بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حل معادلات دیفرانسیل هذلولوی با روش آنالیز هوموتوپی

از :

بتول قره‌داغی

استاد راهنما:

دکتر جعفر بی‌آزار

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

و

همسر عزیزم

تقدیر و تشکر

هر چند زبان ها قاصرند از مدحی در خور پروردگار عالمیان، اما در حد توان خویش، سپاسش می گویم که عمری بخشید و توانی داد تا بتوانم در راه علم قدم گذارم و کسانی را در کنارم قرار داد که در این راه، یاری گرم باشند.

از آقای دکتر جعفر بی آزار که در این مدت، این فرصت را به من دادند تا از رهنمودهای علمی و اخلاقی اشان بهره مند شوم و به خاطر همه تلاش هایشان که برای پیشرفت این پایان نامه انجام شد، سپاس گذارم.

از آقای دکتر امینی خواه و خانم دکتر آیاتی که زحمت داوری این پایان نامه را پذیرفتند، تشکر می کنم.

از آقای دکتر مهردوست، نماینده تحصیلات تکمیلی، به دلیل حضورشان، قدردانی می کنم.

از دوستان عزیزم که همواره در کنارم بودند و مهرشان شامل حالم بود، به خاطر همراهی شان ممنونم.

از خانواده عزیزم و همسرم به خاطر تمام حمایت ها و لطف هایشان بی نهایت سپاس گذارم و می دانم که قادر نخواهم بود که از زحمات چندین ساله پدر و مادرم برای پیشرفت خود، در چند جمله قدردانی کنم اما امیدوارم همیشه سربلند و سلامت باشند.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: تعاریف و مفاهیم اساسی

فصل دوم: حل معادلات هذلولوی با روش تجزیه آدومین

فصل سوم: روش آنالیز هوموتوپی

فصل چهارم: حل معادلات هذلولوی باروش آنالیز هوموتوپی

فصل پنجم: کاربرد نرم افزار میپل در انجام محاسبات

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

چکیده

حل معادلات دیفرانسیل هذلولوی با روش آنالیز هوموتوپی

بتول قره‌داغی

روش آنالیز هوموتوپی (HAM) توسط لیائو در سال ۱۹۹۲ پیشنهاد شده است. از این روش برای به‌دست آوردن جواب تقریبی انواع مختلف معادلات تابعی در علوم پایه و مهندسی و سایر علوم استفاده شده است. روش آنالیز هوموتوپی از چند جهت از سایر روش‌های تحلیلی برتر است. نخستین علت تمایز این است که کلی‌تر از سایر روش‌ها می‌باشد، در واقع می‌توان نشان داد که روش‌های آشفتگی هوموتوپی و تجزیه آدومین حالت خاصی از این روش می‌باشند. دلیل دیگر تمایز، کنترل ناحیه همگرایی روش می‌باشد.

در این پایان‌نامه روش آنالیز هوموتوپی که یک روش جامع و موثر برای حل انواع معادلات تابعی است، برای حل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی تحت عنوان معادلات هذلولوی مورد استفاده قرار می‌گیرد و نتایج به‌دست آمده از این روش با روش تجزیه آدومین مقایسه می‌شود. این مقایسه برتری روش آنالیز هوموتوپی نسبت به سایر روش‌های عددی را نشان می‌دهد. برای انجام محاسبات از نرم افزار Maple۱۳ استفاده شده است.

کلید واژه‌ها : روش آنالیز هوموتوپی ، معادلات هذلولوی ، روش تجزیه آدومین.

Abstract

Solving Hyperbolic equations with Homotopy analysis method

Batool Gharehdaghi

The Homotopy analysis method (HAM) proposed by Dr.shijun Liao in ۱۹۹۲. This method is used to obtain approximate solution of a variety of functional equations in Basic Sciences and engineering and other sciences. Homotopy analysis method distinguishes itself from the other analytical methods in the following several aspects.The first distinction is more general than other methods due to the fact that the Homotopy perturbation method and Adomian decomposition method are a special case of Homotopy analysis method.Another distinction is the method of controlling the convergence region.

This thesis is a comprehensive and effective approach Homotopy analysis method to solve a variety of functional equations, are used to solve a set of partial differential equations known as the Hyperbolic equations and the results obtained from this method is compared with the Adomian decomposition method. For computations are performed by Maple ۱۳.

***Keywords*:** Homotopy analysis method , Hyperbolic equations , Adomian decomposition method

پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل یکی از مباحث اصلی در علوم پایه و مهندسی می‌باشد و کاربردهای فراوانی در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی جهان اطراف ما دارند. برای اکثر معادلات امکان پیدا کردن جواب تحلیلی وجود ندارد در چنین مواقعی استفاده از یک روش عددی برای حل این مشکل مفید است. در این پایان نامه روش آنالیز هوموتوپی برای حل معادلات هذلولوی مورد استفاده قرار می-گیرد.

ارائه مطالب به شرح زیر است

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اساسی در معادلات دیفرانسیل جزئی شرح داده شده است. در فصل دوم روش تجزیه آدومین معرفی شده و از آن در حل معادلات هذلولوی استفاده شده است. در فصل سوم روش آنالیز هوموتوپی و برخی قضایای مهم و ارتباط بین روش آنالیز هوموتوپی و روش تجزیه آدومین مطرح شده است. در فصل چهارم به حل معادلات هذلولوی با روش‌های آنالیر هوموتوپی و تجزیه آدومین اختصاص داده شده است و در فصل پنجم برنامه‌هایی که با استفاده از نرم افزار به‌منظور انجام محاسبات تهیه شده، ارائه شده است.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه در معادلات دیفرانسیل جزئی

۱-۱: مقدمه

۱-۲: معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی

۱-۳: شرایط اولیه و مرزی برای معادلات دیفرانسیل جزئی

۱-۴: معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل

۱-۵: صورت نرمال معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دوم

۱-۱: مقدمه

بسیاری از پدیده‌ها در طبیعت، و یا علوم تجربی مانند (فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی،...) با یکدیگر ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی، منجر به یک معادله تابعی می‌شود که اگر آهنگ تغییرات یک معادله تابعی نسبت به یک یا چند متغیر مستقل بررسی شود، می‌توان آن پدیده را با معادلات دیفرانسیل بیان کرد. کاربردهای معادلات دیفرانسیل هم‌چنین در ریاضیات به ویژه در هندسه و نیز در مهندسی و اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر علوم فراوانند. معادلات دیفرانسیل در بسیاری از پدیده‌های علوم مهندسی و پایه ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال در مکانیک، حرکت جسم به‌وسیله سرعت و مکان آن در زمان‌های مختلف توصیف می‌شود، و قانون دوم نیوتن رابطه بین جرم جسم متحرک، شتاب، و نیروهای گوناگون وارده را مشخص می‌کند. در چنین شرایطی می‌توانیم حرکت جسم را در قالب یک معادله دیفرانسیل که در آن مکان ناشناخته جسم تابعی از زمان است، بیان کنیم .

معادلات دیفرانسیل دارای ساختارهای متفاوتی می‌باشند و هر ساختار ویژگی‌های خاص خود را دارد. تکنیک‌های فراوانی برای تقریب زدن جواب وجود دارد مثلاً تقریب زدن جواب به صورت سری‌های توانی یا روش‌های عددی.

۱-۲: معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی

هر رابطه بین یک متغیر وابسته و مشتق‌هایش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل می‌گویند. اگرتعداد متغیر مستقل یکی باشد، معادله دیفرانسیل را معمولی[۱] (ODE) گوییم و اگر تعداد متغیر مستقل بیشتر از یکی باشد مشتقات جزئی هستند، و معادله دیفرانسیل را، معادله دیفرانسیل جزئی[۲](PDE) گوییم.

۱.Ordinary Differential Equation
۲.Partial Differential Equation

فرض می‌کنیم $x=(x_۱,\dots,x_n)$ متغیرهای مستقل باشند، و $u=u(x)$ نیز تابع مجهول وابسته باشد، شکل کلی معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت زیر بیان می‌شود

$$F(x,u(x),D\,u(x),\dots\dots,D^n\,u(x))=\cdot. \qquad (۱-۱)$$

که در آن F یک تابع مفروض و $D^j u(x)$ یک بردار است که تمامی مشتق‌های جزئی از مرتبه j ام را در برگرفته است. البته لازم به‌ذکر است که ممکن است بعضی از مشتق‌ها موجود نباشند.

به عنوان مثال $Du(x)$ و $D^۲u(x)$ به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_۱},\frac{\partial u}{\partial x_۲},\dots\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad (۲-۱)$$

$$\frac{\partial^۲ u(x)}{\partial x^۲}=\left(\frac{\partial^۲ u}{\partial {x_۱}^۲},\frac{\partial^۲ u}{\partial x_۱\partial x_۲},\dots\dots,\frac{\partial^۲ u}{\partial x_i\partial x_j},\dots,\frac{\partial^۲ u}{\partial {x_n}^۲}\right), \qquad ۱\le i,j\le n.$$

نماد گذاری: گاهی اوقات مشتق‌های جزئی به‌گونه‌ای نوشته می‌شوند که متغیر مستقل در اندیس ظاهر می‌شود به عنوان مثال $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial^۲ u}{\partial x\partial y}$ را به ترتیب به‌صورت u_{xy} و u_x نشان می‌دهند.

۱-۲-۱: مثال

معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$۱)\ x^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}-۲y=۳x^۲-۱,$$

$$۲)\ u_{xx}+۲u_{xy}+\ yu_{xy}+u_{yy}=\cdot.$$

معادله اول یک معادله دیفرانسیل معمولی و معادله دوم، یک معادله دیفرانسیل جزئی است.

۱-۲-۲: تعریف

مرتبهٔ یک معادله دیفرانسیل جزئی، بالاترین مرتبهٔ مشتق است که در آن معادله ظاهر شده است.

بنابراین معادله زیرکه حالت کلی از معادله دیفرانسیل جزئی است، از مرتبه k است اگر k بزرگترین عددی باشد که $D^k U \neq ۰$.

$$F\left(x, u(x), D\, u(x), \ldots\ldots, D^k\, u(x)\right) = ۰. \qquad (۱-۳)$$

درجه بالاترین مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل (معمولی یا جزئی) را درجهٔ معادله دیفرانسیل گوییم.

۱-۲-۳: مثال

معادلات زیر را در نظر بگیرید.

معادله لاپلاس[۱] $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰,$

معادله گرما[۱] $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t\,,$

معادله دیم [۳] $u_t = u^۲ u_{xxx}.$

معادله‌های لاپلاس و گرما از مرتبه دو ، و درجه یک می‌باشند و معادلهٔ دیم از مرتبه سه و درجه یک می‌باشد.

۱-۲-۴: تعریف

یک معادله دیفرانسیل را خطی گوییم اگر تابع مجهول و تمام مشتق‌های موجود در آن از درجه یک باشند، یعنی جملاتی به صورت حاصل‌ضرب تابع مجهول و مشتق‌های آن در معادله وجود نداشته باشد.

---

۱. Laplace Equation
۲.Heat Equation
۳.Dym Equation

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی به صورت زیر است

$$a_n(x)D^n u + a_{n-1}(x)D^{n-1}u + \dots\dots\dots + a_0 = F(x). \quad (۴-۱)$$

در غیر این‌صورت معادله دیفرانسیل غیرخطی است و اگر نسبت به بالاترین مرتبه مشتقی که در معادله ظاهر شده خطی باشد، معادله دیفرانسیل را شبه خطی گوییم.

۱-۲-۵: مثال

معادلات زیررا در نظر بگیرید.

۱) $y^2 u_{yy} + (x+y)u_x = x^2 + 1,$

۲) $u_{xxx} + u^2{}_{yy} = sinu\,,$

۳)$(u_{xx})^3 + (u_{yy})^2 = (t+1)u\,.$

معادلهٔ اول، خطی از مرتبه دوم و درجه یک،و معادله دوم، شبه خطی از مرتبه سه و درجه یک، و معادله سوم غیر خطی از مرتبه دوم و درجه سه می‌باشد.

۱-۲-۶ : تعریف

اگر هر جمله معادله دیفرانسیل جزئی شامل متغیر وابسته یا یکی از مشتق‌های آن باشد آن‌گاه آن معادله همگن است در غیر این-صورت ناهمگن محسوب می‌شود.

۱-۲-۷ : مثال

معادلات زیر را در نظر بگیرید.

معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0,$

معادله پواسن[۱] $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y).$

معادله لاپلاس یک معادله دیفرانسیل‌جزئی خطی همگن و معادله پواسن، درصورتی‌که $f(x, y) \neq ۰$، یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرهمگن است.

۱-۲-۸: تعریف

جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی با متغیرهای مستقل در ناحیه D ، تابعی است که در این ناحیه تمامی مشتقات جزئی‌اش در معادله وجود داشته باشد و در معادله صدق کند.

۱-۳: شرایط اولیه و مرزی برای معادلات دیفرانسیل جزئی

برای به‌دست آوردن جواب هر معادله دیفرانسیل جزئی، باید شرایطی در دست باشد که به ما در پیدا کردن جواب معادله کمک کند. معمولاً این شرایط در قسمتی از ناحیه‌ای که ما جواب را در آن جستجو می‌کنیم بیان خواهد شد. واضح است که شرایط مرزی، تابع مجهول یا مشتق های آن در نواحی مرزی تعیین شده را توصیف می‌کند و شرایط اولیه تابع مجهول را در زمان آغازی معین می‌کند.

۱-۳-۱: مثال

معادله زیر را درنظر بگیرید.

$$u_{xx} = u_t \,, \qquad ۰ \leq x \leq ۱,$$

شرایط اولیه این معادله به‌صورت زیر است

$$u(x, ۰) = g(x) \,,$$

[۱]. Poisson Equation

و شرایط مرزی عبارت است از

$$u(\cdot,t) = a(x), \quad u(\text{۱},t) = b(x), \qquad t \geq \cdot\,.$$

۱-۴: معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل

یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم، معادله‌ای است که در آن مشتقات تابع مجهول از مرتبه اول و دوم هستند و بالاترین مشتق موجود در آن از مرتبه دوم است. به‌عبارت دیگر به‌شکل زیر است

$$F\big(x, u(x), Du(x), D^{\text{۲}}u(x)\big) = \cdot. \qquad (\text{۵} - \text{۱})$$

این معادلات کاربردهای زیادی در مسائل مکانیک سیالات و مکانیک جامدات، انتشار موج، و هدایت گرما در جامدات و غیره دارند.

به همین جهت حل آن‌ها بسیار اهمیت دارد و روش‌های تحلیلی زیادی برای حل آن‌ها پیشنهاد شده است.

۱-۴-۱: دسته بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل

این معادلات در حالت کلی به شکل زیر هستند

$$a(x,y)\,\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial x^{\text{۲}}} + b(x,y)\,\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\,\frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial y^{\text{۲}}} = w(x,y), \qquad (\text{۶} - \text{۱})$$

که در آن a، b، c، و w مقادیر ثابت، یا توابعی از متغیرهای مستقل و یا بر حسب u هستند[۲،۱] .

فرض کنید

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial x^{\text{۲}}} = r, \qquad \frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial y^{\text{۲}}} = t, \qquad \frac{\partial^{\text{۲}} u}{\partial x \partial y} = s.$$

معادله (۱-۶) به‌شکل زیر نوشته می‌شود

$$ar + bs + ct = w.$$

برای ادامه کار دو تعریف ارائه می‌شود.

۱-۴-۲ : تعریف

منحنی مشخصه یک معادله دیفرانسیل، منحنی‌هایی هستند که روی آن‌ها بالاترین مرتبه مشتق به طور یکتا معین نیستند. چون معادله از مرتبه دوم است لذا بالاترین مرتبه مشتق دوم مدنظر است که آن‌ها را t ،s، وr نام‌گذاری کردیم.

۱-۴-۳: تعریف

معادله دیفرانسیل مشخصه معادله‌ای است که منحنی مشخصه جواب‌های آن هستند.

دیفرانسیل‌های q وp عبارت اند از

$$dp = \frac{\partial^{۲}\mathrm{u}}{\partial x^{۲}}\, dx + \frac{\partial^{۲}\mathrm{u}}{\partial x \partial y}\, dy$$

$$= r\, dx \;+\; s\, dy, \qquad (۷-۱)$$

$$dq = \frac{\partial^{۲}\mathrm{u}}{\partial x \partial y}\, dx + \frac{\partial^{۲}\mathrm{u}}{\partial y^{۲}}\, dy$$

$$= s\, dx + t\, dy.$$

حال سه معادله را به صورت یک دستگاه می‌نویسیم

$$\begin{cases} ar + b\, s + c\, t = w, \\ r\, dx + s\, dy = dp, \\ s\, dx + t\, dy = dq. \end{cases} \qquad (۸-۱)$$

t ،s، وr مجهولند. لذا برای این‌که این دستگاه جواب یکتا داشته باشد دترمینان ماتریس ضرایب باید مخالف صفر باشد.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ dx & dy & ۰ \\ ۰ & dx & dy \end{vmatrix} \neq ۰. \qquad (۹-۱)$$

طبق تعریف منحنی‌های مشخصه، منحنی‌هایی هستند که در آن‌ها این دستگاه جواب ندارد، یعنی ۰ =D .

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = ۰.$$