بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

(گرایش آنالیز عددی)

روش تکراری شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

از:

رضا رخ فروز کیسمی

استاد راهنما:

دکتر داود خجسته سالکویه

زمستان ۱۳۹۳

تقدیم به

همسرعزیزم و دخترم رونیکا

عزیزانی که کلام امید بخششان مایه دلگرمی و آرامش
و وجود پرمحبتشان شادی بخش زندگی من بوده است.

تقدیم به

برادر، پدر و مادر مهربانم

آنانکه دعاهای خالصانه آنها همواره راهگشا و امیدبخش زندگی من بوده است.

تقدیر و تشکر:

سپاس خدا را به اندازه همه سپاسی که نزدیک‌ترین فرشتگان و گرامی‌ترین بندگان و پسندیده‌ترین ستایش کنندگان او را ستایش کرده‌اند، سپاسی که بر سپاس‌های دیگر برتری داشته باشد مانند برتری که پروردگار نسبت به آفرینندگان دارد.

منّت خدای را عزّوجلّ که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت؛ هر نفسی که می‌رود ممدّ حیات است و چون برآید مفرّح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمت، شکری واجب.

سپاس و تشکر قلبی خود را به استاد فرهیخته و ارجمندم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه ابراز می‌دارم؛ به پاس اینکه تجربه سال‌ها تحقیق خود را در اختیارم گذاشتند و چگونگی تحقیق و تفحّص را به من آموختند و در همه عمر، از ایشان سپاسگزارم. همواره برای ایشان و خانواده محترمشان آرزوی سلامتی، سعادت و توفیقات روزافزون دارم.

در پایان از همه اعضای خانواده‌ام مخصوصاً پدر و مادر مهربانم که در تمام دوران تحصیلاتم همواره مشوق من بودند، و نیز همسر عزیز و صبورم که در تمام مدت مطالعه و نگارش این پایان نامه در کنارم بودند، بی‌نهایت سپاسگزارم.

رضا رخ فروز کیسمی

زمستان ۱۳۹۳

چکیده فارسی

روشهای تکراری شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

رضا رخ فروز کیسمی

روش شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج (HSS) که توسط بای و همکارانش ارائه شده است، یک روش تکراری کارا برای حل دستگاه معادلات خطی معین مثبت تُنک می‌باشد. اخیراً بای و همکارانش با ترکیب کردن این روش و روش نیوتن روشی به نام Newton-HSS، را برای حل دستگاه معادلات غیرخطی تُنک با ماتریس ژاکوبی معین مثبت ارائه کرده‌اند. در این روش، از روند تکراری نیوتن برای تکرار حلقه بیرونی دستگاه و از روش تکراری HSS برای تکرار حلقه داخلی دستگاه استفاده شده است. در این پایان نامه، این روش را با جزئیات کامل بررسی کرده، همگرایی روش Newton-HSS را مطالعه نموده و این روش تکراری را با روشهای Newton-LU و Newton-GMRES مقایسه می‌کنیم. در پایان نتایج عددی مختلفی در خصوص کارایی روشهای بررسی شده ارائه می‌دهیم.

کلیدواژه:

شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج، معادلات خطی، معادلات غیرخطی، معین مثبت، تُنک، روش نیوتن

فهرست مندرجات

لیست جداول

پیش‌گفتار

حل بسیاری از مسائل کاربردی در علوم محاسباتی و مهندسی، از جمله گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل و انتگرال غیرخطی و بعلاوه بهینه‌سازی عددی، منجر به حل دستگاه معادلات غیرخطی تنک با ابعاد بزرگ می‌شود(به [۷]، [۱۴] یا [۱۶] رجوع شود).

فرض کنید $F : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$، تابع غیرخطی با مشتقات پیوسته باشد. ماتریس ژاکوبی تابع غیرخطی $F(x)$ که با $F^{'}(x)$ نشان می‌دهیم معین مثبت می‌نامیم، اگر بخش هرمیتی آن که به صورت

$$H(F^{'}(x)) = \frac{۱}{۲}(F^{'}(x) + (F^{'}(x))^H),$$

بیان می‌شود، معین مثبت هرمیتی باشد. بخش هرمیتی—کج ماتریس ژاکوبی تابع غیرخطی F به صورت زیر بیان می‌شود:

$$S(F^{'}(x)) = \frac{۱}{۲}(F^{'}(x) - (F^{'}(x))^H).$$

دستگاه معادلات غیرخطی

$$F(x) = ۰, \qquad (۱.۰.۰)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید x^*، جواب دستگاه (۱.۰.۰) باشد و نیز ماتریس ژاکوبی تابع غیرخطی $F(x)$، در نقطه x^* که با $F^{'}(x^*)$ نشان می‌دهیم تُنک، غیرهرمیتی و معین مثبت باشد.

در این پایان نامه، روشهای تکراری کارا برای حل این گونه دستگاه‌ها و نیز همگرایی آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از قدیمی‌ترین و مهمترین روشها برای حل دستگاه معادلات غیرخطی رابطه (۱.۰.۰)، روش نیوتن است که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$x^{(k+۱)} = x^{(k)} - (F^{'}(x^{(k)}))^{-۱}F(x^{(k)}), \qquad k = ۰, ۱, ۲, \ldots,$$

که در آن $x^{(0)}$، یک بردار اولیه داده شده است. بدیهی است روش نیوتن را می‌توان به صورت

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}, \tag{2.0.0}$$

نوشت که برای محاسبه $s^{(k)}$ لازم است دستگاه

$$F^{'}(x^{(k)})s^{(k)} = -F(x^{(k)}), \tag{3.0.0}$$

حل شود. زمانی که ماتریس ژاکوبی $F^{'}(x)$ تُنک و دارای بعد بزرگ است، روشهای تکراری ایستای گاوس سایدل[1]، SOR[2]، USOR[3] و...(به [10] یا [14] رجوع شود) یا روشهای تکراری مبتنی بر زیر فضای کرایلف مانند GMRES[4] و CG[5]، (به[12] یا [2] رجوع شود) در اغلب موارد به عنوان روشهای تکراری موثر برای محاسبه تقریبی بردار $s^{(k)}$ در رابطه (3.0.0) به کار می‌روند. روش تکراری شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج (HSS)[6] که توسط بای[7] و همکارانش در [6] معرفی شده است، روشی کارا برای حل دستگاه معادلات خطی با ماتریس غیرهرمیتی معین مثبت است. بای و همکارانش ثابت کردند، روش تکراری HSS بدون هیچ شرطی به جواب واقعی دستگاه همگراست و بعلاوه سرعت همگرایی این روش زمانی که برای ماتریس هرمیتی $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^H)$ به کار می‌رود با سرعت همگرایی روش گرادیان مزدوج یکسان است. همچنین نتایج عددی نشان می‌دهد روش تکراری HSS روشی کارا و قوی برای حل دستگاه معادلات خطی معین مثبت غیرهرمیتی است.

در این پایان نامه، برای حل دستگاه معادلات غیرخطی (1.0.0) بجای استفاده از روشهای تکراری ایستای SOR، USOR و ... و یا روشهای تکراری مبتنی بر زیر فضای کرایلف، از روش تکراری HSS برای حل تقریبی معادلات (3.0.0) بدست آمده از روش نیوتن استفاده می‌کنیم که روش نیوتن—شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج (Newton-HSS)[8] نام دارد.

در فصل اول این پایان‌نامه برخی تعاریف و مفاهیم اولیه را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم روش HSS و همچنین روش شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج ناقص (IHSS)[9] برای حل دستگاه معادلات خطی معین مثبت معرفی می‌کنیم. همچنین همگرایی روش HSS و IHSS در این فصل بررسی خواهد شد. در فصل سوم، روش

[1] Gauss-Seidel
[2] Successive overrelaxation
[3] Unsymmetric Successive overrelaxation
[4] Generalized Minimal Residual
[5] Conjugate Gradient
[6] Hermitian and skew-Hermitian Splitting
[7] Bai
[8] Newton Hermitian and skew-Hermitian Splitting
[9] Inexact Hermitian and skew-Hermitian Splitting

Newton-HSS برای حل دستگاه معادلات غیرخطی با ماتریس ژاکوبی معین مثبت، معرفی می‌کنیم. همچنین همگرایی روش Newton-HSS برای حل دستگاه معادلات غیرخطی با ماتریس ژاکوبی معین مثبت در این فصل بررسی خواهد شد. در فصل چهارم به بررسی نتایج عددی از روشهای معرفی شده می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک نرم روی V تابع‌ای است مثل $||.||$ از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $x \in V$، $||x|| \geq 0$. بعلاوه $||x|| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$؛

(ج) به ازای هر $x, y \in V$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که $V = \mathbb{C}^n$، نرم را نرم برداری و در صورتی که $V = \mathbb{C}^{n\times n}$، نرم را نرم ماتریسی گوئیم.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنیم $V = \mathbb{C}^n$. به ازای هر $p \geq 1$، p–نرم بردار $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in V$ به صورت

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

تعریف می شود. می توان دید که $||.||_p$ شرایط تعریف ۱.۱.۱ را ارضا می‌کند. به ازای $p = 2$ نرم فوق را نرم اقلیدسی[1] می‌نامند.

[1] Euclidean Norm

مثال ۳.۱.۱ اگر $\|.\|$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$، آنگاه

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

یک نرم ماتریسی را تعریف می‌کند. این نرم را نرم طبیعی متناظر به این نرم برداری گویند.

تعریف ۴.۱.۱ یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی (یا مختلط) V، تابع‌ای است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در V، اسکالر حقیقی (یا مختلط) (x,y) نسبت می‌دهد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) (x,x) حقیقی باشد و $(x,x) \geq 0$. بعلاوه $(x,x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) برای هر اسکالر λ، $(x,\lambda y) = \lambda(x,y)$؛

(ج) برای هر $z \in V$، $(x,y+z) = (x,y) + (x,z)$؛

(د) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

مثال ۵.۱.۱ برای هر دو بردار x و y در $\mathbb{C}^n$، ضرب داخلی استاندارد آنها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i.$$

تعریف ۶.۱.۱ ماتریس $N \times N$

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

را یک ماتریس سه‌قطری می‌نامیم و با $T = \mathrm{tridiag}_N(c_i, a_i, b_i)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ (ضرب کرونکر) فرض کنید که $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ و $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$ دو ماتریس دلخواه باشند. در این صورت ماتریس $C \in \mathbb{R}^{pr\times qs}$، ضرب کرونکر ماتریس A در ماتریس B را با نماد

$$C = A \otimes B,$$

نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \dots & Ab_{1s} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \dots & Ab_{2s} \\ & & & \\ Ab_{r1} & Ab_{r2} & \dots & Ab_{rs} \end{pmatrix}.$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریسی با درایه‌های حقیقی باشد. ترانهاده ماتریس A به صورت

$$A^T = (a_{ji}),$$

تعریف می‌شود. در صورتی که $A = (a_{ij})$ ماتریسی با درایه‌های مختلط باشد، ترانهاده هرمیتی ماتریس A به صورت

$$A^H = (\overline{a_{ji}}),$$

تعریف می‌شود. حال فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. ماتریس A را هرمیتی گویند هرگاه $A^H = A$ و آن را هرمیتی—کج گویند اگر $A^H = -A$.

تعریف ۹.۱.۱ ماتریس A را از رتبه کامل گویند هرگاه دارای رتبه کامل سطری یا ستونی باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ بردارهای x_1،x_2،...،x_n را در $\mathbb{C}^n$ دو به دو متعامد گوییم هرگاه

$$(x_i, x_j) = x_i^H x_j = 0, \quad i \neq j,$$

در این صورت اگر قرار دهیم $X = (x_1, \cdots, x_n)$، آنگاه خواهیم داشت:

$$X^H X = D,$$

که در آن D یک ماتریس قطری $n \times n$ می‌باشد. بعلاوه اگر $D = I$ بردارها را متعامد یکه و ماتریس X را متعامد گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را معین مثبت هرمیتی (HPD[1]) گوییم، هرگاه اولاً هرمیتی باشد و ثانیاً به ازای هر بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$، داشته باشیم

$$x^H A x > 0.$$

همچنین ماتریس A را نیمه معین مثبت هرمیتی گویند هرگاه A هرمیتی بوده و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^H A x \geq 0$.

تعریف ۱۲.۱.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را معین مثبت گوییم، هرگاه ماتریس $A + A^H$، معین مثبت هرمیتی باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ ماتریس $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را یکانی[2] گوییم، هرگاه $Q^H Q = I$. اگر Q یکانی باشد، آنگاه

$$\|Q\|_2 = 1.$$

---

[1] Hermitian Positive Definite

[2] unitary

تعریف ۱۴.۱.۱ ماتریس مربعی A را نرمال گویند اگر

$$AA^H = A^H A.$$

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. گوییم $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه[۱] متناظر به بردار ویژه[۲] x برای ماتریس A است، هرگاه

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0,$$

در این صورت (λ, x) را یک زوج ویژه A گویند.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنید $\sigma(A)$ مجموعه تمام مقادیر ویژه ماتریس A باشد. در این صورت بزرگترین مقدار ویژه A از حیث قدر مطلق را شعاع طیفی[۳] ماتریس A گوییم و با $\rho(A)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنید $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ مقادیر ویژه ماتریس $A^H A$ باشند، قرار می‌دهیم

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

مقادیر $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ را مقادیر تکین[۴] ماتریس A می‌نامند.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید ماتریس A نامنفرد باشد، در این صورت

$$k(A) = cond(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2,$$

را عدد شرطی[۵] ماتریس A می‌گوییم. اگر $cond(A)$ کوچک باشد آنگاه دستگاه $Ax = b$ را یک دستگاه خوش شرط[۶]، و در صورتی که $cond(A)$ بزرگ باشد، دستگاه را بد شرط [۷] نامیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$. در این صورت $A = M - N$ را یک شکافت از A گوییم، هرگاه M نامنفرد باشد.

---

[۱] eigenvalue
[۲] eigenvector
[۳] spectral raduis
[۴] singular values
[۵] condition number
[۶] well-conditioned
[۷] ill-conditioned

۲.۱ قضایای اولیه

قضیه ۱.۲.۱ (نامساوی کوشی—کوارتز[1]) اگر $(.,.)$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری V باشد آنگاه به ازای هر $u,v \in V$، داریم:

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}}(v,v)^{\frac{1}{2}}.$$

برهان: به[۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۲.۲.۱ بردارهای ویژه متناظر به مقادیر ویژه متمایز، مستقل خطی هستند.

برهان: به [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۳.۲.۱ مقادیر ویژه یک ماتریس هرمیتی حقیقی‌اند. اگر ماتریس A هرمیتی باشد و همه مقادیر ویژه آن مثبت باشند، آنگاه A معین مثبت هرمیتی است.

برهان: به [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنیم λ یک مقدار ویژه ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد، در این صورت برای هر نرم طبیعی $\|.\|$ داریم، $|\lambda| \leq \|A\|$. به عنوان نتیجه برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و هر نرم طبیعی $\|.\|$ داریم:

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

برهان: به [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۵.۲.۱ برای هر دو ماتریس مربعی و نامنفرد A و B، داریم:

$$\rho(AB) = \rho(BA).$$

برهان: به [۱] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۶.۲.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ، اگر $\|.\|_۲$ ، نرم ماتریسی تولید شده توسط نرم بردار اقلیدسی باشد، آنگاه

$$\|A\|_۲ = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sigma_۱,$$

که در آن $\sigma_۱$، بزرگترین مقدار تکین A است. به عنوان یک نتیجه مهم اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد آنگاه

$$\|A\|_۲ = \rho(A).$$

برهان: به [۱] مراجعه شود. $\square$

[1] Cauchy-Schawarz inequality

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنید A یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد. در این صورت

الف) A^{-1} موجود و معین مثبت هرمیتی است .

ب) دترمینان ماتریس A مثبت است .

ج) تمام زیر ماتریسهای اصلی A معین مثبت هرمیتی هستند.

برهان: به [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۸.۲.۱ مقادیر ویژه ماتریس سه‌قطری T،

$$T = \begin{pmatrix} b & a & & & \\ c & b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & b & a \\ & & & c & b \end{pmatrix}_{N\times N},$$

که در آن $ac > 0$، متمایزند و از رابطه زیر بدست می آیند

$$\lambda_j = b + 2a\sqrt{\frac{c}{a}}\cos(\frac{j\pi}{N+1}), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

برهان: به [۱۳] مراجعه شود. □

قضیه ۹.۲.۱ (قضیه‌ی کیلی – همیلتون[۱]) هر ماتریس مربعی در چند جمله‌ای مشخصه‌اش صدق می‌کند. یعنی اگر $p(x)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد، آنگاه $p(A) = 0$

برهان: به [۱۷] مراجعه شود. □

[۱] Cayley - Hamilton

فصل ۲

روش شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج و روش نیوتن

در این فصل روش شکافت هرمیتی و هرمیتی—کج برای حل دستگاه معادلات خطی معین مثبت و روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیرخطی را معرفی می‌نماییم .

۱.۲ روش تکراری ایستا و غیرایستا

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b, \tag{۱.۱.۲}$$

که در آن $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس نامنفرد است و $x, b \in \mathbb{C}^n$. به طور کلی روشهای حل دستگاه $Ax = b$ دو دسته اند: روشهای مستقیم و روشهای تکراری.

۱.۱.۲ روشهای مستقیم

روشهای مستقیم، روشهایی هستند که پس از تعداد متناهی تکرار، به جواب واقعی دستگاه می‌رسیم. از روشهای این دسته می‌توان به روش حذفی گاوس[۱] و روش گاوس—جردن [۲] (به [۱۰] یا [۱۴] مراجعه شود) اشاره کنیم.

[۱] Gaussian elimination
[۲] Gauss-Jordan elimination

۲.۱.۲ روشهای تکراری

در روشهای تکراری، با استفاده از یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، دنباله‌ای از بردارها تولید می‌شود که به جواب دستگاه همگراست. روشهای تکراری نیز خود شامل روش‌های ایستا[۱] و غیرایستا[۲] می‌باشند. در روش ایستا، ماتریس تکرار در همه گامها ثابت است و تغییر نمی‌کند. به طور کلی در روشهای ایستا، دستگاه (۱.۱.۲) را به صورت

$$x = Gx + f,$$

می‌نویسیم، بنابراین دنباله‌ای مانند

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f, \qquad (۲.۱.۲)$$

ساخته می‌شود. رابطه (۲.۱.۲) شکل کلی یک روند تکراری برای حل دستگاه (۱.۱.۲) است که در آن G را ماتریس تکرار روش گویند. با حدس اولیه $x^{(0)}$ روند تکراری (۲.۱.۲)، دنباله‌ای مثل $\{x^{(k)}\}$ تولید می‌کند به‌طوری‌که تحت شرایطی که در قضیه ۱.۲.۲ خواهیم دید، به جواب دستگاه همگرا می‌شود.
از جمله روشهای ایستا می‌توان به روش ژاکوبی[۳]، گاوس سایدل[۴]، SOR[۵] و ... اشاره کرد.
برخلاف روشهای ایستا، در روشهای غیر ایستا، ماتریس تکرار ثابتی وجود ندارد و در هر گام تغییر می‌کند. از جمله روشهای غیرایستا می‌توان به گرادیان مزدوج[۶]، مانده مینیمال تعمیم یافته (GMRES[۷]) و ... (به [۲] مراجعه شود) اشاره کرد.

قضیه ۱.۱.۲ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. دنباله $\{A^{(k)}\}$، $k = 0, 1, 2, \ldots$ به ماتریس صفر همگراست اگر و تنها اگر $\rho(A) < 1$.

برهان: به [۱۳] مراجعه شود. □

قضیه ۲.۱.۲ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $\rho(A) < 1$، آنگاه $(I-A)^{-1}$ وجود دارد و

$$(I-A)^{-1} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} A^i.$$

---

[۱] Stationary iterative methods
[۲] nonstationary iterative methods
[۳] Jacobi
[۴] Gauss-Seidel
[۵] Successive overrelaxation
[۶] Conjugate gradient
[۷] Generalized Minimal Residual

برهان: داریم:

$$(I-A)(I+A+\cdots+A^{k-1}) = I - A^k. \qquad (۳.۱.۲)$$

چون $\rho(A) < ۱$، آنگاه $I-A$ مقدار ویژه غیر صفر دارد بنابر این وارون پذیر است. دراین صورت معادله (۳.۱.۲) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$I+A+\cdots+A^{k-1} = (I-A)^{-1} - (I-A)^{-1}A^k. \qquad (۴.۱.۲)$$

با توجه به این که بنابر قضیه ۱.۱.۲، $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$، با حد گیری از طرفین معادله (۴.۱.۲) داریم:

$$(I-A)^{-1} = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} A^i. \qquad \square$$

نتیجه ۳.۱.۲ بنا به قضیه۲.۱.۲، اگر $\rho(A) < ۱$، آنگاه

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \sum_{i=0}^{\infty}\|A^i\| = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

۲.۲ همگرایی روشهای تکراری

قضیه ۱.۲.۲ فرض کنید $A = M - N$ یک شکافت از A باشد، $G = M^{-1}N$ و $f = M^{-1}b$. شرط لازم و کافی برای همگرایی روند تکراری $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f$ به ازای هر حدس اولیه $x^{(0)}$ به جواب دستگاه $Ax = b$ این است که: $\rho(G) < ۱$

برهان: به [۱۳] مراجعه شود. $\square$

نتیجه ۲.۲.۲ اگر $\|.\|$ یک نرم طبیعی باشد و $\|G\| < ۱$، آنگاه روند تکراری $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f$ به ازای هر حدس اولیه $x^{(0)}$ به جواب دستگاه $Ax = b$ همگراست.

برهان: بنابر قضیه ۴.۲.۱ داریم:

$$\rho(G) \le \|G\|$$

که به این ترتیب با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. $\square$