بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه دکتری

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نامساوی های یانگ ماتریسی

مؤلف:

عالمه شیخ حسینی

استاد راهنما:

دکتر عباس سالمی

استاد مشاور:

دکتر غلامرضا آقاملایی

خرداد ماه ۱۳۹۲

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه دکتری به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: عالمه شیخ حسینی 　　　　　　　　　　امضاء:

استاد راهنما: دکتر عباس سالمی 　　　　　　　　　　امضاء:

استاد مشاور: دکتر غلامرضا آقاملایی 　　　　　　　　　　امضاء:

داور اول : 　　　　　　　　　　امضاء:

داور دوم: 　　　　　　　　　　امضاء:

نماینده تحصیلات تکمیلی: 　　　　　　　　　　امضاء:

تقدیم به

ریحانه و ستایش دخترهای عزیزم

تشکر و قدردانی

به نام آنکه هستی نام از او یافت   فلک جنبش زمین آرام از او یافت

پروردگار بی همتا را شاکرم که به من توان آموختن، درک و به کار بستن عطا کرد. خداوند مهربانی که آنچه در این راه بدان نیاز داشتم، حتی بدون آنکه به آن آگاهی داشته باشم، به من عطا فرمود. از مادر و پدر عزیزم که وجودم از آنهاست و هر آنچه بدان دست یابم همه از لطف وجود و دعای خیر آنهاست قدردانی و سپاسگزاری می کنم. از همسرم که دوست، یاور و پشتیبان همیشگی ام بوده و سختی این مسیر طولانی جز با همراهی او نرم شدنی نبود، بسیار سپاسگزارم. از فرزندان عزیزم، که با بردباری، شرایط تحصیل مرا تحمل نموده و با سعه صدر و همکاری های کودکانه و شیرین خویش مرا یاری کردند و شیرینی و لذت زندگی ام هستند ممنون و سپاسگزارم.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر سالمی که در طی این چند سال مانند پدری دلسوز همراه و پشتیبان من بودند و از راهنمایی ها و دانش فراوان ایشان بسیار استفاده بردم، متواضعانه سپاسگزارم. همچنین از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر آقاملایی که ارشادات ایشان برایم راهگشا بود صمیمانه سپاسگزارم.

از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر صال مصلحیان، جناب آقای دکتر ولی و سرکار خانم دکتر خسروی نیز که داوری این رساله را پذیرفته اند کمال تقدیر و تشکر را دارم و از محضر ایزد توانا برای ایشان موفقیت و سلامتی آرزومندم.

عالمه شیخ حسینی

خرداد ماه ۱۳۹۲

چکیده

دراین رساله ابتدا نتایج ثابت شده در زمینه نسخه های ماتریسی نامساوی میانگین حسابی - هندسی و نامساوی یانگ را با نرم های یکانی پایا و نرم شعاع عددی مورد بررسی قرار می دهیم و سپس تعدادی از نامساوی های عملگری را تعمیم و بهبود می دهیم. به خصوص، اگر $A \in \mathbb{M}_n$ ماتریسی غیر اسکالر و اکیداً مثبت باشد به طوری که $1 \in \sigma(A)$ و $p > q > 1$ با $1/p + 1/q = 1$ ، آن گاه ماتریس $X \in \mathbb{M}_n$ وجود دارد به طوری که $\omega(AXA) > \omega(\frac{1}{p}A^pX + \frac{1}{q}XA^q)$. همچنین برای ماتریس های مثبت $A, B \in \mathbb{M}_n$ و برای هر $X \in \mathbb{M}_n$ نشان خواهیم داد که $\omega(AXA) \leq \frac{1}{2}\omega(A^2X + XA^2)$ ، اما نامساوی $\omega(AXB) \leq \frac{1}{2}\omega(A^2X + XB^2)$ در حالت کلی برقرار نیست. با استفاده از یک شکل بهبود یافته از نامساوی یانگ تعدادی از نامساوی های عملگری را بهبود می دهیم. به خصوص ثابت می کنیم که اگر $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ و $p \geq q > 1$ با $1/p + 1/q = 1$ و $r \geq \frac{2}{q}$ ، آن گاه

$$\omega^r(A^*XB) \leq \left\| \frac{1}{p}(B^*|X|B)^{rp/2} + \frac{1}{q}(A^*|X^*|A)^{rq/2} \right\| - (\frac{1}{p}) \inf_{\|x\|=1} \eta(x),$$

که در آن $\eta(x) := \left(\langle (B^*|X|B)x, x\rangle^{rp/4} - \langle (A^*|X^*|)A)x, x\rangle^{rq/4}\right)^2$.

همچنین با استفاده از قضیه " هاگروپ" ثابت می کنیم که اگر ν عددی حقیقی و مخالف $1/2$ باشد و $A \in \mathbb{M}_n$ ماتریسی غیر اسکالر و اکیداً مثبت باشد، آن گاه ماتریس $X \in \mathbb{M}_n$ وجود دارد به طوری که $\|A^\nu XA^{1-\nu}\| > \|\nu AX + (1-\nu)XA\|$.

کلمات کلیدی: شعاع عددی، ماتریس معین مثبت، نامساوی یانگ، نرم تحت یکانی پایا، نرم عملگری.

مقدمه

نامساوی ها یکی از مهمترین حوزه های پژوهشی آنالیز ماتریسی هستند که از ابتدا مورد علاقه بسیاری از ریاضی دانان بوده و کاربردهایی در علوم مختلف از جمله محاسبات علمی، نظریه سیستم و کنترل، تحقیق در عملیات، فیزیک ریاضی، استاتیک، اقتصاد و مهندسی دارد.

نخستین بار در سال ۱۹۳۴ کتاب تقریبا جامعی با نام "نامساوی ها" [۱۳] توسط هاردی، [۱] لیتل وود [۲] و پولیا [۳] نگاشته شد. از آن پس ، تلاش های زیادی برای چاپ و نشر کتاب، رساله و مقاله در حوزه نامساوی های ریاضی صورت گرفت. یکی از زمینه های اساسی تحقیق و پژوهش در نظریه عملگرها و آنالیز ماتریسی، نامساوی های عملگری و ماتریسی است. در واقع می توان گفت نامساوی های ماتریسی منعکس کننده آنالیز ماتریسی از دیدگاه کمی می باشند. نامساوی های ماتریسی، موضوعات مختلفی مانند نرم ماتریسی، میانگین های ماتریسی، توابع محدب، توابع معین مثبت، مقادیر ویژه و مقادیر منفرد ماتریس ها را در بر می گیرد.

افراد زیادی سعی کرده اند روابط و نامساوی های اعداد را برای ماتریس ها به کار گیرند، اما آنچه که به نظر می رسد این است که در به کارگیری بعضی از نامساوی ها برای ماتریس ها باید نهایت دقت را به کار گرفت زیرا نسخه های جالبی از نامساوی های اعداد برای ماتریس ها وجود دارد، اما تنها برخی از آن ها به نتایج مطلوبی می رسند. برای مثال *نامساوی مثلث* برای دو ماتریس A و B به شکل $\mid A+B \mid \leq \mid A \mid + \mid B \mid$ همه جا درست نیست [۸]. به عنوان مثالی دیگر، اگر a و b دو عدد مثبت باشند نامساوی زیر را همواره برای اعداد

[۱] G. H. Hardy

[۲] E. Littlewood

[۳] Polya

داریم :

$$| a - b | \leq a + b$$

ظاهرا انتظار داریم نسخه ی ماتریسی این نامساوی برای دو ماتریس مثبت A و B به صورت زیر باشد:

$$| A - B | \leq A + B$$

ولی این نامساوی همیشه درست نیست [۸]. شاید اگر از نسخه ی مقادیر تکین (به جای خود ماتریس) استفاده کنیم موفق تر باشیم. یعنی این که

$$s_j(A - B) \leq s_j(A + B), \qquad ۱ \leq j \leq n \tag{۱}$$

باز هم می توان مثالی آورد که درستی نامساوی فوق را نقض می کند [۸]. ، اما اگر ادعای ضعیف تری را برای نرم های یکانی پایا به کار گیریم. یعنی این که:

$$|||A - B||| \leqslant |||A + B|||\,, \tag{۲}$$

آن گاه نامساوی (۲) همواره درست است. یک اثبات از این نامساوی در [۸] آورده شده است.

در سال ۱۹۹۰ برای اولین بار باهاتیا [۴] و کیتانه [۵] نسخه ای ماتریسی از میانگین هندسی - حسابی را به شکل زیر صورت بندی و اثبات نمودند:

$$۲ s_j(A^*B) \leq s_j(AA^* + BB^*), \qquad ۱ \leq j \leq n.$$

[۴] Bhatia

[۵] Kittaneh

واضح است که اگر دو ماتریس A و B مثبت باشند، آن گاه نامساوی فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$۲s_j(AB) \leq s_j(A^۲ + B^۲), \qquad ۱ \leq j \leq n.$$

پس به عنوان یک نتیجه از نامساوی فوق، اگر $A, B \in \mathbb{M}_n$ که در آن $\mathbb{M}_n$ جبر همه ماتریس های مختلط $n \times n$ می باشد، آن گاه بنا به قضیه تسلطی فن [۶] برای هر نرم تحت یکانی پایا داریم:

$$|||A^*B||| \leq \frac{۱}{۲} |||A^*A + B^*B||| . \qquad (۳)$$

پس نسخه ی نرم یکانی پایا نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی نیز برقرار است. آن ها همچنین یک تعمیم از نامساوی (۳) به صورت زیر ثابت کردند:

$$|||A^*XB||| \leq \frac{۱}{۲} |||AA^*X + XBB^*||| \qquad (A, B, X \in \mathbb{M}_n).$$

در سال ۱۹۹۵ آندو [۷] نسخه ماتریسی نامساوی "یانگ" را به صورت زیر ارائه کرد.

برای هر جفت از ماتریس های $A, B \in \mathbb{M}_n$ ، یک ماتریس یکانی $U \in \mathbb{M}_n$ وابسته به A و B وجود دارد به طوری که

$$U^*|AB^*|U \leq \frac{|A|^p}{p} + \frac{|B|^q}{q} .$$

در نتیجه

$$s_j(AB) \leq s_j(\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}).$$

به نظر می رسد این موضوع بسیاری از نویسند گان را تحریک کرده است که اثبات های گوناگون، گزاره های معادل، توسیع ها و تعمیم هایی در جهات مختلف بیابند. در رساله حاضر برخی از این توسیع ها را بررسی می

---

[۶] Fan dominance theorem

[۷] Ando

کنیم و بر روی دیگر موضوعات مربوطه بحث می نمائیم. برای این منظور مطالب در چهار فصل تنظیم شده اند.

در فصل اول پیشنیاز های مورد نیاز جهت فهم مفاهیم فصل های بعد آورده شده است.

در فصل دوم نسخه ماتریسی نامساوی حسابی -هندسی را با نرم تحت یکانی پایا از نظر می گذرانیم و سپس نسخه ماتریسی نامساوی را با نرم شعاع عددی بررسی می کنیم.

در فصل سوم ابتدا نسخه ماتریسی نامساوی یانگ را با نرم شعاع عددی و نرم عملگری بررسی می کنیم و با استفاده از آن یک اثبات جدید برای رد یک نسخه ماتریسی از نامساوی یانگ با نرم های یکانی پایا به دست می آوریم.

در فصل چهارم ابتدا با استفاده از نامساوی یانگ به جای نامساوی هندسی - حسابی تعدادی نامساوی عملگری مهم را تعمیم داده و سپس با استفاده از یک شکل بهبود یافته از نامساوی یانگ این نامساوی ها را بهبود می دهیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ ماتریس های معین مثبت و برخی خواص آن ها

در سراسر این رساله جبر تمام ماتریس های مختلط $n \times n$ را با $\mathbb{M}_n$ و جبر تمام عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت مختلط $\boldsymbol{H}$ را با $\mathcal{B}(\boldsymbol{H})$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$ در این صورت

(الف) عملگر A را نرمال گوییم، اگر $A^*A = AA^*$.

(ب) عملگر A را خودالحاق گوییم، اگر $A = A^*$.

(پ) عملگر A را یکانی گوییم، اگر $AA^* = A^*A = I$.

تعریف ۲.۱.۱. عملگر $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$ را نیم معین مثبت گویند، هرگاه برای هر بردار $x \in \boldsymbol{H}$، $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ و معین مثبت گویند هرگاه برای هر بردار ناصفر $x \in \boldsymbol{H}$ ، $\langle x, Ax\rangle > 0$.

ماتریس نیم معین مثبت $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$ معین مثبت است اگر و تنها اگر معکوس پذیر باشد. برای اختصار اصطلاح مثبت را برای نیم معین مثبت ($A \geq 0$) و مثبت اکید را برای معین مثبت ($A > 0$) به کار می بریم.

در زیر تعدادی از مهمترین قضایای مقدماتی مربوط به ماتریس های مثبت را بدون اثبات ذکر می کنیم.

برای دیدن جزئیات بیشتر به مرجع [۵] مراجعه کنید.

گزاره ۳.۱.۱. *اگر $A \in \mathbb{M}_n$، آن گاه عبارات زیر معادلند:*

(الف) A یک ماتریس مثبت (مثبت اکید) است؛

(ب) A خودالحاق است و همه ی مقادیر ویژه اش نامنفی (مثبت) می باشد؛

(پ) A خودالحاق است و همه ی کهاد های اصلی [۱] آن نامنفی (مثبت) اند؛

(ت) ماتریس (نامنفرد) $B \in \mathbb{M}_n$ هست به طوری که $A = B^*B$

(ث) ماتریس بالامثلثی (نامنفرد) $T \in \mathbb{M}_n$ هست که $A = T^*T$

لازم به ذکر است که T می تواند طوری انتخاب شود که عناصر قطر اصلی آن نامنفی باشند، همچنین اگر A مثبت اکید باشد، آن گاه T یکتا خواهد بود. این تجزیه ی A به تجزیه ی چولسکی [۲] معروف است.

(ج) ماتریس مثبت (مثبت اکید) $B \in \mathbb{M}_n$ هست که $A = B^2$ به طوری که B یکتامی باشد. می نویسیم $B = A^{1/2}$ و آن را جذر A می نامیم.

(ح) بردارهای (مستقل) x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n از $\mathbb{C}^n$ موجودند به طوری که:

$$a_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle \qquad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

a_{ij} درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A می باشد.

اگر $A \in \mathbb{M}_n$ خودالحاق باشد، آن گاه مقادیر ویژه آن را به صورت $\lambda_1(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A)$ مرتب می کنیم و اگر $A \in \mathbb{M}_n$ دلخواه باشد، آن گاه مقادیر تکین آن را که در واقع مقادیر ویژه ماتریس مثبت $|A| = (A^*A)^{1/2}$ می باشند به صورت $s_1(A) \geq \ldots \geq s_n(A)$ مرتب می کنیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$ عملگرهایی خودالحاق باشند گوییم $A \geq B$ هرگاه $A - B \geq 0$.

[۱] principal minors

[۲] Cholesky decomposition

قضیه یکنوایی ویل:[3] [۴] فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس هایی خودالحاق باشند به طوری که $A \geq B$. در این صورت

$$\lambda_j(A) \geq \lambda_j(B) \qquad (1 \leq j \leq n).$$

رابطه اخیر معادل است با اینکه بگوییم ماتریس یکانی U وجود دارد به طوری که $U\ A\ U^* \geq B$.

کار کردن با ماتریس های بلوکی اغلب مفید و جالب است. اگر A ، B ، C و D به ترتیب ماتریس های مختلط $p \times p$ ، $q \times q$ ، $p \times q$ ، $q \times p$ باشند، به طوری که $p + q = n$، آن گاه $\left[\begin{smallmatrix} A & C \\ D & B \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{M}_n$ و ماتریس بلوکی $\left[\begin{smallmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{smallmatrix}\right]$ اغلب با $A \oplus B$ نمایش داده می شود. قضیه زیر که مربوط به مثبت بودن ماتریس های بلوکی است به قضیه متممی شور [4] معروف است.

قضیه ۵.۱.۱. [۵] *فرض کنید $A \in \mathbb{M}_p$ و $B \in \mathbb{M}_q$ ماتریس هایی مثبت باشند. در این صورت اگر $A > 0$، آن گاه*

$$\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix} \geq 0 \Longleftrightarrow B - X^*A^{-1}X \geq 0$$

به همین صورت اگر $B > 0$، آن گاه

$$\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix} \geq 0 \Longleftrightarrow A - XB^{-1}X^* \geq 0.$$

تعریف ۶.۱.۱. [۵] اگر $A = \left[\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{M}_n$ یک ماتریس بلوکی باشد، آن گاه متمم شور [5] A_{11} را با $\tilde{A}_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ به همین صورت متمم شور A_{22} را با $\tilde{A}_{22} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ نمایش می دهیم.

[3] Weyl's monotonicity theorem

[4] Schur complement theorem

[5] Schur complement

نتیجه ۷.۱.۱. *اگر ماتریس بلوکی* $\circ \le A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$، *آن گاه برای* $i = 1, 2$،

$$A_{ii} > \circ \Longleftrightarrow \tilde{A}_{ii} \ge \circ.$$

تجزیه قطبی :[۶] فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n$ ، در این صورت تجزیه ی قطبی ماتریس A، عبارت است از $A = UP$ که P مثبت و U یکانی می باشد. $P = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ را قسمت مثبت A یا قدر مطلق A می نامیم و با نماد $|A|$ نمایش می دهیم.

تجزیه طیفی :[۷] اگر $A \in \mathbb{M}_n$ ماتریسی نرمال با مقادیر ویژه ی λ_1 ، . . . ، λ_n باشد، آن گاه ماتریس یکانی U وجود دارد به طوری که $A = U \ \Sigma \ U^*$، که در آن $\Sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

مخصوصاً اگر A مثبت باشد، آن گاه $\lambda_i \ge \circ$. اگر A خودالحاق باشد، λ_i ها حقیقی اند و اگر A یکانی باشد آن گاه $|\lambda_i| = 1$.

تجزیه مقدار تکین :[۸] اگر $A \in \mathbb{M}_n$ ماتریسی با مقادیر تکین $s_1(A)$ ، . . . ، $s_n(A)$ باشد، آن گاه ماتریس های یکانی U و V وجود دارند به طوری که $A = U \ \Sigma \ V^*$ که درآن $\Sigma = \mathrm{diag}(s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A))$.

۲.۱ برد عددی و شعاع عددی عملگرها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$. در این صورت برد عددی A را با $W(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\},$$

که در آن $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

در گزاره زیر تعدادی از خواص برد عددی ذکر شده است.

[۶] polar decomposition

[۷] spectral decomposition

[۸] singular value decomposition

گزاره ۲.۲.۱. [۱۰] *فرض کنید* $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$. *در این صورت*

(الف) $W(A)$ *مجموعه ای محدب است.*

(ب) $W(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta W(A)$ ، *برای هر* $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

(پ) $W(UAU^*) = W(A)$ ، *به ازای هر عملگر یکانی* U.

(ت) $W(A^*) = (W(A))^*$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$. در این صورت نرم عملگری و شعاع عددی را به ترتیب به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|A\| = \sup_{x \neq ۰} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

و

$$\omega(A) = \sup_{x \neq ۰} \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^۲} = \sup \{|z| : z \in W(A)\}.$$

مثال ۴.۲.۱. اگر $A = \left[\begin{smallmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{smallmatrix}\right]$، آن گاه

$$W(A) = \{z : |z| \leq \frac{۱}{۲}\},\ \omega(A) = \frac{۱}{۲},\ \|A\| = ۱.$$

در گزاره زیر برای یادآوری، تعدادی از خواص شعاع عددی را که در [۱۰] ثابت شده اند، بدون اثبات بیان می کنیم.

گزاره ۵.۲.۱. *فرض کنید* $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$. *در این صورت*

(الف) $\omega(.)$ *روی* $\mathcal{B}(\boldsymbol{H})$ *یک نرم است،*

(ب) $\omega(.)$ *از خاصیت زیر ضربی* [۱] *برخوردار نیست،*

(پ) $\omega(UAU^*) = \omega(A)$ ، *به ازای هر عملگر یکانی* U

(ت) $\omega(A^k) \leq \omega(A)^k$ ، *برای هر* $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$، *(نامساوی توانی)* [۲]

[۱] submultiplicative

[۲] power inequality

(ث) $\omega(A) \leq \|A\| \leq 2\omega(A)$.

(ج) *اگر A نرمال باشد، آن گاه* $\omega(A) = \|A\|$.

(چ)*اگر* $A_i \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$ *برای* $i = 1, 2, \ldots, k$ *، آن گاه*

$$\omega(A_1 \oplus \ldots \oplus A_k) = \max_{1 \leq j \leq k} \omega(A_j).$$

مثال زیر نشان می دهد شعاع عددی از خاصیت زیر ضربی برخوردار نیست (نرم ماتریسی نیست) یعنی نامساوی $\omega(AB) \leq \omega(A)\omega(B)$ در حالت کلی برقرار نیست، حتی اگر $AB = BA$.

مثال ۶.۲.۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. در این صورت $\omega(A) < 1$ و $\omega(A^2) = \omega(A^3) = \frac{1}{2}$. بنابراین $\omega(A^3) > \omega(A)\omega(A^2)$.

در گزاره زیر خواص زیرضربی شعاع عددی بیان شده است.

گزاره ۷.۲.۱. [۱۰] *فرض کنید* $A, B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{H})$. *آن گاه*

(*الف*) $\omega(AB) \leq 4\omega(A)\omega(B)$.

(ب) *اگر* $AB = BA$ *، آن گاه* $\omega(AB) \leq 2\omega(A)\omega(B)$.

(پ) *اگر* $AB = BA$ *و* A *نرمال باشد، آن گاه* $\omega(AB) \leq \omega(A)\omega(B)$.

۳.۱ نرم های عملگری و ماتریسی

در این رساله علاوه بر نرم های شعاع عددی و نرم عملگری که در بخش قبل تعریف نمودیم به نرم های دیگری نیاز داریم که در زیر به طور اختصار به بررسی آن ها می پردازیم.

در فضای $\mathbb{M}_n$ در کنار ضرب معمولی ماتریس ها حاصلضرب مهم و جالب دیگری نیز موجود است که این فضا را به یک جبر جابجایی یکدار با عنصر واحد J تبدیل می کند(در اینجا J ماتریسی است که تمام درایه های

آن ۱ می باشند.) فرض کنید $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_n$. در این صورت ضرب درایه به درایه A و B را ضرب شور [۱] (هادامارد) نامیده و با $A \circ B \equiv [a_{ij}b_{ij}]$ نشان می دهیم.

گزاره ۱.۳.۱. [۵] *اگر* $A, B \geq ۰$*، آن‌گاه* $A \circ B \geq ۰$.

تعریف ۲.۳.۱. عملگر خطی S_A روی $\mathbb{M}_n$ را عملگر ضربی شور [۲] نامیده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$S_A(X) := A \circ X.$$

همچنین نرم S_A القاء شده توسط نرم عملگری و نرم شعاع عددی را به ترتیب به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|S_A\| = \sup_{X \neq ۰} \frac{\|S_A(X)\|}{\|X\|} = \sup_{X \neq ۰} \frac{\|A \circ X\|}{\|X\|}$$

و

$$\|S_A\|_\omega = \sup_{X \neq ۰} \frac{\omega(S_A(X))}{\omega(X)} = \sup_{X \neq ۰} \frac{\omega(A \circ X)}{\omega(X)}.$$

در سال ۱۹۹۱ آندو و اکابو [۳] در [۳]، قضیه مهم زیر را ثابت کردند.

قضیه ۳.۳.۱. [۳] *فرض کنید* $A \in \mathbb{M}_n$ *. در این صورت موارد زیر معادلند:*

(i) $\|S_A\|_\omega \leq ۱$.

(ii) *ماتریس* $۰ \leq R \in \mathbb{M}_n$ *وجود دارد به قسمی که*

$$\begin{bmatrix} R & A \\ A^* & R \end{bmatrix} \geq ۰ \quad , \qquad R \circ I \leq I.$$

[۱] Schur (Hadamard)

[۲] Schur multiplier operator

[۳] Okabo

در [۲۹] ذکر شده است که "هاگروپ " موفق در تعیین نرم $\|S_A\|$ تحت عنوان قضیه هاگروپ [۴] شد، در اینجا قسمت اصلی این قضیه مهم که در واقع به نوعی نتیجه ای از قضیه ۳.۳.۱ است به صورت زیر آورده شده است.

قضیه ۴.۳.۱. [۲۹] *فرض کنید* $A \in \mathbb{M}_n$. *در این صورت موارد زیر معادلند:*

(i) $\|S_A\| \leq 1$.

(ii) *ماتریس های* $0 \leq R_1, R_2 \in \mathbb{M}_n$ *وجود دارد به قسمی که*

$$\begin{bmatrix} R_1 & A \\ A^* & R_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \qquad R_1 \circ I \leq I, \quad R_2 \circ I \leq I.$$

قضیه ۵.۳.۱. [۳] *اگر* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n$ *یک ماتریس مثبت باشد، آن گاه* $\|S_A\|_\omega = \max a_{ii}$.

گزاره ۶.۳.۱. [۳] *اگر* $A \in \mathbb{M}_n$ *یک ماتریس خودالحاق باشد، آن گاه* $\|S_A\|_\omega = \|S_A\|$.

گزاره ۷.۳.۱. [۳] *اگر* $A \in \mathbb{M}_n$*، آن گاه* $\|S_A\| \leq \|S_A\|_\omega \leq 2\|S_A\|$.

در سال ۱۹۷۴ جانسون [۵] در [۲۰] نشان داد

$$\omega(A \circ B) \leq 2\omega(A)\omega(B) \qquad (A, B \in \mathbb{M}_n)$$

که معادل است با:

$$\|S_A\|_\omega \leq 2\omega(A) \qquad (A \in \mathbb{M}_n).$$

[۴] Haagerup theorem

[۵] Johnson