دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
شاخه ریاضی فیزیک

مطالعه و بررسی روش‌های عددی برای حل معادله‌ی کاماسا-هلم

استاد راهنما

دکتر مجتبی رنجبر

استاد مشاور

دکتر ناصر آقازاده

پژوهشگر

شیوا زندی

تابستان ۱۳۹۰

تبریز - ایران

بسم الله الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

مادر مهربانم

و پدر بزرگوارم

پروردگارا...

هیچ کس به پایان و نهایت شکرگزاری تو نمی‌رسد، مگر این که احساس و نیکی تو شکری دیگر را بر او واجب نماید. و هر چقدر در طاعت و فرمانبرداری تو کوشش کند، باز به خاطر فضل و احسان بی‌انتهای تو عاجز و ناتوان است.
خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم: شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پرده‌ی تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی، پس ای خدا مرا به اندازه‌ی توانم بیازما و صبوری بیاموز.
به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و

وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.
اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایتهای بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر و استاد مشاورم جناب آقای دکتر ناصر آقازاده سپاس گزاری نمایم.

و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم.

شیوا زندی — شهریور ۱۳۹۰

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست اشکال

چکیده

در این پایان نامه ما ساختار معادله‌ی کاماسا-هلم و انواع جواب‌های آن را مورد بررسی قرار داده و کاربردهای آن را بیان می‌کنیم. انواع روش‌های حل برای این معادله از جمله روش گالرکین گسسته محلی بیان می‌شود، ولی به دلیل کثرت کاربرد این معادله در شاخه‌های مختلف فیزیک و مهندسی(هیدرولیک، سازه، مکانیک، هواشناسی و ...) بیشتر، روش‌هایی بیان شده است که فرم بسته‌ای از جواب را ارائه دهد. چون در بیشتر مسائل مهندسی تجزیه و تحلیل جواب‌ها مورد نیاز است، بنابراین بدست آوردن فرم جوابی که نزدیک به جواب تحلیلی مسئله باشد ضروری است. به این دلیل روش‌های تحلیلی-تقریبی مانند روش اختلال هموتوپی، روش تجزیه آدمیان و روش تکرار تغییراتی را برای این معادله مورد بررسی قرار داده‌ایم.

کلمات کلیدی: معادله‌ی کاماسا-هلم، همگرایی، روش‌های عددی، روش گالرکین، روش اختلال هموتوپی، روش تجزیه آدمیان، روش تکرار تغییراتی.

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل جزئی در چند سال اخیر چنان رشدی یافته‌اند که تقریبا همه پدیده‌های طبیعی را شامل می‌شوند. این معادلات در امواج، جاذبه‌ی ثقلی، هدایت گرما، دینامیک سیالات، انتشار صوت، مکانیک کوانتوم و بسیاری دیگر از پدیده‌ها ظاهر می‌شوند. در اوایل قرن بیستم تحقیقات ریاضی بر روی این معادلات شروع و روش‌های جدیدی در ریاضی محض به کاربرده شد. اما همزمان با اختراع بمب هیدروژنی در سال ۱۹۵۲ بود که علاقه زیادی به تحقیق بر روی گداخت هسته‌ای به عنوان یک منبع عظیم انرژی به وجود آمد. تحقیقات در گداخت هسته‌ای کنترل شده منجر به انتشار مقالات زیادی در اواخر دهه‌ی ۱۹۵۰ و در اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ شد. به طور کلی فیزیک پلاسمای نظری اولین بار در این دوره بود که به صورت یک ساختار منظم ریاضی در آمد و باعث به وجود آمدن بستر مناسبی برای ریاضیات کاربردی شد. معادلات دیفرانسیل جزئی اینک یکی از مهمترین مباحث آنالیز ریاضی بوده و به دلیل کثرت کاربردهای آنها در فیزیک، مهندسی و سایر علوم از اهمیت به سزایی برخوردارند. اکثر قوانین طبیعی فیزیکی نظیر معادلات ماکسول، قانون تبرید نیوتن، معادلات ناویر استوکس، معادلات حرکت نیوتن و معادله شرودینگر در مکانیک کوانتوم با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان شده‌اند. یعنی این قوانین پدیده‌های فیزیکی را به وسیله‌ی ارتباط فضا و مشتقات نسبت به زمان توضیح می‌دهند. توجه زیادی که دانشمندان در دهه‌های اخیر به مطالعه پدیده‌های غیرخطی نشان می‌دهند، ارتباط تنگاتنگ آن را با تکنولوژی را بیان می‌کند. تقریبا در هر شاخه‌ای از فیزیک می‌توان مسائل و پدیده‌های غیرخطی را مشاهده نمود در شاخه‌های مثل اپتیک، ماده چگال، فیزیک پلاسما، دینامیک شاره‌ها، اختر فیزیک و حتی فیزیک نظری

مسائل غیرخطی بسیاری وجود دارند، اگرچه برای پرداختن به مسائل غیرخطی روش‌های قدرتمندی ابداع شده‌اند، اما هیچ یک از آن‌ها عمومیت ندارند و در بسیاری مواقع از روش‌های ابتکاری استفاده می‌شود. وجود مشتقات در این معادلات بدان خاطر است که مشتق‌ها پدیده‌های طبیعی (مانند سرعت، شتاب، نیرو، اصطکاک، شار و شدت جریان و ...) را نمایش می‌دهند، از اینرو معادلاتی داریم که مشتقات جزئی کمیت مجهولی را که می‌خواهیم بیابیم به هم ارتباط می‌دهند. به طور کلی بیشتر مسائل فیزیک و مهندسی را می‌توان به سه صورت کلی مسائل تعادل، مسائل مقدار ویژه و مسائل تکثیر یا رژه تقسیم‌بندی کرد، که معادلات موج به عنوان اساسی‌ترین شکل معادلات تکثیر از جایگاه ویژه‌ای برخوردارند. امواج دریک سیستم پلاسمایی و هر سیستم فیزیکی دیگر یک پدیده‌ی بسیار مرسوم هستند. پدیده‌هایی همچون صوت و نور از امواج بسیار آشنایی هستند، مثلا صوت چیزی نیست جز یک موج فشاری در هوا و نور یک موج الکترومغناطیسی است که با سرعت ثابت مرسوم به سرعت نور حرکت می‌کند.

برای مطالعه‌ی امواجی که در اثر گذر سریع یک جسم از سطح آزاد مایع یا سیال ایجاد می‌شوند. از معادله‌ی حرکت استفاده می‌شود. این امواج از محل ایجاداغتشاش منتشر شده و از نوع امواج عرضی هستند. در امواج عرضی حرکت موج اساسا عمود بر حرکت المان‌های سیال است. سرعت و شکل این امواج به مدت بیش از صد سال توسط مهندسین و ریاضیدانان تحت بررسی بوده است، به علت پیچیدگی زیاد پدیده، مطالعات عموما به امواج کم عمق منحصر می‌شوند. تئوری آب‌های کم‌عمق نتایجی به بار می‌آورد که برای کانالها، رودخانه‌ها، سدها، و پلاسما معتبر است. از اینرو حل این معادلات یکی از نیازهای اساسی مهندسی (سازه، عمران، مکانیک، هیدرولیک و ...) و پزشکی در دنیای امروز است. حل معادلات امواج خطی بسیار ساده است هر ترکیب خطی از جواب‌ها نیز خودشان جواب معادله هستند، به طور کلی مسائل خطی را می‌توان با یک روش سیستماتیک حل کرد اما متاسفانه معادلاتی که یک سیستم فیزیکی را توصیف می‌کنند، معادلاتی غیرخطی هستند که سیالات نیز از جمله‌ی این سیستم‌ها هستند. ساده ترین رهیافت که برای حل این معادلات به ذهن می‌رسد این است که این معادلات را به نوعی خطی سازی کنیم. که البته این کار تنها برای دامنه‌های کوچک قابل توجیه است و برای

امواج غیرخطی با دامنه‌های بزرگتر دیگر این روش‌های سیستماتیک به کار نمی‌آید و باید به راه‌های دیگری برای حل معادلات متوسل شویم. مسائل کاربردی معمولا مدل‌های بسیار پیشرفته و پیچیده‌ای دارند. شکل‌های هندسی پیچیده، تاثیرات متقابل پدیده‌های فیزیکی مختلف، وابستگی زمانی پدیده‌ها با وجود شرایط مرزی ساکن در آن‌ها و تبعیت آن‌ها از قوانین آماری، محدودیت‌های ناشی از رعایت جنبه‌های اقتصادی مسائل و ... نمونه‌هایی از ویژگی‌های مدل‌های واقعی هستند، که به هیچ وجه نمی‌توان صرفا به طور تحلیلی آن‌ها را بررسی نمود. به ناچار، با روش‌های دیگری به بررسی مسائل باید پرداخت. روش‌های تحلیلی-تقریبی و روش‌های عددی نمونه‌ای از این روش‌ها محسوب می‌شود. روش‌های عددی به علت پیشرفت بیش از حد کامپیوترها از دهه ۱۹۶۰ میلادی توسعه یافته و روز به روز بر اهمیت آن افزوده می‌شود. امروزه می‌توان اذعان نمود که حتی برای پیچیده‌ترین پدیده‌های فیزیکی مورد نظر در محدوده کاربردهای مهندسی به ویژه در خصوص سیالات این روش به درجه‌ای از اهمیت و ارزش رسیده است، که هر فردی که در این زمینه تحقیق می‌کند به ناچار باید به این ابزار مسلط شود. در این پژوهش سعی بر آن است که یکی از مهمترین معادلات در زمینه معادلات حرکت موج‌های کم‌عمق آب موسوم به معادله‌ی کاماسا-هلم[۱] که از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی است را معرفی و رفتارها و انواع جواب‌های آن را بررسی کنیم. همچنین روش‌های عددی و تحلیلی-تقریبی را برای این معادله بیان کنیم. این پژوهش در چهار فصل تدوین شده است به طوری که فصل اول آن به مفاهیم اساسی و تعریف‌های مقدماتی که برای مطالعه دیگر فصل‌ها لازم می‌باشد، اختصاص داده شده است . فصل دوم کلیاتی در مورد معادله‌ی کاماسا-هلم و کاربردهایش در زمینه های مختلف و انواع جواب‌های آن است، در فصل سوم و چهارم به ترتیب روش‌های عددی و روش‌های تحلیلی-تقریبی برای این معادلات بیان می‌شود. لازم به ذکر است که مقالات اصلی این پژوهش مراجع [۴] ، [۱۴] ، [۱۶] ، [۲۴] ، [۲۵] است.

[1] Camassa-Holm equation

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه که برای فصل‌های دیگر مورد نیاز است، آورده شده است.
یک معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) معادله‌ای است، شامل مشتقات جزئی، تفاوت آن با معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs) در این است که در(ODEs) تابع مجهول فقط به یک متغیر بستگی دارد، ولی در (PDEs) تابع مجهول به چند متغیر بستگی دارد.
منظور از مرتبه‌ی یک PDE بالاترین مشتق جزئی موجود در معادله است.

تعریف ۱.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل: یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی شامل دو یا چند معادله‌ای است که هر کدام شامل مشتقات دو یا چند تابع مجهول نسبت به یک متغیر مستقل هستند.

تعریف ۲.۱. مسائل مقدار اولیه [1]: که برای توصیف ریاضی یک سیستم فیزیکی مطرح می‌شوند، مسائلی هستند که در آن‌ها تابع نامعلوم و مشتق یا مشتقاتش در یک نقطه مشخص(نقطه اولیه) به همراه معادله دیفرانسیل می‌آیند.

خوش طرح بودن مساله‌های مقدار اولیه

تعریف ۳.۱. شرایط هادامار(تعریف کلاسیک) یک مساله خوش طرح: معادله دیفرانسیل جزئی به همراه یک مجموعه از شرایط اولیه است که در خواص اساسی ذیل صدق می‌کند

[1] Initial Value problem

۱- وجود جواب : حداقل یک جواب $u(x,y)$ که در همه‌ی شرایط مساله صدق کند موجود باشد.

۲- یگانگی جواب : دقیقا یک چنین جوابی وجود داشته باشد.

۳- پایداری جواب : جواب یگانه $u(x,y)$ در یک حالت پایداری روی داده‌های مساله قرار داشته باشد به این معنی که هر تغییر جزئی روی داده‌های مساله، تنها تغییر جزئی جواب را سبب گردد.

تذکر : برای مساله‌های فیزیکی، تنها اطمینان از وجود یک جواب منحصر به فرد کافی نیست، بلکه شرط اساسی، پایداری جواب است. زیرا معمولا داده‌ها در مساله‌ی فیزیکی از راه آزمایش و تجربه به دست می‌آیند و در این میان خطاهایی چون خطای ابزاری، خطای محاسباتی و تقریب‌زدن و غیره موجودند. بنابراین، برقراری شرط پایداری باعث می‌گردد که به کارگیری تقریب در داده‌ها تنها تغییر جزئی در جواب مساله را شاهد باشیم.

تعریف ۴.۱. اگر $u \in R^{N+1}$ جواب تحلیلی یک معادله و $\phi \in R^{N+1}$ جواب عددی آن باشددر این صورت خطاهای L_2 و L_∞ به صورت زیر تعریف می شوند، که در آن h طول افراز می باشد.

$$L_2 = ||u-\phi||_2 = \sqrt{h\sum_{i=0}^{N} ||u_i-\phi_i||}$$

$$L_\infty = ||u-\phi|| = \max_i |u_i-\phi_i|$$

تعریف ۵.۱. مجموع همه توابع $f(x)$ را که در ناحیه دلخواه $G \subset R^n$ پیوسته بوده و مشتقات آن تا مرتبه‌ی k موجود و پیوسته باشد، را با نماد $C^k(G)$ نشان داده و در صورتی که $G = R^n$ ، با نماد ساده C^k نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱. تابع F در شرط لیپ‌شیتز از مرتبه α در نقطه c صدق می‌کند، هرگاه به ازای هر x در همسایگی c رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$|F(x) - F(c)| \leq L|x - c|^{\alpha}.$$

که در آن L مقدار ثابتی به نام ثابت لیپ‌شیتز است.

تعریف ۷.۱. تابعی که مشتقات آن از هر مرتبه‌ی موجود باشد را تابع **هموار** می‌گویند.

تعریف ۸.۱. تابع دلتای دیراک یک بعدی تابعی با خواص زیر است

$$i. \quad \delta(x-\xi) = 0 \qquad x \neq \xi$$

$$ii. \int_{R_\varepsilon} \delta(x-\xi)dx = 1 \qquad R_\varepsilon = \{\xi - \varepsilon < |x - \xi| < \xi + \varepsilon\}$$

$$iii. \quad \int \delta(x-\xi)f(\xi)d\xi = f(x).$$

تعریف ۹.۱. تابع u را **جواب کلاسیک** یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی گوئیم، هرگاه درمعادله قرار دهیم، طرف راست متحد با صفر می‌شود.

تعریف ۱۰.۱. تابع u را **جواب اساسی** یاجواب در حالت توزیع یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی گوئیم، هرگاه در معادله قرار دهیم طرف راست برابر تابع دلتای دیراک شود.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک مجموعه باز است. فضای پراکندگی‌ها(تابع‌هایی با محمل فشرده که بی‌نهایت بار هموار هستند) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \qquad supp(\varphi) \subset \Omega\}$$

$supp(\varphi)$ فشرده است.

تعریف ۱.۱۲. اندیس چندگانه[۲] فرض کنید d بعد فضا باشد. اندیس چندگانه، یک گردایه‌ی مرتب از d تا عدد صحیح نامنفی به صورت $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ است. طول اندیس چندگانه α را با $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$ نشان می‌دهیم. اگر ν یک تابع m بار مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر $|\alpha| \leq m$

$$D^\alpha \nu = \frac{\partial^{|\alpha|}\nu(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha}{}_d}$$

مشتق جزئی مرتبه α ام است، این یک نماد برای مشتقات جزئی است. برای مثال

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_1} = D^\alpha \nu \qquad for \quad \alpha = (1, 0, \ldots, 0)$$

$$\frac{\partial^\alpha \nu}{\partial x_1 \ldots \partial x_d} = D^\alpha \nu \qquad for \quad \alpha = (1, 1, \ldots, 1)$$

بنا به قرارداد زمانی که $\alpha = (0, \ldots, 0)$ آنگاه مجموعه‌ی همه مشتقات مرتبه‌ی m تابع νبه صورت $\{D^\alpha \nu \quad | \quad |\alpha| = m\}$ می‌تواند نوشته شود.

در تعریف مشتق‌های ضعیف و فرمول ضعیف برای استفاده از روش‌های باقیمانده وزن‌دار به بعضی از نتایج اولیه انتگرال‌گیری جزبه‌جز استفاده می‌شود که این نتایج را در اینجا به صورت قضایای زیر یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۱.۱. [۲۱] *فرض کنید $\Omega \in R^d$ یک دامنه کراندار با مرز پیوسته لیپ‌شیتز است، برای $u, v \in C^1 \cap C(\bar{\Omega})$ داریم*

---

[۲] Multi-index

$$\int_\Omega \frac{du}{dx_i} \upsilon dx = -\int_\Omega u \frac{d\upsilon}{dx_i} dx + \int_{d\Omega} u\upsilon\nu_i ds$$

که $\nu(x) = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)^T$ بردار نرمال خارجی واحد مرز $d\Omega$ است.

قضیه ۱.۲. [۲۱] *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک دامنه کراندار با مرز پیوسته لیپ‌شیتز باشد هر بردار هموار $w \in [C^1 \cap C(\bar{\Omega})]^d$ در رابطه زیر صدق می‌کند.*

$$\int_\Omega \bigtriangledown . w(x) dx = \int_{d\Omega} w(x) \upsilon(x) ds$$

که $\upsilon(x)$ بردار نرمال خارجی مرز $d\Omega$ است.

قضیه ۱.۳. [۲۱] *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک مجموعه باز است و $f \in C^m(\Omega)$ و α یک اندیس چندگانه است به طوریکه $|\alpha| \leq m$ ، آنگاه رابطه زیر برای هر $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ برقرار است*

$$\int_\Omega D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) dx.$$

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک مجموعه باز است و $1 \leq p < \infty$.تابع $f : \Omega \to R$ ، **p-انتگرال‌پذیر موضعی** در Ω نامیده می شود اگر برای هر زیر مجموعه فشرده‌ی K از Ω داشته باشیم $f \in L^p_{loc}(K)$. فضای همه تابع های p -انتگرال‌پذیر در Ω را با $L^p(\Omega)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باز باشد $f \in L^1_{loc}$ و α یک اندیس چندگانه است. تابع $D^\alpha_w f \in L^1_{loc}$ را **مشتق ضعیف** α ام می‌گوییم، اگر رابطه‌ی زیر برای هر $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ برقرار باشد.

$$\int_\Omega D_w^\alpha f(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx$$

لم ۱.۱. [۲۱] *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باز باشد و $f \in L^1_{loc}$ و α یک اندیس چندگانه باشد مشتق ضعیف α ام $D_w^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$ به طور منحصر به فرد در Ω تعریف می‌شود.*

فضای لبگ شامل تابع‌های ناپیوسته و ناهموار است که مشتق‌های آن‌ها با روش‌های کلاسیک تعریف نشده‌اند، به هر حال در بسیاری از موارد مشتق‌های کلاسیک تقریبا همه جا وجود دارند. چیزی که نیاز داریم این است که مفهوم مشتق را مستقل از زیر مجموعه‌هایی با اندازه صفر تعمیم دهیم. سوبولف، این کار را با تعریف کردن مشتق‌های ضعیف انجام داده است. جز اصلی برای تعریف مشتق‌های ضعیف توزیع هستند.

تعریف ۱۵.۱. فضای سوبولف[۳] فرض کنید $\Omega \subset R^d$ باز باشد و k یک عدد صحیح نامنفی باشد و $p \in [1,\infty]$ فضای سوبولف $W^{k,p}(\Omega)$ ، مجموعه‌ی همه‌ی توابع $\nu \in L^p(\Omega)$ است به‌طوریکه برای هر اندیس چندگانه α با $|\alpha| \leq k$ ، مشتق ضعیف αام یعنی $D_w^\alpha \nu$ موجود باشد $D_w^\alpha \nu \in L^p(\Omega)$ و یعنی

$$W^{k,p}(\Omega) = \{\nu \in L^p(\Omega) : D_w^\alpha \nu \ \in \ L^p(\Omega) \ \ \forall \ \ |\alpha| \leq k\}$$

برای هر $1 \leq p \leq \infty$ نرم $||.||_{W^{k,p}(\Omega)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} ||\nu||_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} |D_w^\alpha \nu|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||D_w^\alpha \nu||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

و برای $p = \infty$ تعریف می‌کنیم:

$$||\nu||_{W^{k,p}} = \max_{|\alpha|\leq k} ||D_w^\alpha \nu||_{L^\infty(\Omega)}$$

[۳] Sobolev spaces