن تعریفی از تقریباً مدل کامل و تقریباً مدل همراه ارائه می دهیم، سپس به قضیه ای اشاره می‌کنیم که به کمك آن می توان به بعضی از نتایج عدم وجود تقریباً مدل همراه بیان می کنیم ، از نتایج مثبت وجود مدل همراه که در این بخش گفته شده زمانی است که T تئوری از گروه‌های آبلی (بدون تاب) است. در بخش دوم که تغییر اندکی روی نتایج [۱۴] می دهد و سپس روی تایپ دوری از

---

[۱] D.Lascar

[۲] Z.Chatzidakis

[۳] E.Hurshovski

خودریختی σ متمرکز می‌شود، هدف این است که بسیاری از نتایج عدم وجود مدل همراه شناخته شده شامل استدلال خودریختی‌هایی با نقاط ثابت است برای مثال، کیکیو [۴] [۱۳] از این استدلال برای نشان دادن این مطلب که اگر T تئوری گراف تصادفی باشد، آنگاه T_σ مدل همراه ندارد استفاده کرده است. تحت چنین تحدیدهایی یك نتیجه مثبت مدل همراه وقتی $T = Th(\mathbb{Q}, <)$ بدست می‌آید.

در بخش سوم این فصل یکی دیگر از نتایج مثبت مدل همراه که T ،تئوری گراف تصارفی و خودریختی در نظر گرفته شده با این فرض است که دور متناهی ندارد، بیان شده است.

سپس به سراغ میدان‌های تفاضلی با یک خودریختی مجزا می‌رویم که اولین بار توسط ریت [۵] در سال **۱۹۳۰** مطالعه شد. علاقه در مدل تئوری از میدان‌های تفاضلی در پایان دهه هشتاد بخاطر دو سوال آغاز شده است. سوال اول که از رد حدس زیلبر [۶] نشئت می‌گیرد. یک تئوری قویاً مینیمال که توسیعی از میدان‌های بسته‌ی جبری از هر مشخصه‌ی داده شده وجود دارد. دانشمندان به دنبال امکان پیدا کردن یک خودریختی تعریف ناپذیر σ از $\mathbb{F}_p^{alg}$ بودند (بستار جبری $\mathbb{F}_p$ با p عنصر) به طوری‌که $Th(\mathbb{F}_p^{alg}, +, ., \sigma)$ قویاً مینیمال است.این سوال تا کنون به صورت باز باقی مانده است.

سوال دوم کار با میدان‌های تفاضلی $\mathfrak{F}_q = (\mathbb{F}_p^{alg}, +, ., \phi_q)$ بود جایی که q توانی از p و $\phi_q : x \mapsto x^q$ توانی از خودریختی فربنیوس [۷] $x \mapsto x^p$ است. امید این بودکه با تعمیم این کار از اکس [۸] روی میدان‌های متناهی به چنین ساختارهایی، به خصوص توصیف تئوری فراضرب‌های غیر اصلی از میدان‌های تفاضلی $\mathfrak{F}_q$.

چنین سوال‌هایی منجر شد تا مکین تایر و دریس [۹] و وود [۱۰] به دنبال مدل همراهی از تئوری میدان‌های تفاضلی و اثبات نتایج آن (تصمیم پذیری، توصیف مدل تکمیل و غیره) برای این تئوری باشند که از آن پس ACFA نامیده شد. در فصل آخر این پایان نامه، ابتدا گذری میدان‌های بسته‌ی جبری داریم وکلیات این تئوری درمورد داشتن مدل همراه بیان می‌شود و سپس در بخش دوم، هندسه جبری پایه را که به ما درفهمیدن تعاریفی از میدان‌ها کمك

---

[۴] H.Kikyo

[۵] Ritt

[۶] Zilber

[۷] Frobenius

[۸] Ax

[۹] Van den Dries

[۱۰] Wood

می‌کند ارائه می‌شود.

دربخش سوم فصل آخر، میدان‌هایی با یك خودریختی اضافه شده را به نام میدان‌های تفاضلی را معرفی کرده و میدان‌های تفاضلی کلی را معرفی می‌کنیم. ما همچنین اصل راH بیان می‌کنیم و به کمك آن راACFA معرفی کرده که ابتدا توسط مکین تایر در سال ۱۹۹۰ بیان شده و پس از آن توسط هرشوسکی به صورت اصول جدا از هم نوشته شد و بعد از آن ونشان می‌دهیم میدان‌های تفاضلی کلی همان ACFA است و همچنین میدان‌های تفاضلی یك مدل همراه دارد که ACFA نامیده می‌شود.

فصل ۲

پیش‌نیازها

در این فصل از پایان‌نامه پیش‌نیازهای مقدماتی مدل تئوری با بهره‌گیری از مرجع‌های [۱۲] ، [۱۷] ، [۱۹] و [۲۱] ارایه می‌شود. در اینجا سعی شده است که تمامی آنچه که در فصل‌های ۲ و ۳ نیاز شده، گردآوری شود.

۱.۲ مفاهیم مقدماتی مدل تئوری

به دلیل کاربرد زیادی که مفاهیم مقدماتی مدل تئوری پایه در این پایان نامه دارند ما در این بخش گذری به این مفاهیم داریم.

قضیه ۱.۱.۲ (فشردگی). *(قضیه ۲.۱.۴ در مرجع[۱۹]) T ارضاپذیر است اگروفقط اگر هر زیر مجموعه‌ی متناهی از T ارضاپذیر باشد. یا به‌طور معادل : یك L - تئوری T مدل دارد اگر و فقط هر زیر مجموعه‌ی متناهی از T یك مدل داشته باشد.*

تعریف ۲.۱.۲. یك L - تئوری T را کامل می‌نامیم در این صورت برای هر L - جمله‌ی φ، $T \models \varphi$ یا $T \models \neg\varphi$.

تعریف ۳.۱.۲. گوییم تئوری T خاصیت گواه دارد، هرگاه $\phi(v)$ یك L - فرمول با یك متغیر آزاد v باشد، آنگاه یك ثابت $c \in L$ موجود باشد به‌طوریکه $T \models (\exists v\phi(v)) \rightarrow \phi(c)$.

گزاره ۴.۱.۲. *(گزاره ۸.۱.۱ در مرجع [۱۹]) اگر M یک زیر ساخت از N باشد و $\overline{a} \in \mathrm{M}$ و $\varphi(\overline{x})$ یک فرمول بدون سور باشد. در این صورت $M \models \varphi(\overline{a})$ اگروفقط اگر $N \models \varphi(\overline{a})$.*

گزاره ۲.۱.۵. *(گزاره ۱.۳.۵ در مرجع [۱۹]) فرض کنید M یک L-ساختار باشد. هرگاه A ,$X \subseteq \mathrm{M^n}$-تعریف پذیر باشد، در این صورت هر خودریختی از M که A را نقطه وار ثابت نگه می دارد، X را مجموعه وار ثابت نگه می دارد.*

تعریف ۲.۱.۶. اگر M و N، L-ساختار باشند، آنگاه یك L-نشاندن $j : M \to N$ نشاندن مقدماتی است هرگاه برای همه‌ی L-فرمول های $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$M \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff N \models \phi(j(a_1), \ldots, j(a_n)).$$

اگر M یك زیر ساخت از N باشد، گوییم که این زیر ساخت، یك زیر ساخت مقدماتی است و می‌نویسیم $M \prec N$ هرگاه نگاشت شمول مقدماتی است، ما همچنین گوییم N یك توسیع مقدماتی از Mاست.

گزاره ۲.۱.۷. (تست تارسکی) *(گزاره ۲.۳.۵ در مرجع [۱۹]) فرض کنید M یك زیر ساخت ازNباشد، در این صورت M زیر ساخت مقدماتی است اگر وفقط اگر برای هر فرمول $\varphi(x, \overline{y})$ و $\overline{a} \in M$ اگر $b \in N$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N \models \varphi(b, \overline{a})$ در این صورت $c \in M$ وجود دارد به‌طوریکه $N \models \varphi(c, \overline{a})$.*

قضیه ۲.۱.۸. *(سر بالا [۱]) (قضیه ۴.۳.۴ در مرجع [۱۹]) فرض کنید M یك ساختار نامتناهی برای L باشد و k یك کاردینال نامتناهی باشدکه $k \geq |M| + |L|$ آنگاه M یك توسیع مقدماتی از کاردینال k وجود دارد.*

قضیه ۲.۱.۹. *(سر پایین [۲]) (قضیه ۲.۳.۷ در مرجع [۱۹]) فرض کنید $X \subseteq N$ و $|X| \leq k \leq |N|$ آنگاه N یك زیر مدل مقدماتی $M \prec N$ از کاردینال k وجود دارد به‌طوریکه $X \subseteq M$ دارد.*

تعریف ۲.۱.۱۰. فرض کنید $(I, <)$ یک ترتیب خطی باشد و به ازای هر $i \in I$، M_i یک L-ساختار باشد، در این صورت $(M_i : i \in I)$ را یک زنجیر از L ساختارها گوییم هرگاه برای $i < j$ داشته باشیم $M_i \subseteq M_j$ ،و اگر برای هر $i < j$ داشته باشیم $M_i \prec M_j$ در این صورت $(M_i : i \in I)$ را یک زنجیر مقدماتی گوییم.

[۱] Upward

[۲] Downward

گزاره ۲.۱.۱۱. *فرض کنید $(I,<)$ یک ترتیب خطی و $(M_i : i\in I)$ یک زنجیر مقدماتی باشد در این صورت $M=\bigcup_{i\in I} M_i$ یک توسیع مقدماتی از هر M_i است.*

برهان. به استقرا روی فرمول‌ها ثابت می کنیم که برای هر $i\in I$ وهر فرمول $\varphi(\overline{x})$ وهر $\overline{a}\in \mathbf{M_i^n}$، $M_i\models\varphi(a) \iff M\models\varphi(\overline{a})$. چون M_i یک زیر ساخت از M است طبق گزاره‌ی ۲.۳.۵ این مطلب برای همه‌ی فرمول های اتمی درست است. ضمناً به‌سادگی می توان مشاهده کرد که اگر برای φ وψ درست باشد، آنگاه برای $\psi\wedge\varphi$ و$\neg\varphi$ نیز درست است. فرض کنید φ فرمول $\exists x\psi(x,\overline{y})$ است و ادعا برای ψ برقرار باشد یعنی اگر $M_i\models\psi(b,\overline{a})$ آنگاه برای M نیز چنین است. بنابراین اگر $M_i\models\varphi(\overline{a})$ آنگاه برای M برقرار است، برای طرف دیگر، اگر $M\models\psi(b,\overline{a})$ یک $j\geq i$ به‌طوریکه $b\in M_j$ وجود دارد وطبق استقرا داریم $M_j\models\psi(b,\overline{a})$ وبنابراین $M_j\models\varphi(\overline{a})$ وچون $M_i\prec M_j$ درنهایت داریم $M_i\models\varphi(\overline{a})$.
■

تعریف ۲.۱.۱۲. یك جمله‌ی جهانی، جمله ای به شکل $\forall\overline{v}\phi(\overline{v})$ که در آن ϕ بدون سور است، گوییم یكL-تئوری T یك اصل‌گذاری جهانی دارد هرگاه یك مجموعه از L-جمله های جهانی Γ وجود داشته باشد به‌طوریکه $M\models\Gamma$ اگر و فقط اگر برای هر L-ساختار M، $M\models T$.

تعریف ۲.۱.۱۳. برای یك L-ساختار M فرض کنید L_{M} زبان افزوده شده توسط نشانه‌های ثابت جدید برای هر عنصر از جهان $\mathbf{M}$ از M باشد.

$$Diag(M)=\{\varphi : M\models\varphi, \varphi\text{یك}L_{\mathrm{M}}\text{جمله بدون سور}\}$$

$$Diag_{el}(M)=\{\varphi : M\models\varphi, \varphi\text{یك}L_{\mathrm{M}}\text{جمله}\}.$$

لم ۲.۱.۱۴. (لم ۲.۳.۳ در مرجع [۱۹])

(i) *فرض کنید N یك L_{M} جمله و$N\models Diag(M)$ در این صورت یك L-نشاندن از M به Nوجود دارد.*

(ii) *اگر $N\models Diag_{el}(M)$ آنگاه یك نشاندن مقدماتی از M به N وجود دارد.*

تعریف ۲.۱.۱۵. گوییم تئوری T حذف سور دارد هرگاه برای هر فرمول φ یك فرمول بدون‌سور ψ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$T\models\varphi\leftrightarrow\psi.$$

قضیه ۲.۱.۱۶. *(قضیه ۴.۱.۳ در مرجع [۱۹]) فرض کنید L شامل یك نشانه‌ی ثابت c باشد، T یك L- تئوری و $\varphi(\overline{x})$ یك L- فرمول باشد، در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند :*

(i) *یك L- فرمول بدون سور $\psi(\overline{x})$ وجود دارد به‌طوریکه $T \models \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$.*

(ii) *اگر M و N مدل‌های T و A یك L- ساخت و $A \subseteq M, N$ باشد، آنگاه برای هر $\overline{a} \in A$، $M \models \varphi(\overline{a})$ اگر وفقط اگر $N \models \varphi(\overline{a})$.*

۲.۱.۱ تایپ ها

فرض کنید M یك L- ساخت و $A \subseteq \mathbf{M}$ و L_A ،زبانی باشدکه از افزوده شدن یك نشانه ثابت برای هر $a \in A$ به Lبدست می‌آید. فرض کنید $Th_A(M)$ مجموعه‌ی همه L_A جمله‌های صادق در M باشد.

تعریف ۲.۱.۱۷. فرض کنید p مجموعه‌ای از L_A- فرمول‌ها با متغیرهای آزاد $x_1, \dots, x_n$ باشد. p را یك n- تایپ گوییم هرگاه $p \cup Th_A(M)$ ارضاپذیر باشد و همچنین یك n- تایپ کامل گوییم هرگاه علاوه بر آنچه گفتیم، برای هر L_A- فرمول ϕ با متغیرهای آزاد $x_1, \dots, x_n$، $\phi \in p$ یا $\neg\phi \in p$. $S_n^M(A)$ مجموعه‌ی همه n- تایپ‌های کامل است.

اگر M یك L- ساخت و $A \subseteq \mathbf{M}$ و $\overline{a} \in \mathbf{M^n}$

$$tp^M(\overline{a}/A) = \{\phi(x_1, \dots, x_n) \in L_A : M \models \phi(a_1, \dots, a_n)\}$$

$tp^M(\overline{a}/A)$ یك n- تایپ کامل است.

تعریف ۲.۱.۱۸. اگر pیك n- تایپ روی A باشد، گوییم $\overline{a} \in \mathbf{M^n}$، p را برآورده [۳] می کند اگر برای هر $\phi \in p$ داشته باشیم $M \models \phi(\overline{a})$. اگر p در M برآورده نشود گوییم M، p را حذف می کند.

گزاره ۲.۱.۱۹. *(گزاره ۳.۱.۴ در مرجع [۱۹]) فرض کنید M یك L- ساخت و $A \subseteq \mathbf{M}$ و p یك n- تایپ روی A باشد. آنگاه یك توسیع مقدماتی N از M وجود داشته باشد به‌طوری‌که p در N برآورده شود.*

نتیجه ۲.۱.۲۰. *(نتیجه ۴.۱.۴ در مرجع [۱۹]) $p \in S_n^M(A)$ اگر و فقط اگر یك توسیع مقدماتی Nاز M و $\overline{a} \in \mathbf{M^n}$وجود داشته باشد به‌طوری‌که $p = tp^N(\overline{a}/A)$.*

[۳] realize

گزاره ۲.۱.۲۱. (*گزاره ۴.۱.۵ در مرجع [۱۹]*) *فرض کنید M یك L-ساخت و $A \subseteq \mathbf{M}$ و $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{M^n}$ باشد به‌طوری‌که $tp^M(\overline{a}/A) = tp^M(\overline{b}/A)$. آنگاه توسیع مقدماتی از M و σ یك خودریختی از N با ثابت نگه داشتن همه عناصر A وجود دارد به‌طوری‌که $\sigma(\overline{a}) = \overline{b}$.*

تعریف ۲.۱.۲۲. فرض کنید M یک L-ساختار و $(I,<)$ یک مجموعه‌ی مرتب نامتناهی و $X = (x_i : i \in I)$ یک مجموعه از عناصر مجزا از M باشد. گوییم X یک مجموعه‌ی تمایز ناپذیر مرتب است هرگاه $i_m < \ldots < i_۱$ و $j_m < \ldots < j_۱$ دو دنباله افزایشی از عناصر I باشند، در این صورت

$$M \models \varphi(x_{i_۱} < \ldots < x_{i_m}) \Longleftrightarrow M \models \varphi(x_{j_۱}, \ldots, x_{j_m}).$$

قضیه ۲.۱.۲۳. (*قضیه ۵.۲.۳ در مرجع [۱۹]*) *فرض کنید T یک تئوری با نامتناهی مدل باشد. برای هر ترتیب خطی نامتناهی $(I,<)$ مدل M از T وجود دارد به طوری‌که شامل یک دنباله از تمایز ناپذیرهای مرتب $(x_i : i \in I)$ باشد.*

۲.۲ فیلتر، فرافیلتر، فراضرب

مطالبی که در این بخش بیان می‌کنیم یکی از مباحث پرکاربرد مدل تئوری است که ما در اینجا به مفاهیمی که نیاز داریم اشاره می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. یك فیلتر روی مجموعه ناتهی S، مجموعه‌ی $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های S است به طوری‌که

(i) $S \in \mathcal{F}$ و $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(ii) $X \in \mathcal{F}$ و $Y \in \mathcal{F}$ آنگاه $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

(iii) اگر $X, Y \subset S$ و $X \in \mathcal{F}$ و $X \subset Y$ آنگاه $Y \in \mathcal{F}$.

تعریف ۲.۲.۲. یك فیلتر $\mathcal{U}$ روی یك مجموعه‌ی S فرا فیلتر است هرگاه برای هر
$X \in \mathcal{U}$ یا $S - X \in \mathcal{U}$.

دو نوع فرا فیلتر وجود دارد، آزاد واصلی، یک فرا فیلتر اصلی $\mathcal{U}$ اصلی است اگر وفقط اگر شامل یک مجموعه‌ی متناهی باشد. یك فیلتر که اصلی نیست را فیلتر آزاد یا غیراصلی گوییم.

قضیه ۳.۲.۲ (فراضرب)**.** *(گزاره ۱.۷.۷ در مرجع [۸]) فرض کنید L یك زبان، I یك مجموعه اندیس، $\mathcal{U}$ یك فرافیلتر روی I و برای هر $i \in I$ و M_i یك L ساخت باشد. حال یك L ساخت جدید روی مجموعه ی $\prod_{i\in I} M_i$ تعریف می‌کنیم به این صورت که:*

$$(x_i) \sim (y_i) \iff \{i : x_i = y_i\} \in \mathcal{U}$$

$\sim$ یك رابطه‌ی هم ارزی است

$$M = \prod_{i\in I} M_i/\sim$$

کلاس $(x_i)_{i\in I}$ را با $[x_i]$ نشان می‌دهند. در این صورت برای هر فرمول $\varphi(X_۱, \ldots, X_n)$ وبرای هر $x_۱, \ldots, x_n \in M$

$$M \models \varphi(x_۱, \ldots, x_n) \iff \{i \in I | M_i \models \varphi(x_{۱i}, \ldots, x_{ni})\} \in \mathcal{U}.$$

۳.۲ مدل‌های همگن وآکنده

بخاطر کاربرد بالای مدل های همگن وآکنده در فصول بعد، ما اشاره‌ی کوتاهی به تعاریف ویك سری قضایای این مبحث داریم.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید k کاردینال نامتناهی باشد، گوییم $M \models T$، k- آکنده[۴] است هرگاه برای هر $A \subseteq M$ وk $|A| <$ و $p \in S_n^M(A)$ در این صورت داشته باشیم p در M برآورده [۵] می‌شود.

تعریف ۲.۳.۲. اگر M و N، L-ساختار و $B \subseteq \mathbf{M}$ باشند. $f : B \to \mathbf{N}$ را یك نگاشت مقدماتی جزئی گوییم اگروفقط اگر برای هر L-فرمول ϕ و دنباله ی متناهی $\bar{b}$ از B داشته باشیم

$$M \models \phi(\bar{b}) \iff N \models \phi(f(\bar{b})).$$

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید k کاردینال نامتناهی باشد، گوییم $M \models T$ kهمگن است هرگاه برای هر $A \subseteq M$ و k $|A| <$ و هر نگاشت مقدماتی $f : A \longrightarrow M$ یك نگاشت مقدماتی جزئی باشد آنگاه $a \in \mathbf{M}$، $f^* \supseteq f$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f^* : A \cup \{a\} \longrightarrow M$ مقدماتی جزئی است.

---

[۴] saturated

[۵] realize

ساختارM را قویاً λ همگن گوییم هرگاه هر زوج از چندتایی های $\bar{a}, \bar{b}$ کمتر از λ عنصر ازM، $(M, \bar{a}) \equiv (M, \bar{b})$ آنگاه یك خودریختی ازMوجود داشته باشد به طوری‌که $\bar{a}$ را به $\bar{b}$ می‌برد.

قضیه ۲.۳.۴. *برای هر M یك مدل k^+ آکنده،N، $M \prec N$ وجود دارد به طوری که* $|\mathbf{N}| \leq |\mathbf{M}|^{\mathbf{k}}$.

برهان.ادعا. برای هر M ، $M \prec M'$ به‌طوریکه $|\mathbf{M'}| \leq |\mathbf{M}|^{\mathbf{k}}$ وجود دارد و اگر $A \subseteq \mathbf{M}$ و $|A| \leq k$ و $p \in S_1^M(A)$ باشد آنگاه p در M برآورده می‌شود.
ابتدا توجه کنید

$$|\{A \subseteq \mathbf{M} : |\mathbf{A}| \leq \mathbf{k}\}| \leq |\mathbf{M}|$$

چون برای هر نگاشتk بروی A وجود دارد و همچنین برای چنین A و $S_1^M(A) \leq 2^k$. فرض کنید $(p_\alpha : \alpha < |\mathbf{M}|)$ لیست همه تایپ‌ها در $S_1^M(A)$ برای $n < \omega$ و $A \subseteq \mathbf{M}$ با $|A| \leq k$ باشد. زنجیر مقدماتی $(M_\alpha : \alpha < |\mathbf{M}|)$ را به صورت زیر می سازیم:

(i) $M_0 = M$

(ii) برای هر اردینال حدی α داریم $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$.

(iii) $M_\alpha \prec M_{\alpha+1}$ با $|M_{\alpha+1}| = |M_\alpha|$ و $M_{\alpha+1}$ ، p_α را برآورده می‌کند.

طبق استقرا می بینیم که برای هر α ، $|\mathbf{M}_\alpha| \leq |\mathbf{M}|^{\mathbf{k}}$ باشد. فرض کنید $M' = \bigcup_{\alpha<|\mathbf{M}|^{\mathbf{k}}} M_\beta$ آنگاه M' مدل مورد نظر است وادعا ثابت می شود.
حال ما یك زنجیر مقدماتی $(N_\alpha : \alpha < k^+)$ می‌سازیم به طوریکه $|\mathbf{N}_\alpha| < |\mathbf{M}|^{\mathbf{k}}$ باشد و

(i) $N_0 = M$

(ii) برای هر اردینال حدی α داریم $N_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$.

(iii) $N_\alpha \prec N_{\alpha+1}$ ، $|N_\alpha| \leq |\mathbf{M}|^{\mathbf{k}}$ و اگر $A \subseteq \mathbf{N}_\alpha$ با $|A| \leq k$ و $p \in S_n^{N_\alpha}(A)$ باشد، آنگاه p در $N_{\alpha+1}$ برآورده می‌شود.

و این توسط ادعا امکان پذیر است چون طبق استقرا

$$|\mathbf{N}_\alpha| \leq (|\mathbf{M}|^{\mathbf{k}})^{\mathbf{k}} = |\mathbf{M}|^{\mathbf{k}}.$$