بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش نظری نجوم

عنوان پایان نامه:

درهم‌تنیدگی‌های سه پاره ای در میدان گرانشی

استاد راهنما:

دکتر بهرام نصراصفهانی

پژوهشگر:

محدثه اکبری

مهرماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات ، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش نظری نجوم خانم محدثه اکبری

تحت عنوان

درهم‌تنیدگی های سه پاره ای در میدان گرانشی

در تاریخ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ..... به تصویب نهایی رسید.

۱ –استاد راهنمای پایان نامه دکتر ..... با مرتبه ی علمی..... امضا

۲ –استاد داور داخل گروه دکتر ..... با مرتبه ی علمی ..... امضا

۳ –استاد داور خارج از گروه دکتر ..... با مرتبه ی علمی ..... امضا

امضای مدیر گروه

سپاس گذاری:

خداوندا!

ای کریمی که کریمانه می بخشی، ای رحیمی که مهربانانه نعمت می دهی، و ای حکیمی که حکیمانه تقدیرمان را رقم می زنی،

تو را سپاس.

تو را سپاس که یاری ام کردی که در مسیری بس بزرگ قدم بگذارم .

بار الها تو را سپاس که در این مسیر استادانی دلسوز را همنایم ساختی که علمشان را بی هیچ منتی در اختیارم بگذارند.

آری این امر میسر نبود مگر به کمک و یاری استاد ارجمند **جناب آقای دکتر بهرام نصر اصفهانی** که در این مسیر دلگرمی ام بخشیدند.

تقدیم به ستاره های آسمان زندگی ام،

پدر فداکار، مادر مهربان و همسر عزیزم که با به دوش کشیدن سختی های زندگی، زندگی مرا شیرین می سازند. به امید آن که بتوانم لحظه ای

شادمانشان سازم .

خداوندا توانایی ام بخش تا بتوانم با بکارگیری آموخته هایم زحمات این عزیزان را جبران کنم .

تقدیم به:

تقدیم به شهیدان وطنم،

که رفتند که ما آزاد بمانیم.

چکیـده

در ابتدای این پایان نامه، تولید آنتروپی اسپینی گرانشی را برای ذرات با با اسپین اختیاری در نظر می‌گیریم و یک بسته موج که مرکز آن روی یک مسیر کلاسیکی درفضا–زمان خمیده قرار دارد، معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم، حالت سامانه‌ی متحرک به دلیل انتقال‌های متوالی لورنتس و هم‌چنین چرخش ویگنر ناشی از شتاب مرکز و خمیدگی فضا–زمان، تغییر می-کند و بعد از آن نتایج به‌دست آمده را برای برای یک فضا–زمان متقارن کروی روی مسیرهای دایروی و شعاعی به‌کار می-بریم. فضا–زمان متقارن کروی را یک کرم چاله‌ی قابل عبور در نظر می‌گیریم و هم‌چنین برای یک میدان متقارن کروی ایستای دیگر، مانند فضا–زمان شوارتزشیلد به کار می‌بریم. بررسی خود را به حالت‌های اولیه و نهایی یک سامانه‌ی کوانتومی دو بخشی شامل دو ذره‌ی اسپین ۱/۲ گسترش می‌دهیم. در نقطه‌ی اولیه در فضا–زمان خمیده، تکانه‌ی ذرات را جداپذیر فرض می‌کنیم؛ در حالی که قسمت اسپینی را در حالت درهم‌تنیده در یکی از حالت‌های بل در نظر می‌گیریم. با محاسبه‌ی عملگر ماتریس چگالی کاهش یافته، روی درهم‌تنیدگی اسپینی آن متمرکز می‌شویم و هماندهی را برای حالت‌های یکتایی و سه تایی به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم.

استدلال خود را برای یک سامانه‌ی متحرک شامل سه ذره‌ی جرم‌دار اسپین ۱/۲، در یک چارچوب لخت موضعی دنبال می-کنیم. قسمت اسپینی آن را به‌صورت درهم‌تنیده در حالت قرار می‌دهیم و قسمت مربوط به تکانه‌ی آن را جداپذیر در نظر می‌گیریم. ماتریس چگالی کاهش یافته را در نقطه‌ی انتهایی محاسبه می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که به‌صورت آمیخته تبدیل می‌شود. میزان درهم‌تنیدگی آن را، توسط سنجه‌های نگاتیویته‌ی لگاریتمی و π –تنیدگی می‌سنجیم.

کلید واژه ها: درهم‌تنیدگی، چرخش ویگنر، چارچوب لخت موضعی، ماتریس چگالی کاهش یافته، هماندهی، میدان گرانشی، درهم-تنیدگی حالتGHZ

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: معرفی درهم‌تنیدگی

۱-۱- عملگر چگالی ۱

۱-۲- عمل رد و ردگیری جزئی ۲

۱-۳- ویژگی‌های ماتریس چگالی ۳

۱-۴- درهم‌تنیدگی ۵

۱-۴-۱- معرفی درهم‌تنیدگی کوانتومی ۵

۱-۴-۲- حالت‌های خالص ۶

۱-۴-۲-۱ حالت های بل ۸

۱-۴-۳- حالت‌های آمیخته ۹

۱-۴-۴- سامانه‌های چند ذره‌ای ۱۰

فصل دوم: معیارها و سنجه‌های درهم‌تنیدگی

۲-۱- مقدمه ۱۳

۲-۲- معیارهای درهم‌تنیدگی کوانتومی ۱۴

۲-۲-۱- تجزیه‌ی اشمیت ۱۴

۲-۲-۲- معیار PPT ۱۵

۲-۳- سنجه‌های درهم‌تنیدگی کوانتومی ۱۷

۲-۳-۱- هماندهی ۱۸

۲-۳-۲- نگاتیویته ۱۹

۲-۳-۳- نگاتیویته‌ی لگاریتمی ۲۰

۲-۳-۴- تنیدگی π ۲۰

فصل سوم: فضا-زمان متقارن کروی

۳-۱- متریک ۲۲

۳-۲- متریک متقارن کروی ۲۳

۳-۳- فضا-زمان شوارتزشیلد ۲۴

۳-۴- فضا-زمان کرم چاله ۲۵

فصل چهارم: درهم‌تنیدگی سامانه‌های یک ذره‌ای و دو ذره‌ای در میدان گرانشی

۴-۱- مقدمه ۲۷

۴-۲- اسپین در فضا-زمان خمیده ۲۸

عنوان **صفحه**

۴-۳- تولید آنتروپی اسپینی یک ذره در یک فضا-زمان خمیده ۳۳
۴-۳-۱- حرکت دایره‌ای اطراف مرکز ۳۴
۴-۳-۲- حرکت شعاعی ۳۷
۴-۴- چرخش ویگنر برای ذره‌ی اسپین ۱/۲ در یک فضا-زمان کرم چاله ۳۸
۴-۴-۱ حرکت‌های دایره‌ای اطراف گلوگاه ۳۹
۴-۴-۲ حرکت روی شعاع‌های ژئودزیک ۴۱
۴-۴-۳ هماندهی حالت‌های اولیه و نهایی ۴۲
۴-۴-۳-۱ هماندهی کل ۴۲
۴-۴-۳-۲ هماندهی اسپینی ۴۴
۴-۵- درهم‌تنیدگی دو ذره در میدان گرانشی ۴۷
۴-۵-۱- چرخش ویگنر برای حالت‌های دو ذره در یک میدان گرانشی ۴۸
۴-۵-۲- ماتریس چگالی کاهش یافته ۵۰
۴-۵-۳- درهم‌تنیدگی اسپینی ۵۳
۴-۵-۴- نمودارهای درهم‌تنیدگی ۵۴
۴-۵-۵- تبدیل چارچوب ۶۱
۴-۶ هماندهی بسته موج دو ذره در اطراف فضازمان شوارتزشیلد ۶۳
۴-۶-۱ هماندهی اسپینی بین حالت‌های اولیه و نهایی ۶۴
۴-۶-۱-۱- حالت اسپینی یکتایی ۶۴
۴-۶-۱-۲- حالت اسپین سه تایی ۶۷

فصل پنجم: درهم‌تنیدگی سه ذره در میدان گرانشی

۵-۱- مقدمه ۷۰
۵-۲- تبدیل بسته موج سه ذره در میدان گرانشی ۷۱
۵-۳- ماتریس چگالی کاهش یافته ۷۲
۵-۴- محاسبه‌ی نگاتیویته‌ی لگاریتمی ۷۵
۵-۵- محاسبه‌ی π -تنیدگی ۷۶
۵-۶- نتیجه‌گیری ۷۷
منابع ۸۰

فهرست نمودارها

عنوان **صفحه**

- نمودار (۴-۱): مربوط به یک کرم چاله‌ی متقارن کروی قابل عبور ۳۸
- نمودار(۴-۲): همانده‌ی اسپینی بر حسب q به‌ازای τ و s ثابت ۴۶
- نمودار(۴-۳): همانده‌ی، برحسب تغییرات شعاع ($s(=\frac{r}{r_0})$ و به ازای q و τ ثابت ۴۷
- نمودار (۴-۴): درهم‌تنیدگی E بر حسب q به‌ازای مقادیر $\beta=1$، $z=0.16$، ..... $\xi^2=0.265$ و $\tau=5\tau_0$ ۵۶
- نمودار(۴-۵): درهم‌تنیدگی E بر حسب q به‌ازای مقادیر $\beta=4$، $z=0.16$، ..... $\xi^2=0.265$ و $\tau=5\tau_0$. در این نمودار با افزایش q درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد ۵۷
- نمودار(۴-۶): درهم‌تنیدگی E بر حسب τ/τ_0 ..... ۵۸
- نمودار(۴-۷): درهم‌تنیدگی E، بر حسب شعاع چرخش دایره‌ای z ، به ازای ..... مقدارهای $\beta=1$، $q=0.6$ ، $\xi^2=0.16$ $\tau=5\tau_0$ ۵۸
- نمودار(۴-۸): درهم‌تنیدگی E، بر حسب شعاع چرخش دایره‌ای z ، به ازای ..... مقدارهای $\beta=1$، $\xi^2=0.265$ $\tau=5\tau_0$ $q=0.6$ ۵۹
- نمودار(۴-۹): درهم‌تنیدگی E، بر حسب شعاع چرخش دایره‌ای z ، به ازای ..... مقدارهای $\beta=1$، $\xi^2=0.5$، $\tau=5\tau_0$ ، $q=0.6$ ۶۰
- نمودار (۴-۱۰): همانده‌ی برحسب q به ازای τ,z ثابت ۶۶
- نمودار (۴-۱۱): همانده‌ی بر حسب z با τ,q ثابت برای مورد اسپین یکتایی ۶۶
- نمودار (۴-۱۲): تغییرات F_s بر حسب q برای مورد اسپین سه تایی ۶۸
- نمودار (۴-۱۳) : تغییرات F_s بر حسب z برای مورد اسپین سه تایی ۶۹
- نمودار(۵-۱): نگاتیویته ی لگاریتمی N، بر حسب شعاع چرخش دایره‌ای z به ازای ..... مقدارهای $\beta=10$ و $q=0.3$ ۷۷
- نمودار(۵-۲): نگاتیویته ی لگاریتمی N بر حسب تکانه‌ی زاویه‌ای q، مرکز ..... به ازای $\beta=10$ و $z=0.3$ ۷۸
- نمودار(۵-۳): تنیدگی π بر حسب شعاع چرخش دایره‌ای z به ازای ..... مقدارهای $\beta=10$ و $q=0.3$ ۷۹
- نمودار(۵-۴): تنیدگی π بر حسب تکانه‌ی زاویه‌ای مرکز q،به ازای $\beta=10$ و $z=3$ ۷۹

فصل اول

معرفی درهم‌تنیدگی

۱-۱ عملگر چگالی

وان نیومن[۱] فرمول‌بندی عملگر چگالی را در سال ۱۹۲۷ ابداع کرد. عملگرچگالی، حاوی تمامی اطلاعات مهم فیزیکی است، که می‌توان از حالت مورد نظر به‌دست آورد. به‌طور کلی، برای مشخص کردن حالت یک سامانه، از یک کت معین استفاده نمی‌شود و به‌طور کامل‌تر عملگر چگالی، حالت سامانه را توصیف می‌کند. در این فرمول-بندی، مسائل فیزیکی در چارچوب حالت‌های خالص و آمیخته، به صورت کمی تشریح می‌شوند. عملگرچگالی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{\rho} \equiv \sum_n p_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|, \qquad (۱-۱)$$

در عملگر چگالی بالا، کسری از ذرات با احتمال نسبی p_1، در حالت $|\varphi_1\rangle$ مشخص می‌شوند و کسر دیگری از ذرات با احتمال نسبی p_2، در حالت $|\varphi_2\rangle$ قرار دارند و غیره. به‌طور کلی $|\varphi_n\rangle$ها بهنجار هستند ولی متعامد نیستند. عملگر چگالی بالا، مربوط به یک حالت آمیخته است. اگر یکی از احتمال‌های نسبی برابر یک و بقیه‌ی آن‌ها صفر باشند؛ یعنی $p_m = \delta_{mn}$، عملگرچگالی به‌صورت ساده‌ی $\rho = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m|$ تبدیل خواهد شد که این حالت را حالت خالص می‌نامند. برای تشخیص خالص یا آمیخته بودن حالت یک سامانه، می‌توان از ماتریس‌های چگالی کمک گرفت. یک حالت خالص مجموعه‌ای از سامانه‌های فیزیکی است، به گونه‌ای که همه‌ی اعضای آن با کت یکسان $|\varphi_m\rangle$ مشخص می‌شوند. به طور غیردقیق، می‌توان حالت آمیخته را آمیزه‌ای از حالت‌های خالص درنظر گرفت. احتمال‌های نسبی مقید هستند، که در شرط بهنجارش $\sum_n p_n = 1$، صدق کنند. به‌علاوه لازم نیست که تعداد جملات در شرط بهنجارش با بعد فضای کت n، یکسان باشد.

---

[۱] Von Neumann

مؤلفه‌های عملگر چگالی به‌ازای هر $|\psi\rangle$ همیشه مثبت است، زیرا هر یک از جمله‌های جمع‌بندی، مقدار صفر یا مثبت را می‌توانند اختیار کنند[۱].

۱-۲ عمل رد[۱] و ردگیری‌جزئی

رد یک ماتریس، جمع عناصر روی قطر آن است. رد عملگر ρ، در نمایش دیراک به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Tr\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)=\sum_{k}\ \langle k|\rho|k\rangle\,, \qquad (۲-۱)$$

اگر حالت خالص یک حالت بهنجار باشد، عمل رد روی آن همیشه مقدار یک خواهد شد. با استفاده از عمل رد، می‌توان تفاوت حالت‌های خالص و آمیخته را یافت؛ در بخش بعدی جزئیات بیشتری در این باره بیان می‌شود. رد عملی است که ماتریس را به عدد تبدیل می‌کند. در مکانیک‌کوانتومی، مشاهده‌پذیرها و حالت‌های یک سامانه توسط ماتریس‌ها نمایش داده می‌شوند؛ اما هرگز نمی‌توان یک ماتریس را مشاهده کرد. با استفاده از عمل رد، ماتریس‌ها به عدد تبدیل می‌شوند و با استفاده از آن عدد، می‌توان نتایج اندازه‌گیری را مشاهده کرد. اما چون هرگز نمی‌توان عددهای مختلط را در دنیای حقیقی مشاهده کرد، به همین منظور مربع قدرمطلق این عدد $\left|\langle\psi|\varphi\rangle\right|^2$، به عنوان احتمال اندازه‌گیری حالت $|\psi\rangle$، وقتی سامانه در حالت $|\varphi\rangle$ است، در نظر گرفته می‌شود و بالعکس.

یک کاربرد بسیار مفید از عمل رد، ردگیری‌جزئی است. یک ردجزئی برای دو سامانه‌ی کوانتومی یا بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. ابتدا یک سامانه‌ی دوپاره ای A و B، که در سامانه‌ی کوانتومی زیر، با یکدیگر سهیم هستند، می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\hat{\rho}_A\otimes\hat{\rho}_B=\sum_{ij}p_{ij}\,|i_A\rangle\otimes|j_B\rangle\langle i_A|\otimes\langle j_B|, \qquad (۳-۱)$$

و برای دو سامانه‌ی A و B، عمل ردگیری‌جزئی نسبت به زیرسامانه‌ی B، برای مشخص کردن عملگر چگالی A، مورد استفاده قرار می‌گیرد[۲]:

---

[۱] Trace & Partial Trace

$$
\begin{aligned}
Tr_B\left(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B\right) &= Tr_B\left(\sum_{ij} p_{ij}\left|i_A\right\rangle \otimes \left|j_B\right\rangle\left\langle i_A\right| \otimes \left\langle j_B\right|\right) \\
&= \sum_{ij}\left|i_A\right\rangle\left\langle i_A\right| \otimes Tr\left(p_{ij}\left|j_B\right\rangle\left\langle j_B\right|\right) \\
&= \sum_{ij} p_{ij}\left|i_A\right\rangle\left\langle i_A\right| = \sum_i p_i\left|i_A\right\rangle\left\langle i_A\right|,
\end{aligned}
\qquad (۴-۱)
$$

۱-۳ ویژگی‌های ماتریس چگالی

همیشه می‌توان ماتریس‌چگالی را به صورت یک ماتریس قطری، مانند رابطه‌ی زیر نوشت؛ زیرا عملگر چگالی یک عملگرهرمیتی است.

$$
\hat{\rho} = \sum_n \rho_n \left|\rho_n\right\rangle\left\langle\rho_n\right|, \qquad (۵-۱)
$$

که در آن ρ_n، ویژه‌مقدار عملگرچگالی است ومقدار آن مثبت است و $\left\langle\rho_n\right|$، متناظر با ویژه‌بردارهای عملگر-چگالی است.

مقدار میانگین یک مشاهده‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\bar{A} = \left\langle\hat{A}\right\rangle = Tr\left(\hat{\rho}\hat{A}\right), \qquad (۶-۱)
$$

که در آن، Tr عمل رد را نشان می‌دهد. با استفاده از یک مجموعه‌ی کامل از حالت‌ها، رد یک عملگر، به-صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
Tr\left(\hat{\rho}\hat{A}\right) &= \sum_m \left\langle\lambda_m\right|\left(\sum_n p_n\left|\psi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right|\right)\hat{A}\left|\lambda_m\right\rangle \\
&= \sum_n p_n \left\langle\psi_n\right|\hat{A}\sum_m\left|\lambda_m\right\rangle\left\langle\lambda_m\right|\left|\psi_n\right\rangle = \sum_n p_n \left\langle\psi_n\right|\hat{A}\left|\psi_n\right\rangle.
\end{aligned}
\qquad (۷-۱)
$$

رد یک عملگر، مستقل از پایه‌هایی است که برحسب آن‌ها محاسبه می‌شود. عملگر چگالی، سه خاصیت مهم دارد. اولین خاصیت آن است که عملگر چگالی هرمیتی است. دومین خاصیت آن این است که در شرط بهنجارش صدق می‌کند و برای اثبات خاصیت دوم، در معادله‌ی(۱-۷)، عملگر همانی باید جایگزین عملگر A شود:

$$Tr\left(\hat{\rho}\hat{I}\right)=Tr\left(\hat{\rho}\right)=\sum_{m}\langle\lambda_m|\left(\sum_{n}p_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)\hat{I}|\lambda_m\rangle$$
$$=\sum_{n}p_n\langle\psi_n|\sum_{m}|\lambda_m\rangle\langle\lambda_m||\psi_n\rangle=\sum_{n}p_n\langle\psi_n||\psi_n\rangle=\sum_{n}p_n=1, \qquad (۸-۱)$$

رابطه‌ی بالا علاوه بر اثبات خاصیت دوم بیان می‌کند که مجموع همه‌ی احتمال‌ها برابر واحد است. اگر معادله‌ی(۱-۷) در پایه‌ی ویژه‌بردارهای عملگر چگالی نوشته شود، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$Tr\left(\hat{\rho}\right)=\sum_{n}\rho_n=1, \qquad (۹-۱)$$

رابطه‌ی بالا به این معنی است که جمع ویژه‌مقدارهای عملگر چگالی یک است[۱].

سومین ویژگی عملگر چگالی، مثبت بودن عناصرقطری آن است؛

$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle\geq 0\ ,\ \forall\alpha\quad\Rightarrow\quad\rho\geq 0. \qquad (۱۰-۱)$$

عملگرچگالی به‌ازای یک حالت خالص، علاوه برخواص بیان شده در بالا، دو خاصیت دیگر دارد. اولین خاصیت آن خودتوان بودن عملگر چگالی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho^2=\rho\Rightarrow\rho(\rho-1)=0. \qquad (۱۱-۱)$$

و دومین خاصیت آن به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

$$Tr\left(\rho^2\right)=1. \qquad (۱۲-۱)$$

اگر در معادله‌ی (۱-۷)، $\hat{A}=\hat{\rho}$ جایگزین شود، رابطه‌ی زیرحاصل می‌گردد[۱]:

$$Tr\left(\hat{\rho}\hat{\rho}\right)=\sum_{n}\rho_n\langle\rho_n|\left(\sum_{m}\rho_m|\rho_m\rangle\langle\rho_m|\right)|\rho_n\rangle$$
$$=\sum_{n}{\rho_n}^2\leq\sum_{n}\sum_{m}\rho_n\rho_m=1\,. \qquad (۱۳-۱)$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت؛ نامساوی بالا برابر یک خواهدشد؛ اگر و تنها اگر یکی از ρ_n ها مقدار یک و بقیه مقدارصفر را اختیار کنند. بنابراین تنها برای حالت‌های‌خالص، علاوه بر شرط (۱-۹)، شرط (۱-۱۲) نیز برقرار است. $Tr\left(\rho^2\right)$ درجه‌ی خلوص یک حالت‌خالص نامیده می‌شود.

برای یک حالت‌خالص، ویژه مقدارهای عملگر چگالی صفر و یک هستند. بنابراین هنگامی که حالت مورد نظر خالص باشد، مقدار $Tr\left(\rho^2\right)$ حداکثر خواهد بود. در مورد یک حالت آمیخته، مقدار $Tr\left(\rho^2\right)$ همواره عددی مثبت و کوچکتر از یک است[۲].

۱-٤ درهم‌تنیدگی[1]

۱-٤-۱ معرفی درهم‌تنیدگی کوانتومی

درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از عالی‌ترین جنبه‌های غیرکلاسیکی مکانیک‌کوانتومی است که اساس نظریه‌ی اطلاع-رسانی‌کوانتومی را تشکیل می‌دهد. تقریباً از زمان تولد مکانیک‌کوانتومی، ویژگی‌های درهم‌تنیدگی مورد مطالعه قرار گرفته‌است. در سال ۱۹۲۴، هایزنبرگ اولین فرمول‌بندی ریاضی خود را برای مکانیک‌کوانتومی ارائه کرد و نشان داد مکملی بین مفاهیم کلاسیکی در مکانیک‌کوانتومی وجود دارد[۳] . هم‌چنین هایزنبرگ فرض کرد، جهان-های کوانتومی و کلاسیکی در مواردی به‌صورت ریشه‌ای متفاوت از هم هستند. یک جنبه‌ی مهم این تفاوت‌های بنیادی، وجود هم‌بستگی‌های کوانتومی در فرمول‌بندی کوانتومی است. در توصیف کلاسیکی، اگر یک سامانه از زیر سامانه‌های متفاوتی تشکیل شده باشد، اطلاعات زیرسامانه‌ها اطلاعات کاملی را برای کل سامانه فراهم می‌کنند. این موضوع در رابطه با فرمول‌بندی کوانتومی صحیح نیست. در جهان کوانتومی، حالت‌هایی از سامانه‌های آمیخته وجود دارند، با آن‌که دانش ما در رابطه با زیرسامانه‌های آن تصادفی است، می‌توان اطلاعات کاملی از کل سامانه داشت. در این رهیافت ممکن است کل سامانه، از گروهی ذرات تشکیل شده باشند که به صورت فیزیکی از هم جدا و متفاوت هستند؛ اما نمی‌توان آن‌ها را به صورت جداگانه توصیف کرد. نکته‌ی حیرت‌انگیزی که از رهگذر این مفهوم ظاهر می‌شود آن است که چگونه ممکن است دو یا چند ذره‌ی کوانتومی که هر یک به تنهایی رفتاری کاملاً تصادفی دارند این گونه با دقت به یکدیگر مرتبط باشند[۴].

هم‌بستگی‌های موجود در حالت‌های درهم‌تنیده‌ی کوانتومی هیچ مشابه کلاسیکی ندارند، بنابراین شناسایی و تعیین میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی اهمیت به‌سزایی دارد. با توجه به این اهمیت، تشخیص این که حالت

[1] Entanglement

مورد نظر یک سامانه‌ی مرکب جداپذیر یا درهم‌تنیده است بسیار مهم است. در فصل بعدی تعدادی از معیارها و سنجه‌های تشخیص درهم‌تنیدگی معرفی شده‌است.

۱-٤-۲ حالت‌های خالص

یک حالت خالص درهم‌تنیده است، اگر آن را به‌صورت حاصل‌ضرب‌تانسوری یک کت در فضای اول در یک کت دیگر در فضای دوم نتوان نوشت.

$$|\psi\rangle = |\lambda\rangle|\varphi\rangle \quad \Rightarrow \quad \text{حالت حاصل‌ضربی} \tag{۱-۱۴}$$

$$|\psi\rangle \neq |\lambda\rangle|\varphi\rangle \quad \not\Rightarrow \quad \text{حالت درهم‌تنیده} \tag{۱-۱۵}$$

به‌عنوان مثال، برای یک حالت جداپذیر فرض می‌شود دو سامانه‌ی فیزیکی A و B در فاصله‌ای دلخواه نسبت به یکدیگر در فضا قرار دارند. فرض می‌شود سامانه‌ی فیزیکی A با فضای هیلبرت H_A و سامانه‌ی B توسط فضای هیلبرت H_B توصیف می‌شود. سامانه‌ی فیزیکی مشترک A و B با ضرب تانسوری دو فضای هیلبرت به صورت $H_A \otimes H_B$ توصیف می‌شود. اگر فضای هیلبرت دو سامانه، به صورت حالت‌های حاصل‌ضربی باشد، آن حالت به طور حتم جداپذیر است. به عنوان مثال می‌توان حالت زیر را در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0_a 0_b\rangle + |0_a 1_b\rangle + |1_a 0_b\rangle + |1_a 1_b\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_a\rangle + |1_a\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_b\rangle + |1_b\rangle\right), \end{aligned} \tag{۱-۱۶}$$

چون حالت بالا به‌صورت یک حالت حاصل‌ضربی نوشته شده است؛ بنابراین درهم‌تنیده نیست. امکان نوشتن یک حالت به‌صورت یک حالت حاصل‌ضربی ممکن است مشکل باشد. به‌همین منظور باید عملگرچگالی متناظر با آن حالت ساخته شود و روی یکی از سامانه‌های آن رد گرفته شود؛ تا عملگر چگالی کاهش‌یافته برای سامانه‌ی مورد نظر محاسبه گردد. عملگرچگالی برای حالت غیر درهم‌تنیده‌ی (۱-۱۴) به‌صورت زیر است:

$$\hat{\rho}_{ab} = |\lambda\rangle\langle\lambda| \otimes |\varphi\rangle\langle\varphi|, \tag{۱-۱۷}$$

با گرفتن رد روی سامانه‌ی B، عملگر چگالی کاهش‌یافته برای سامانه‌ی A، به‌صورت زیر خواهد بود.که این عملگر چگالی مربوط به یک حالت خالص است؛

$$\hat{\rho}_a = |\lambda\rangle\langle\lambda| \quad , \quad Tr\left(\hat{\rho}_a{}^2\right)=1 \quad , \quad \hat{\rho}_a{}^2 = \hat{\rho}_a . \tag{۱-۱۸}$$

هر حالت غیر درهم‌تنیده‌ی خالص را می‌توان به‌صورت (۱-۱۴) نوشت و بنابراین شرط $Tr\left(\hat{\rho}_a{}^2\right)=1$، یک امضاء از یک حالت غیردرهم‌تنیده است. اگر به‌ازای یک حالت، رابطه‌ی $Tr\left(\hat{\rho}_a{}^2\right)\neq 1$ برقرار باشد، بنابراین این حالت درهم‌تنیده است. همیشه حالت درهم‌تنیده‌ی خالص یک سامانه‌ی دوکیوبیتی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\lambda_n\rangle_a |\varphi_n\rangle_b . \tag{۱-۱۹}$$

که در آن حالت‌های $\{|\lambda_n\rangle\}$و $\{|\varphi_n\rangle\}$ مجموعه‌های متعامد برای سامانه‌های A و B هستند. هر حالت $|\lambda_n\rangle_a$، از سامانه‌ی A به یک حالت $|\varphi_n\rangle_b$، از سامانه‌ی B وابسته است. به این شکل از حالت تجزیه‌ی اشمیت می‌گویند. حالت‌های متعامد، ویژه‌حالت‌های عملگرچگالی کاهش‌یافته برای دو سامانه‌ی A و B هستند.

$$\hat{\rho}_a = \sum_n |a_n|^2 |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n| \quad , \quad \hat{\rho}_b = \sum_n |b_n|^2 |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| . \tag{۱-۲۰}$$

دو عملگر چگالی بالا ویژه‌مقدارهای یکسانی دارند؛ به این معنی که $Tr\left(\hat{\rho}_a{}^2\right)=Tr\left(\hat{\rho}_b{}^2\right)$. که در آن حالت های $|\lambda_n\rangle$ و $|\varphi_n\rangle$ ویژه‌حالت‌های یک جفت از عملگرهای زیر هستند:

$$\hat{A} = \sum_n \lambda_n |\lambda_n\rangle_{aa}\langle\lambda_n| \quad , \quad \hat{B} = \sum_n \varphi_n |\varphi_n\rangle_{bb}\langle\varphi_n| , \tag{۱-۲۱}$$

۱-٤-۲-۱ حالت‌های بل

در بین تعداد زیاد حالت‌های درهم‌تنیده‌ی ممکن، حالت‌های بل دوکیوبیتی اهمیت خاصی دارند. حالت‌های بل، تشکیل پایه برای فضای دوکیوبیتی می‌دهند. چهار حالت خالص بل، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left|\psi^{\pm}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_A1_B\right\rangle\pm\left|1_A0_B\right\rangle\right)\quad,\quad\left|\varphi^{\pm}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_A0_B\right\rangle\pm\left|1_A1_B\right\rangle\right),\tag{۲۲-۱}$$

حالت $\left|\psi^{-}\right\rangle$ نسبت به تغییر ذرات پادمتقارن است؛ اما سه حالت دیگر متقارن هستند. حالت‌های بل ویژه حالت-های هم‌زمان سه عملگر $\hat{\sigma}_x\otimes\hat{\sigma}_x$، $\hat{\sigma}_y\otimes\hat{\sigma}_y$ و $\hat{\sigma}_z\otimes\hat{\sigma}_z$ با ویژه مقدارهای ±1 می‌باشند. $\left|0\right\rangle$ و $\left|1\right\rangle$ حالت‌های متعامد هستند [۲].

برای درک بهتر حالت‌های درهم‌تنیده، می‌توان یکی از حالت‌های‌بل را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\left|\Phi^{+}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_A1_B\right\rangle-\left|1_A0_B\right\rangle\right)\tag{۲۳-۱}$$

که در آن $\left|0\right\rangle$ و $\left|1\right\rangle$ نمایش دهنده‌ی حالت اسپین بالا و اسپین پایین برای یک ذره با اسپین ۱/۲ می‌باشند. این رابطه بیان می‌کند، اگر هیچ اندازه‌گیری بر روی امتداد اسپین ذره‌ی اول صورت نگرفته باشد، احتمال این‌که ذره‌ی دوم در حالت اسپینی بالا یا پایین باشد ۱/۲ است. حال اگر حالت اسپین ذره‌ی اول اندازه‌گیری شود، در صورتی که نتیجه‌ی اندازه‌گیری آن حالت $\left|0\right\rangle$ باشد، احتمال آن‌که ذره‌ی دوم در حالت $\left|0\right\rangle$ باشد صفر و در حالت $\left|1\right\rangle$ باشد یک است و اگر حالت اسپین ذره‌ی اول اندازه‌گیری شود و نتیجه‌ی اندازه‌گیری اسپین ذره‌ی اول حالت $\left|1\right\rangle$ به-دست آمد احتمال آن‌که ذره‌ی دوم در حالت $\left|1\right\rangle$ باشد صفر و در حالت $\left|0\right\rangle$ باشد یک است. این موضوع هم-بستگی بین دو ذره نامیده می‌شود به طوری که اگر دو ذره کاملاً از هم دور باشند هم‌چنان این هم‌بستگی وجود دارد و $\left|\Phi^{+}\right\rangle$ یک حالت درهم‌تنیده است. اندازه‌گیری روی یکی از کیوبیت‌ها، درحالی که سامانه در یکی از حالت‌های بل قرار دارد، مقدار کیوبیت دوم را مشخص می‌کند و فاصله‌ی بین این دوکیوبیت نیز اهمیتی ندارد.

برای یک حالت دو ذره‌ای، رابطه‌ی دیگری به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$\left|\Phi\ \right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_A0_B\right\rangle+\left|0_A1_B\right\rangle\right)=\left|0_A\right\rangle\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_B\right\rangle+\left|1_B\right\rangle\right).\tag{۲۴-۱}$$

از معادله‌ی سمت راست نتیجه می‌شود که هر اندازه‌گیری روی اسپین ذره‌ی اول، صرف نظر از این‌که آیا اسپین ذره‌ی دوم اندازه‌گیری شده است یا نه، همواره حالت $|0\rangle$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین به دلیل این‌که اندازه‌گیری بر روی حالت ذره‌ی اول اثری بر حالت ذره‌ی دیگر ندارد، پس حالت فوق غیردرهم‌تنیده است و یک حالت حاصل-ضربی نامیده می‌شود [۳].

وجود ویژگی‌های هم‌بستگی مخصوص حالت‌های درهم‌تنیده و حتی فیزیک کوانتومی نیست. حالت‌های درهم‌تنیده هم‌بستگی‌هایی را می‌توانند نشان دهند که توسط سامانه‌های کلاسیکی قابل توجیه نیستند و بنابراین اختصاص واژه‌ی درهم‌تنیدگی برای این چنین پدیده‌های کوانتومی ذاتی لازم است. همه‌ی حالت‌های خالص هم-بسته درهم‌تنیده هستند.

۱-٤-۳ حالت‌های آمیخته

تعریف درهم‌تنیدگی در حالت‌های آمیخته متفاوت از حالت‌های خالص است. درهم‌تنیدگی حالت‌های آمیخته را می‌توان به سه دسته‌ی زیر تقسیم کرد.

در دسته‌ی اول، یک حالت آمیخته از دو سامانه‌ی A و B حاصل‌ضربی است؛ اگر بتوان ماتریس چگالی آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B . \qquad (۲۵-۱)$$

سامانه‌ی بالا غیرهم‌بسته است. دسته‌ی دوم مربوط به حالت‌های جداپذیر، یک حالت آمیخته است. این چنین حالت‌هایی توسط ارتباطات کلاسیکی فراهم می‌شوند و به‌صورت ذاتی به هم‌بستگی‌های کوانتومی وابسته نیستند. برای توصیف این حالت‌ها می‌توان یک کانال ارتباطی فرضی، با احتمال‌های $P(a_i,b_j)$، درنظر گرفت. اگر سامانه‌ی A، پیام a_i را دریافت کند، سامانه‌ی کوانتومی خودش را در حالت $\hat{\rho}_a^i$ قرار می‌دهد و اگر سامانه‌ی B پیام b_j را دریافت کند، سامانه‌ی کوانتومی خود را در $\hat{\rho}_b^i$ حالت قرار می‌دهد وغیره.

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_{ij} P(a_i,b_j)\hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^j . \qquad (۲۶-۱)$$

و سومین دسته مربوط به حالت‌های آمیخته‌ی درهم‌تنیده می‌باشد. این حالت‌ها هم‌بستگی کوانتومی دارند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند[۲, ۵].

$$\hat{\rho}_{AB} \neq \sum_{ij} P(a_i, b_j)\hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^j . \qquad (۲۷-۱)$$

۱-٤-٤ سامانه‌های چند ذره‌ای

درهم‌تنیدگی تنها به یک جفت سامانه‌ی کوانتومی محدود نیست، تعداد زیادی از کیوبیت‌ها هم می‌توانند در حالت-های درهم‌تنیده قرار بگیرند. چنان‌چه تعداد سامانه‌ها افزایش یابد، تنوع حاالت‌های درهم‌تنیده‌ی ممکن نیز به سرعت رشد می‌کند. حتی تنها با سه کیوبیت حالت‌های متنوعی را می‌توان ایجاد کرد. به عنوان مثال، برای یک فضای سه-کیوبیتی، حالت $|\Phi_1\rangle|\Phi_2\rangle|\Phi_3\rangle$، یک حالت‌حاصل‌ضربی است. هم‌چنین می‌توان حالت‌هایی را در نظر گرفت که دوتا از بخش‌ها با یکدیگر درهم‌تنیده باشند[۱]. به عنوان مثال برای حالت زیر دوتا از کیوبیت‌ها با یکدیگر درهم تنیده هستند اما هیچ‌کدام با کیوبیت سوم درهم تنیده نیستند .

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|010\rangle - |100\rangle + |011\rangle - |101\rangle\right] \\ &= \left(|01\rangle - |10\rangle\right)\otimes|0\rangle + \left(|01\rangle - |10\rangle\right)\otimes|1\rangle = |\psi^-\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right), \end{aligned} \qquad (۲۸-۱)$$

هم‌چنین ممکن است سه کیوبیت کاملاً با یکدیگر درهم‌تنیده باشند[۲]، یعنی هر یک از کیوبیت‌ها با کیوبیت دو به دو هم‌بسته است. این گروه از سامانه‌های سه کیوبیتی به دو دسته‌ی مهم درهم‌تنیدگی حالت *GHZ*[۳] و حالت *W*[۴] تقسیم می‌شوند. این دو نوع حالت درهم‌تنیده با یک دیگر برابر نیستند و توسط عملگرهای یکانی موضعی نمی‌توانند به یک دیگر تبدیل شوند[۶-۸].

---

[۱] Biseparable

[2] Fully entangled

[۳] *Greenberger-Horne-Zeilinger*

[٤] *Werner*