دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده علوم

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی

عنوان

حل عددی مسائل کنترل بهینه فردهلم

نگارش

سیما آغچی

استاد راهنما

دکتر فریده قریشی

استاد مشاور

دکتر محمدرضا پیغامی

آبان ۱۳۹۱

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، خانم دکتر فریده قریشی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمدرضا پیغامی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از صونا و الناز عزیز و برادر نازنینم آرش و تمام دوستانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سیما آغچی- آبان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: آغچی **نام:** سیما

عنوان پایان‌نامه: مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال ولترا و فردهلم

استاد راهنما: دکتر فریده قریشی

استاد مشاور: دکتر محمدرضا پیغامی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی

گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی **دانشکده:** علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: پاییز ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:** ۵

کلیدواژه‌ها: معادلات انتگرال ولترا، معادلات انتگرال فردهلم، مسائل کنترل بهینه

چکیده:

در این پایان‌نامه، ابتدا مفاهیم اولیه در ارتباط با مسائل کنترل بهینه فردهلم و ولترا و برخی قضایای مرتبط به وجود و یکتایی جواب را بیان کرده و سپس با استفاده از روش‌های عددی متفاوت به حل مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال غیرخطی ولترا و فردهلم می‌پردازیم. در ادامه به معرفی روش‌های طیفی بالاخص روش شبه طیفی بر اساس توابع پایه لاگرانژ پرداخته و با استفاده از این روش، به حل مسئله کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال غیرخطی فردهلم می‌پردازیم. در انتهای تمامی فصول با ارائه مثال‌هایی، کارایی این روش‌ها را نشان داده‌ایم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

مقدمه

نظریه کنترل بهینه که امروزه نقش اساسی در طراحی سیستم‌های مدرن ایفا می‌کند، در واقع ماکزیمم یا مینیمم‌سازی یک مسئله فیزیکی یا یک پدیده طبیعی مدل‌بندی شده به صورت ریاضی برای بدست آوردن مسیرهای بهینه صادق در قیود مسئله می‌باشد. این نظریه به دلیل کاربردهای فراوانش در علوم پایه و مهندسی، از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است.

روش‌های مختلفی برای حل مسائل کنترل بهینه وجود دارد که در یک طبقه‌بندی کلی می‌توان آنها در دو دسته مستقیم و غیرمستقیم قرار داد. در این پایان‌نامه به مطالعه روش‌های مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال متمرکز خواهیم شد.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است که در آن به کاربرد روش‌های مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال پرداخته می‌شود.

در فصل اول، با ارائه مقدمه‌ای، با معرفی معادلات انتگرال و دستگاه معادلات انتگرال فردهلم و ولترا، به ارائه قضایای مقدماتی در ارتباط با وجود و یکتایی این نوع معادلات پرداخته‌ایم. سپس با بیان مقدماتی کوتاه در مفاهیم اساسی نظریه کنترل بهینه، این فصل را به پایان برده‌ایم.

فصل دوم و سوم را به ترتیب با عناوین مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال ولترا و مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال فردهلم نامگذاری کرده‌ایم. از آنجا که هدف اصلی ما در این پایان‌نامه، مطالعه مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال فردهلم

می‌باشد، لذا با ارائه مقدمه‌ای کوتاه در مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال ولترا در فصل دوم، این نوع مسائل را تنها با استفاده از یک روش عددی بنام روش توابع مثلثی حل و با بیان مثالی این فصل را به پایان رسانده‌ایم.

مطالب فصل سوم را در چهار بخش مجزا بیان کرده‌ایم. در بخش اول این فصل با ارائه‌ای مختصری از تاریخچه مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال فردهلم، کارهای پژوهشی انجام شده در دهه‌های اخیر را به صورتی دقیق بیان کرده‌ایم. سه بخش بعدی این فصل، معرفی سه روش عددی کارآمد برای حل مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال را شامل می‌شود. چارچوب کلی تمامی این بخش‌ها از پنج قسمت اصلی تشکیل شده است:

- بیان اصلی مسئله
- گسسته‌سازی مسئله و معرفی روش مورد نظر
- اعمال روش مورد نظر روی مسئله
- آنالیز خطا
- مثال‌های عددی

در فصل چهارم با الهام از مطالب فصول قبلی به ارائه روشی نوین و مستقیم برای مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال فردهلم پرداخته‌ایم. مطالب این فصل را در سه بخش مجزا تنظیم کرده‌ایم. بخش اول را با معرفی روش‌های طیفی آغاز کرده و ضمن بیان مقدمه‌ای کوتاه برای روش مربوطه، کارایی این روش را در زمینه‌های مختلف بیان کرده‌ایم. بخش دوم این فصل را به معرفی کامل روش شبه طیفی در حالت کلی اختصاص داده‌ایم و با معرفی چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، روش شبه طیفی را بر اساس پایه‌های این چندجمله‌ای بیان کرده‌ایم.

این بخش را با ارائه مثالی به پایان رسانده‌ایم. در نهایت در بخش سوم این فصل به اعمال روش شبه طیفی با پایه‌های لاگرانژ روی مسائل کنترل بهینه درگیر با معادلات انتگرال فردهلم پرداخته‌ایم و به همراه بیان اصلی مسئله، جواب‌های مسئله را با پایه‌های لاگرانژ تقریب زده و بدین ترتیب با گسسته‌سازی مسئله کنترل بهینه به حل این مسائل پرداخته‌ایم. ارائه مثال‌های پایانی بخش مباحث ما در این فصل خواهد شد.

فصل ۱
تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

هدف ما در این فصل، معرفی انواع معادلات انتگرال و بیان مقدماتی در نظریه‌ی کنترل بهینه می‌باشد. به منظور آشنایی مختصر با این نظریه و تسهیل در امر ارجاع به قضایا و تعاریف مورد نیاز در بخش‌های آتی این پایان‌نامه، ما را بر آن داشت تا این فصل را به رشته تحریر درآوریم. اثبات یک نتیجه فقط در صورتی ارائه شده است که کاملاً ناآشنا باشد.

۲.۱ معرفی معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. این نوع معادلات رابطه‌ی تنگاتنگی با معادلات دیفرانسیل دارند. از جمله مسائل درگیر با معادلات انتگرال، می‌توان به مسئله‌ی ارتعاش یک ریسمان، معادلات ماکسول و .... اشاره کرد. البته مسائل ارتعاش را می‌توان توسط معادلات دیفرانسیل نیز حل کرد.

تعریف ۱.۲.۱. یک معادله انتگرال عبارت است از

$$(\lambda I + \mathcal{K})x(t) = f(t), \qquad (۱.۱)$$

که در آن $\mathcal{K}$ یک عملگر انتگرالی روی یک فضای تابعی، I عملگر همانی، λ مقداری حقیقی،

$f(t)$ تابعی دلخواه و $x(t)$ تابع مجهول است. معادله انتگرال (؟؟) را ناهمگن گوییم هرگاه $f(t) \neq 0$ و همگن گوییم، هرگاه $f(t) = 0$ باشد. به همین ترتیب، این معادله را خطی گوییم هرگاه $\mathcal{K}$ یک عملگر خطی باشد و غیرخطی گوییم هرگاه $\mathcal{K}$ یک عملگر غیرخطی باشد.

تعریف ۲.۲.۱. معادله انتگرال (؟؟) را

الف– معادله انتگرال **فردهلم**[۱] نوع اول گوییم، هرگاه

$$\mathcal{K}(x(t)) = \int_a^b K(t,s,x(s))ds, \qquad \lambda = 0,$$

باشد، به عبارتی یک معادله انتگرال به فرم

$$\int_a^b K(t,s,x(s))ds = f(t) \tag{۲.۱}$$

را معادله انتگرال فردهلم نوع اول گوییم.

ب– معادله انتگرال فردهلم نوع دوم گوییم، هرگاه

$$\mathcal{K}(x(t)) = \int_a^b K(t,s,x(s))ds, \qquad \lambda \neq 0$$

باشد، به عبارتی یک معادله انتگرال به فرم

$$\lambda x(t) - \int_a^b K(t,s,x(s))ds = f(t), \tag{۳.۱}$$

را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم گوییم.

ج– معادله انتگرال **ولترا**[۲] نوع اول گوییم، هرگاه

$$\mathcal{K}(x(t)) = \int_a^t K(t,s,x(s))ds, \qquad \lambda = 0$$

[۱] Fredholm
[۲] Volterra

باشد، به عبارتی یک معادله انتگرال به فرم

$$\int_a^t K(t,s,x(s))ds = f(t), \qquad (۴.۱)$$

را معادله انتگرال ولترا نوع اول گوییم.

د- معادله انتگرال ولترا نوع دوم گوییم، هرگاه

$$\mathcal{K}(x(t)) = \int_a^t K(t,s,x(s))ds, \quad \lambda \neq 0$$

باشد، به عبارتی یک معادله انتگرال به فرم

$$\lambda x(t) - \int_a^t K(t,s,x(s))ds = f(t), \qquad (۵.۱)$$

را معادله انتگرال ولترا نوع دوم گوییم.

به طور مشابه می‌توان دستگاه معادلات انتگرال را تعریف کرد. در واقع با فرض اینکه x، K و f توابعی برداری به صورت

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \vdots \\ f_m(s) \end{pmatrix},$$

و

$$\mathbf{K}(t,s,\mathbf{x}(s)) = \begin{pmatrix} K_1(t,s,x_1(s),x_2(s),\cdots,x_m(s)) \\ K_2(t,s,x_1(s),x_2(s),\cdots,x_m(s)) \\ \vdots \\ K_m(t,s,x_1(s),x_2(s),\cdots,x_m(s)) \end{pmatrix}$$

در هر یک از معادلات (؟؟)، (؟؟)، (؟؟) و (؟؟) باشند، آنگاه این معادلات را به ترتیب، دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع اول، دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم، دستگاه معادلات انتگرال ولترا نوع اول و دستگاه معادلات انتگرال ولترا نوع دوم خواهیم نامید.

قضیه ۳.۲.۱. معادله‌ی انتگرال

$$x(t) - \int_{\Omega} K(t,s,x(s))ds = f(t), \tag{۶.۱}$$

را با $\Omega = (a,b)$ در نظر بگیرید و فرض کنید $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ و $K : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی اندازه‌پذیر، $K(t,s,0) \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ چنان باشد که

$$|K(t,s,x(s)) - K(t,s,y(s))| \leq K_0(t,s)|x-y|, \tag{۷.۱}$$

به ازای $K_0(t,s) \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^+)$ برقرار باشد. آنگاه

$$(Tx)(t) = f(t) + \int_{\Omega} K(t,s,x(s))\, ds, \tag{۸.۱}$$

عملگری خوش‌تعریف از فضای $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ است و اگر

$$\int\int_{\Omega\times\Omega} K_0^2(t,s)\, dt\, ds < 1 \tag{۹.۱}$$

آنگاه معادله‌ی انتگرال فردهلم (؟؟) دارای جوابی منحصربفرد در فضای $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ است.

برهان. منبع [؟] قضیه ۱.۴.۱ را ببینید. □

نتیجه ۴.۲.۱. معادله‌ی انتگرال خطی

$$x(t) - \int_{\Omega} K(t,s)x(s)\, ds = f(t) \tag{۱۰.۱}$$

را با $\Omega = (a,b)$ در نظر بگیرید و فرض کنید $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ و $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ تابعی اندازه‌پذیری باشد که

$$\int\int_{\Omega\times\Omega} |K(t,s)|^2\, dt\, ds < 1, \tag{۱۱.۱}$$

آنگاه معادله‌ی انتگرال فردهلم (؟؟) دارای جوابی منحصربفرد در فضای $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ است.

به همین ترتیب می‌توان نتیجه‌ی زیر را بیان کرد:

نتیجه ۵.۲.۱. دستگاه معادله‌ی انتگرال خطی به صورت

$$x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} K_{i,j}(t,s) x_j(s)\ ds = f_i(t), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{۱۲.۱}$$

را با $\Omega = (a,b)$ در نظر بگیرید و فرض کنید $f_i \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ و

$$K_{i,j} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad i,j = 1, \cdots, n,$$

توابع اندازه‌پذیری باشند که

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\int_{\Omega \times \Omega} |K_{i,j}(t,s)|^2\ dt\ ds < 1, \tag{۱۳.۱}$$

آنگاه معادله‌ی انتگرال فردهلم (؟؟) دارای جوابی منحصربفرد در فضای $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ است.

۳.۱ مفاهیم مقدماتی در نظریه کنترل بهینه و حساب تغییرات

همانطور که می‌دانیم کوتاهترین فاصله بین دو نقطه در یک صفحه با رسم قطعه خط راست بین آن دو نقطه به دست می‌آید. دایره شکلی است که حداکثر مساحت را برای محیطی ثابت بدست می‌دهد. چنین حقایقی برای یونانیان قدیم شناخته شده بود. قدیمی‌ترین راه‌حل‌های آن نوع مسائل در دسته مسائلی هستند که امروزه تحت عنوان نظریه بهینه‌سازی مطرح می‌باشند. اگرچه شم هندسی یونانیان باعث شد که تعداد معدودی از این مسائل را جواب دهند، اما از قرن هجدهم بود که نظریه‌ای استوار برای جواب دادن به این نوع مسائل در زمینه بهینه‌سازی شروع به رشد کرد. نظریه کنترل بهینه در واقع از سال ۱۹۵۰ به خاطر فعالیت‌های برخی دانشمندان در ارتباط با کشفیاتی در منظومه شمسی آغاز گردید. مسائل ریاضی سفینه‌های فضایی نیز شامل مسائل بهینه‌سازی است. در واقع هدف ایجاد مسیرهایی است که در راستای

آن مسیرها یک فضاپیما که با یک موتور راکد کوچک کنترل و هدایت می‌شود، به هدف مورد نظرش در کمترین زمان ممکن یا با کمترین سوخت مصرف شده برسد. این نوع مسائل جدید با روش‌هایی که تاکنون ابداع شده بودند، قابل حل نبود و یک نظریه جدید که ریشه آن به قرن هجدهم باز می‌گردد می‌باید توسعه می‌یافت تا بتواند از عهده حل مسائل جدید برآید. نظریه کنترل بهینه توسیعی از حساب تغییرات است. در واقع حساب تغییرات نامی است که به نظریه بهینه‌سازی انتگرال‌ها اطلاق می‌شود. یکی از اولین مسائل در این زمینه شامل کمینه کردن یک انتگرال است که به وسیله جان برنولی در سال ۱۹۹۴ مطرح شد. این مسئله شامل تعیین بستر حرکت یک گلوله صیقلی تحت نیروی جاذبه در مسیر یک سیم هموار می‌باشد که دو نقطه ثابت A و B را که در طول یک خط راست قرار ندارند به هم وصل می‌کند و سوال این است که سیم چه شکلی باید داشته باشد به طوریکه اگر گلوله از حالت سکون از نقطه A رها شود در کمترین زمان به نقطه B بغلتد.

حساب تغییرات با مسئله کمینه کردن یک تابعک به این روش برخورد می‌کند که در ابتدا رده‌ای از تغییرات ضعیف قابل قبول تعریف می‌گردد و سپس اثر تغییر کوچکی در منحنی در جهتی که مجاز به تغییر است روی تابعک J مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای اثبات نتایج اساسی در نظریه بهینه‌سازی تابعک‌ها تغییرات J را هنگامی که تغییرات کوچکی در منحنی در جهتی خاص اعمال می‌گردد محاسبه می‌کنیم. این شرط که اولین شرط لازم نامیده می‌شود به وسیله اویلر لاگرانژ و همکارانش بسط و توسعه یافت. در واقع به این دلیل است که در ابتدا این مفهوم در تاریخ خود حساب تغییرات نام گرفته است. قبل از ورود به مبحث بهینه‌سازی لازم است در ابتدا با مفاهیم و تعاریف زیر آشنا شویم.

تعریف ۱.۳.۱. انتگرال‌هایی مانند $J[y]$ که بر مجموعه‌ای از توابع عمل می‌کند تا مجموعه اعداد متناظرش را تولید نماید، تابعک می‌نامیم.

قضیه کنترل بهینه برای معادلات دیفرانسیل (معمولی یا جزئی) و معادلات دیفرانسیل تأخیری از اهمیت ویژه ای برخوردار است. تقریباً همه‌ی سیستم‌های معادلات دیفرانسیل معمولی کنترلی یا معادلات دیفرانسیل-انتگرالی کنترلی می‌توانند بوسیله‌ی کلاس سیستم‌هایی از معادلات انتگرال ولترای کنترلی مدل‌سازی شوند. بسیاری از مسائل در اقتصاد، زیست شناسی، علم بیماری‌های واگیردار و تأثیرات حافظه که توسط معادلات کنترلی ولترا مدل‌سازی می‌شوند، توسط مسئله برنامه‌ریزی پویا قابل حل می‌باشند. قبل از ورود به مبحث کنترل بهینه و بیان اینکه چطور می‌توان یک معادله‌ی انتگرالی ولترا یا فردهلم را بهینه‌سازی کرد، لازم است در ابتدا نگاهی اجمالی بر مفاهیم مورد نیاز داشته باشیم.

تعریف ۲.۳.۱. یک سیستم به طور کلی تشکیل شده از اجزاء و عناصری که بر هم اثر می•گذارند. به طور مثال سیستم الکتریکی متشکل از مجموعه‌ای از عناصر مثل مقاومت، سلف، خازن و ... می باشد.

در بررسی سیستم‌ها هدف پیدا کردن روش هایی برای تعیین رفتار سیستم است سپس اگر لازم باشد قسمت‌هایی از سیستم را برای به دست آوردن رفتار و پاسخ مطلوب تر تغییر میدهیم. برای مثال اگر یک سیستم الکتریکی مانند یک مولد برق را در نظر بگیریم. در ابتدا می‌خواهیم رفتار آن را به لحاظ مواردی از قبیل قدرت تولید شده، فرکانس، ولتاژ و غیره به دست آورده و سپس پاسخ آن را به تغییرات ناگهانی در قسمت بار تعیین نماییم و در صورتی که این پاسخ مطلوب ما نبود در پی یافتن روشی هستیم که رفتار سیستم را به صورت مطلوب تغییر دهد. یک سیستم برای اینکه قابل مطالعه و بررسی باشد باید دارای امکانات و شرایط خاصی باشد. برای نمونه هر سیستم باید دارای کمیت های قابل اندازه‌گیری باشد که این کمیت ها را خروجی می نامیم. همچنین برای اینکه بتوانیم رفتار این سیستم را تغییر دهیم باید این سیستم قابل نفوذ باشد یعنی باید کمیت‌هایی در آن وجود داشته باشد که بشود آنها را به دلخواه