بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده علوم - بخش ریاضی

دنباله های دقیق فازی

پایان نامه تحصیلی

ارائه شده برای اخذ کارشناسی ارشد

استاد راهنما

دکتر محمدمهدی زاهدی

تهیه و تنظیم

رضا عامری

بهمن ۱۳۷۲

این گردآوری و پژوهش با حمایت مرکز بین‌المللی علوم و تکنولوژی پیشرفته و علوم محیطی انجام شده است

ج

۱۳۷۹/۷/۲۶

بسمه تعالی

این پایان نامه
به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد
به

بخش ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو : رضا عامری

استاد راهنما: دکتر محمد مهدی زاهدی

داور ۱ : دکتر ماشاا... ماشین‌چی

داور ۲ : دکتر اسفندیار اسلامی

تقدیم به والدین گرامی‌ام

و

همسر عزیزم

بسم‌الله الرحمن الرحیم

اول دفتر بنام ایزد دانا　　　　　صانع و پروردگار حی توانا

با حمد و سپاس بیکران به درگاه پروردگار حکیم که به من توفیق عنایت فرمود تا در راه تحصیل علم و دانش گام بردارم و به اندازهٔ استعداد و بضاعت ناچیز خود از دانش ریاضی بهره‌مند شوم. اگر چه بضاعت خویش را در این راه ناچیز یافتم اما همین بضاعت ناچیز و سرمایهٔ اندک از ریاضیات، باعث خوشحالی و رضایت من می‌باشد. و عظمت و زیبایی خیال‌انگیز ریاضیات را قدری در منظر اندیشه‌ام نمایان می‌سازد.

در اینجا فرصت را مغتنم می‌شمارم و از تمامی معلمین و اساتید بزرگواری که در طول مدت تحصیل همواره از علم و دانش خویش مرا بهره‌مند نموده‌اند، کمال تشکر و قدردانی می‌کنم و همواره خود را مدیون آنها می‌دانم. از خدای بزرگ برای همهٔ آنها اجر دنیوی و اخروی می‌طلبم. بخصوص از جناب آقای دکتر محمدمهدی زاهدی که استاد راهنمای این رساله بوده‌اند و علاوه بر اینکه در تمام مدت تحصیل و تهیهٔ این رساله از زحمات و راهنمائیهای بیدریغ و مشفقانهٔ ایشان برخوردار بوده‌ام، از همت بلند، روحیهٔ دانش پژوهی و اخلاق فاضلهٔ ایشان نیز بهره فراوان برده‌ام، تقدیر و سپاس بیکران دارم. خداوند همواره بر توفیقات ایشان بیافزاید.

در اینجا از آقایان دکتر اسلامی و دکتر ماشین‌چی که داوری این رساله را بر عهده داشته‌اند و زحمت بررسی و مطالعهٔ آنرا برخود هموار داشته‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در خاتمه از همسرم که در تهیه دستنوشته‌هایم صمیمانه مرا یاری کرده‌اند نهایت تشکر را دارم. همچنین از سرکار خانم باقری که با دقت و حوصله تایپ کامپیوتری رساله را بعهده داشته‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم.

رضا عامری

بهمن ۱۳۷۲

عنوان مطالب

بنام خدا

چکیده:

هدف اصلی این پایان‌نامه مطالعهٔ دنباله‌های دقیق از نگاشتهای خطی فضاهای برداری فازی و گسترش آن به کاتگوری مدولهای فازی بوده است لذا برای نیل به این هدف مطالعهٔ فضاهای برداری فازی و مدولهای فازی ضروری می‌باشد .از اینرو این پایان‌نامه در سه بخش تنظیم شده که در ذیل کارهای انجام شده آورده می‌شود :

در فصل ۱ ، فضاهای برداری فازی مورد مطالعه قرار گرفته است که به اختصار چنین است:

۱- تعریف، یک فضای برداری فازی، مولدهای فازی، استقلال و وابستگی خطی فازی، پایهٔ یک فضای برداری فازی، بعد یک فضای برداری فازی، حاصلضرب دو فضای برداری فازی تحت شرایط معین، دنباله‌های دقیق از نگاشتهای خطی فازی و کمپلکس فازی.

۲- نتایجی در ارتباط با تعاریف فوق آورده شده است.

در فصل ۲، شبکهٔ مدولهای فازی و کاتگوری مدولهای فازی مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد سپس ضرب تانسوری فازی دو مدول فازی معرفی و خواص و نتایجی از آن ذکر گردیده است. این فصل در ۸ بخش تنظیم گردیده که مختصراً در ذیل آورده می‌شود.

در بخش ۱، تعاریف و خواص مقدماتی مدولهای فازی آورده شده است. در بخش ۲ و ۳، مروری اجمالی به کاتگوری مدولهای فازی شده است که شامل معرفی کاتگوری R - مدولهای فازی، اشیاء، صفر، پرژکتیو، انژکتیو، آزاد فازی، کرنل، کوکرنل، ضرب، هم‌ضرب می‌باشد و

نشان داده می‌شود که کاتگوری R - مدولهای فازی یک کاتگوری جمعی است ولی آبلی نیست. و دو قضیه برای مشخص کردن اشیاء پرژکتیو و انژکتیو و آزاد در این کاتگوری آورده شده است.

بخش چهارم این فصل به بررسی خواص بیشتری از شبکه مدولهای فازی اختصاص یافته و خواص شبکه مدولهای L - فازی بطور فشرده تولید شده و پیوستهٔ بالائی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۵، ضمن معرفی یک مدول فازی متناهیاً تولید شده قضایا و نتایجی از این مدولها ذکر گردیده است. سرانجام در بخشهای ٦ و ٧ و ٨، با معرفی تئوری توپولوژیکی و کاتگوری فوقانی و کاتگوری نگاشتهای میان خطی فازی نشان داده می‌شود که کاتگوری نگاشتهای میان خطی فازی یک کاتگوری فوقانی برروی کاتگوری نگاشتهای میان خطی معمولی است. همچنین در این فصل ضرب تانسوری دو R - مدول فازی (M,μ) و (N,ν)، یعنی $(M \otimes N \ , \ \mu \otimes \nu)$ به عنوان شیئی آغازین در کاتگوری نگاشتهای میان خطی فازی معرفی شده و بعضی از خواص آن مشخص گردیده است. و سرانجام این بخش را با مفهوم هم‌ارزی موریتای دو حلقهٔ R و S به پایان می‌بریم. که در این مورد ثابت می‌شود دو حلقه R و S هم‌ارز موریتا هستند اگر و تنها اگر کاتگوری مدولهای فازی مربوطهٔ آنها هم‌ارز باشند.

در آخرین فصل یعنی فصل ۳، دنباله‌های دقیق فازی معرفی شده و ضمن مثالهایی نشان داده‌ایم که تعریف پان از نقطه نظر کاتگوری مناسب نیست ولی تعریف ارائه شده توسط ما مناسب است. همچنین به ارتباط بین $Hom_R(\mu_A\ ,\ -)$ و دنباله‌های دقیق فازی پرداخته شده است. بخصوص دو قضیه در رابطهٔ با مشخص کردن دنباله‌های فازی القا شده توسط $Hom_R(\mu_A\ ,\ -)$ و $Hom(-\ ,\ \eta_B)$ ثابت کرده‌ایم.

در خاتمهٔ فصل ۳ مفاهیم پولبک و پوش اوت (Pull - back and Push - out) فازی در

کاتگوری مدولهای فازی ارائه گردیده و ارتباط آن با دنباله‌های دقیق فازی در کاتگوری مدولهای فازی تحت عنوان چند لم و قضیه مشخص شده است. بخصوص با چند مثال نشان داده‌ایم است که بعضی از نتایج حالت معمولی مدولها قابل توسعه به حالت فازی نمی‌باشد.

فصل ٥

مقدمات

در این فصل بعضی از خواص یک شبکه کامل را مطالعه می کنیم که مورد استفاده در فصلهای دیگر قرار می گیرند. ابتدا مفهوم شبکهٔ کامل را می آوریم.

یک مجموعهٔ جزئاً مرتب، مجموعه‌ای غیرتهی چون A همراه با یک رابطهٔ $\leq$ بنام R، روی $A \times A$ است که در خواص انعکاسی، تعدی و پاد تقارنی صدق کند. یک شبکه، یک مجموعهٔ جزئاً مرتب L هست، بقسمیکه به ازای هر دو عضو $a \ \& \ b \in L$، مجموعهٔ $\{a,b\} \subset L$ دارای سوپریمم $(a \vee b)$ و اینفیمم $(a \wedge b)$ در L باشد و شبکهٔ L کامل گفته می شود اگر که هر زیر مجموعهٔ L دارای سوپریمم و اینفیمم در L باشد. نمونه‌ای از یک شبکهٔ کامل بازه $[\cdot,\text{١}]$ از اعداد حقیقی است.

از این به بعد $(L,\leq,\vee,\wedge)$ را یک شبکهٔ کامل فرض کرده و برای هماهنگی در نماد "sup" و "inf" را به ترتیب بجای "$\vee$" و "$\wedge$" می نویسیم.

لم ١.٥. فرض کنیم $x_\alpha ,y_\alpha \in L$، که α متعلق به یک مجموعه اندیسگذار Λ است، آنگاه

$$\inf_{}(\inf_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha,\inf_{\alpha\in\Lambda} y_\alpha) = \inf_{\alpha\in\Lambda}(\inf(x_\alpha,y_\alpha))$$

اثبات: چون $\inf_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha \leq y_\alpha$ و $\inf_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha \leq y_\alpha$، به ازای هر $\alpha \in \Lambda$، بنابراین

$$\inf(\inf_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha ,\inf_{\alpha\in\Lambda} y_\alpha) \leq \inf(x_\alpha ,y_\alpha);\ \forall\alpha \in \Lambda$$

لذا

$$\inf_{\alpha\in\Lambda} (\inf_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha , \inf_{\alpha\in\Lambda} y_\alpha) \le \inf_{\alpha\in\Lambda} (\inf(x_\alpha , y_\alpha)) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر چون به ازای هر $\alpha \in \Lambda$ داریم $\inf (x_\alpha , y_\alpha) \le x_\alpha$، پس

$$\inf_{\alpha\in\Lambda} (\inf (x_\alpha , y_\alpha)) \le \inf_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha$$

و متشابهاً

$$\inf_{\alpha\in\Lambda} (\inf (x_\alpha , y_\alpha)) \le \inf_{\alpha\in\Lambda} y_\alpha$$

بنابراین

$$\inf_{\alpha\in\Lambda} (\inf (x_\alpha , y_\alpha)) \le \inf (\inf_{\alpha\in\Lambda} x_\alpha , \inf_{\alpha\in\Lambda} y_\alpha). \qquad (۲)$$

حال باتوجه به (۱) و (۲) اثبات بدست می آید.

تعریف ۲.o. یک شبکهٔ کامل L، یک شبکهٔ کاملاً توزیعی ضعیف[1] نامیده می شود، اگر که آن شبکه در قانون توزیعی کامل[2] صدق کند، یعنی

$$\inf (a, \sup_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha) = \sup_{\alpha\in\Lambda} \inf (a, b_\alpha);$$

که در آن $a, b_\alpha \in L$ و $\alpha \in \Lambda$.

از این پس ما $L = (L, \le, \sup, \inf)$ را بعنوان یک شبکهٔ کاملاً توزیعی ضعیف قرارداد می کنیم، که دارای کوچکترین و بزرگترین عنصر است و آنها را بترتیب o و ۱ می نامیم. اگر $a, b \in L$، می نویسیم

1- weak completely distributive
2- Complete distributive

(i) $a \geq b$ اگر و فقط اگر $b \leq a$

(ii) $a < b$ اگر و فقط اگر $a \leq b$ و $a \neq b$

(iii) $a > b$ اگر و فقط اگر $b < a$

لـم ۳.۰. (قانون بیرخف). فرض کنیم Λ یک مجموعهٔ اندیسگذار بوده و برای هر اندیس $i \in \Lambda$، Φ_i یک مجموعه اندیس باشد. اگر a_j یک خانواده از عناصر L باشد که توسط $\Phi = \bigcup_{i \in \Lambda} \Phi_i$ اندیسگذاری شده است؛ آنگاه

$$\sup_{i \in \Lambda} \sup_{j \in \Phi_i} a_j = \sup_{j \in \Phi} a_j$$

اثبات: صفحهٔ ۱۱۷ از [3]

قضیهٔ ٤.۰. فرض کنیم Λ_i، برای $i = ۱,...,n$ مجموعه اندیسهائی باشند، آنگاه

$$\inf\left(\sup_{\alpha_1 \in \Lambda_1} a_{\alpha 1},...,\sup_{\alpha_n \in \Lambda_n} a_{\alpha n}\right) = \sup_{(\alpha_1,...,\alpha_n) \in \Lambda_1 \times ... \times \Lambda_n} \inf(a_{\alpha 1},...,a_{\alpha n})$$

که در آن $a_{\alpha i} \in L$ ؛ برای $i = ۱,...,n$.

اثبات: حکم ۲ از [3]

برای یک مجموعهٔ غیرتهی X، یک زیر مجموعه L - فازی A از X، یک تابع $A : X \to L$ می‌باشد. اگر $L = [۰,۱]$، آنگاه بجای زیر مجموعهٔ L - فازی، به A زیر مجموعهٔ فازی می گوئیم. فرض کنیم

$F(X) = \{A \mid$ یک زیر مجموعهٔ L - فازی از X است $A\}$

آنگاه برای $A,B \in F(X)$ می‌نویسیم:

(i) $A = B$ اگر و فقط اگر B,A توابعی مساوی باشند،

(ii) $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $A(x) \le B(x)$، به ازای هر $x \in X$،

(iii) $A \subset B$ اگر و فقط اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$،

(iv) $A \supseteq B$ اگر و فقط اگر $B \subseteq A$،

(v) $A \supset B$ اگر و فقط اگر $B \subset A$.

توجه: از بیانات بالا نتیجه می‌شود که $A = B$ اگر و فقط اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

مفهوم یک نقطهٔ L - فازی x_t از X؛ که $x \in X$ و $t \in L$، به معنی $x_t \in F(X)$ است که به شکل زیر تعریف شده باشد،

$$x_t(y) = \begin{cases} t & \text{اگر } y = x \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و می‌نویسیم $x_t \in X$. اگر x_t یک نقطهٔ L - فازی از X باشد و $x_t \subseteq A \in F(X)$ آنگاه می‌نویسیم $x_t \in A$.

فرض کنیم $E \subseteq X$، آنگاه (تابع L - مشخصهٔ) $\chi_E \in F(X)$ بشکل زیر تعریف می‌شود

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = E \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

لم ۵.۰. فرض کنیم $A \ \& \ B \in F(X)$، آنگاه $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $x_t \in A$ نتیجه بدهد $x_t \in B$؛ برای هر نقطه L - فازی x_t از X.

اثبات: فرض کنیم $A \subseteq B$ و $x_t \in A$. آنگاه $t \le A(x) \le B(x)$، بنابراین $x_t \in B$.

بر عکس فرض کنیم برای هر نقطهٔ L - فازی x_t از X؛ $x_t \in A$ نتیجه بدهد $x_t \in B$. چون $x_{A(x)} \in A$، داریم $x_{A(x)} \in B$، برای هر $x \in X$. بنابراین $A(x) \le B(x)$، برای هر $x \in X$. یعنی

$A \subseteq B$.

تعریف ۶.۰. فرض کنیم $A,B,A_\alpha \in F(X)$، که α در مجموعه اندیس Λ است.

زیر مجموعه‌های L - فازی $A \cap B$، $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$، $A \cup B$، $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ را به شکل زیر تعریف می کنیم.

برای هر $x \in X$،

$$A \cap B(x) = \inf (A(x),B(x)) \qquad \text{(i)}$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x) = \inf_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x) \qquad \text{(ii)}$$

$$A \cup B(x) = \sup (A(x),B(x)) \qquad \text{(iii)}$$

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x) = \sup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x) \qquad \text{(iv)}$$

که به ترتیب، اشتراک B,A، اشتراک A_α ها، اتحاد B,A و اتحاد A_α ها نامیده می شوند.

تعریف ۷.۰. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \in F(X)$ ، $B \in F(Y)$. آنگاه $f(A) \in F(Y)$ و $f^{-1}(B) \in F(X)$، برای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$ به شکل زیر تعریف می شوند:

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} A(x) & \text{اگر } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x)) \qquad \text{(ii)}$$

تعریف ۸.۰. فرض کنیم $A \in F(X)$ و $t \in L$. زیر مجموعه تراز A_t از X به این شکل تعریف می شود

$$A_t = \{x \in X \mid A(x) \geq t\}.$$

لم ۹.۰. فرض کنیم $A,B \in F(X)$ و $A \subseteq B$. آنگاه $A_t \subseteq B_t$، به ازای هر $t \in L$.

اثبات: اگر $x \in A_t$ آنگاه داریم $t \le A(x) \le B(x)$، پس $x \in B_t$. چون x دلخواه است لذا $A_t \subseteq B_t$.

تعریف ۱۰.o. فرض کنید $(L_o, \le, \wedge, \vee)$ یک شبکه کامل باشد. زیرمجموعهٔ A از L_o را سویی [1] مینامیم. هرگاه برای هر $a, b \in A$، عضو $c \in A$ بقسمی موجود باشد که $a \le c$ و $b \le c$.

تعریف ۱۱.o. یک شبکه کامل $(L_o, \le, \wedge, \vee)$ پیوستهٔ بالایی [2] نامیده می‌شود. اگر برای هر زیرمجموعهٔ سویی A از L_o و هر $a \in L_o$ داشته باشیم.

$$a \wedge \left(\bigvee_{x \in A} x \right) = \bigvee_{x \in A} (a \wedge x)$$

تعریف ۱۲.o. عضو a متعلق به شبکه پیوستهٔ بالایی L_o فشرده [3] نامیده می‌شود، اگر برای هر زیرمجموعهٔ سویی A از L_o که $a \le \bigvee_{x \in A} x$، آنگاه عضو $x_o \in A$ بقسمی موجود باشد که $a \le x_o$.

تعریف ۱۳.o. یک شبکه پیوستهٔ بالایی L_o را بطور فشرده تولید شده [4] می‌نامیم. هرگاه هر عضو از L_o بصورت سوپریممی از عناصر فشرده باشد.

1- directed
2- Upper-continuous
3- compact
4- compactly generated