دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

مقادیر ویژه عملگرهای انتگرال معین مثبت روی بازه‌های بی‌کران

نگارش:

بیتا گودرزی‌فر

استاد راهنما: **دکتر حبیب امیری**

استاد مشاور: **دکتر سعید مقصودی**

تیر۱۳۸۸

إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

فرض می‌کنیم $k(x,y)$ هسته معین مثبت عملگر انتگرال K روی بازه بی‌کران I باشد. اگر k به کلاس A تعلق داشته باشد، عملگر انتگرال متناظر، فشرده و از کلاس تریس است. دو نتیجه در ارتباط با همواری k و نرخ کاهش $k(x,x)$ وقتی $|x| \to \infty$ با نرخ همگرایی مقادیر ویژه را ثابت می‌کنیم. ما عملگرهای انتگرال مثبت در $L^2(\mathbb{R})$ با هسته پیوسته $k(x,y)$ را مطالعه و بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر $k(x,x) \in L^1(\mathbb{R})$ باشد، عملگر K با هسته $k(x,y)$ فشرده و هیلبرت اشمیت است. به‌علاوه اگر $k(x,x) \to 0$ وقتی $|x| \to \infty$، هسته k با یک سری که همگرای مطلق و همگرای یکنواخت است، نمایش داده می‌شود که جملات آن از توابع ویژه عملگر K که پیوسته یکنواخت هستند، تشکیل شده است.

فهرست مندرجات

مقدمه

در این رساله به بررسی عملگرهای انتگرال مثبت روی بازه‌های بی‌کران می‌پردازیم. اگر عملگر انتگرال فشرده باشد دنباله مقادیر ویژه عبارت است از $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ که هر کدام متناهی بار تکرار می‌شوند و تنها نقطه حدی ممکن این دنباله صفر است [۱۰].

در فصل اول به معرفی عملگرهای فشرده، متناهی البعد، هیلبرت اشمیت و از کلاس تریس می‌پردازیم و روابط بین این عملگرها را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم چند مثال در ارتباط با عملگرهای انتگرال ذکر می‌شود. در فصل سوم به مطالعه و بررسی عملگرهای انتگرال مثبت در $L^2(R)$ با هسته پیوسته $k(x,y)$ می‌پردازیم و نشان می‌دهیم اگر $k(x,x) \in L^1(\mathbb{R})$ باشد، عملگر K با هسته $k(x,y)$، فشرده وهیلبرت اشمیت است. به‌علاوه اگر $k(x,x) \to 0$ وقتی $|x| \to \infty$ ، k با یک سری که همگرای مطلق و همگرای یکنواخت است، نمایش داده می‌شود که جملات آن از توابع ویژه‌ی عملگر K که پیوسته یکنواخت هستند، تشکیل شده است. همچنین نشان داده خواهد شد که عملگر K از کلاس تریس می‌باشد.

با تعویض کردن شرط اولیه $k(x,x) \in L^1(\mathbb{R})$ با شرط قوی تر $k^{\frac{1}{2}}(x,x) \in L^1(\mathbb{R})$ ، نتیجه می‌شود $k \in L^1(\mathbb{R}^2)$ وهمچنین سری نمایش K در L^1 همگراست. کران‌هایی برای نرم K بدست می‌آیند و قضیه مرسر[۱] به عنوان حالت خاص نتیجه می‌شود.

همچنین اگر عملگر K فشرده باشد، چون عملگرهای فشرده قطری شدنی هستند لذا هسته $k(x,y)$ عملگر فشرده K دارای نمایشی به صورت زیر است

$$k(x,y) = \sum_{n\geq o} \mu_n \phi_n(x)\overline{\phi_n(y)} \qquad (۱)$$

جاییکه $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(I)$ است که از بردارهای ویژه‌ی عملگر K تشکیل شده است.

[۱] Mercer

تساوی در بالا به مفهوم همگرایی در $L^{2}(I)$ می باشد. نتیجه کلاسیک مرسر خواص همگرایی سری (۱) را زمانیکه بازه I فشرده و هسته $k(x,y)$ پیوسته است، را تقویت می‌کند [۳]. در این حالت مرسر ثابت کرده است، توابع ویژه $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ پیوسته هستند و سری (۱) همگرای مطلق و همگرای یکنواخت است.

در فصل چهارم کلاس A، ریشه مرتبه دوم عملگر و کلاس عملگرهای از مرتبه متناهی را تعریف و بررسی می‌کنیم. اگر هسته‌ی معین مثبت $k(x,y)$ عملگر انتگرال K روی یک بازه‌ی بی‌کران I باشد و هسته k به کلاس A تعلق داشته باشد، عملگر انتگرال متناظر، فشرده و از کلاس تریس است.

سری (۱) تحت این شرایط که هسته $k(x,y)$ پیوسته باشد و $k(x,x) \in L^{1}(\mathbb{R})$ و $k(x,x) \to 0$ وقتی $|x| \to \infty$ همگرای مطلق و همگرای یکنواخت است. همچنین عملگر متناظر با هسته $k(x,y)$ از کلاس تریس است و

$$tr\ K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x,x)dx < \infty$$

لذا $lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$، بنابراین $\lambda_n = o(\frac{1}{n})$. رید[2] نشان داده است که اگر $k(x,y)$ هسته معین مثبت باشد و در $\mathbb{C}^{1}$ قرار داشته باشد آنگاه $\lambda_n = o(\frac{1}{n^{2}})$ [۶]. همچنین رید نشان داده است که اگر هسته k معین و مثبت باشد بعلاوه پیوسته باشد و در شرط لیپ شیتس [3] از مرتبه α ، $0 < \alpha \leq 1$ صدق کند آنگاه $\lambda_n = O(\frac{1}{n^{1+\alpha}})$ [۵].

به طور کلی مقادیر ویژه λ_n مربوط به عملگرهای انتگرالی که هسته های آنها $\mathbb{C}^{p}$–معین مثبت می‌باشند، در شرط $\lambda_n = o(\frac{1}{n^{1+p}})$ صدق می‌کند[۵]. در پایان در فصل پنجم همگرایی مقادیر ویژه در حالت لیپ شیتس و حالت مشتق پذیر را بررسی می‌کنیم.

بیتا گودرزی‌فر

تیرماه ۸۸

---

[2] Read

[3] Lipschitz

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

تعریف ۱.۱.۱ فرض می‌کنیم که τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد، به طوریکه

الف) هر نقطه X یک مجموعه بسته باشد.

ب) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشند.

در این شرایط می‌گوییم τ یک توپولوژی برداری بر X است و X یک فضای برداری توپولوژیک می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار نامیم، اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

الف) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

ج) $\|x\| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب نماید.

هر فضای برداری نرمدار یک فضای برداری توپولوژیک است که توپولوژی آن توسط نرم تولید می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱ هر فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که با متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش، یک فضای تام باشد.(هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.)

تعریف ۴.۱.۱ زیر مجموعه E از فضای متری X را کلاً کراندار گوییم اگر به ازای هر $\epsilon > ۰$، مجموعه E در اجتماع تعدادی متناهی گوی باز به شعاع ϵ قرار داشته باشد.

تعریف ۵.۱.۱ نگاشت خطی $u : X \to Y$ بین فضای های هیلبرت X و Y فشرده است اگر $u(S)$ به طور نسبی فشرده باشد (بستار $u(S)$ در Y فشرده باشد) که S گوی یکه بسته در X است. به طور معادل $u(S)$ کلاً کراندار است. در این حالت $u(S)$ کراندار و بنابراین u کراندار است.

نکته ۶.۱.۱ عملگر u فشرده است اگر وتنها اگر $u(S)$ کلاً کراندار باشد.

تعریف ۷.۱.۱ فضای متری X را تفکیک پذیر می‌نامند هرگاه شامل زیر مجموعه چگال شمارش پذیری باشد.

فضاهای هیلبرت مطرح شده در این پایان نامه همگی فضاهای هیلبرت تفکیک پذیر می‌باشند.

نکته ۸.۱.۱ توجه می‌کنیم که برد عملگر فشرده تفکیک پذیر است. این بلافاصله از این نتیجه می‌شود که هر فضای متری فشرده تفکیک پذیر است و بستار برد گوی یکه تحت عملگر فشرده، فشرده است.

تعریف ۹.۱.۱ اگر Y,X فضاهای هیلبرت باشند فضای برداری تمام نگاشت های خطی کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم و وقتی $X = Y$، می‌نویسیم $B(X)$. $B(X,Y)$ فضای هیلبرت است که نرم آن به صورت زیر می‌باشد

$$||T|| = sup\{||T(x)|| \quad : \quad ||x|| \leq ۱\}$$

تعریف ۱۰.۱.۱ مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده از X به Y را با $K(X,Y)$ نشان می‌دهیم و عملگرهای فشرده روی X را با $K(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض می‌کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند $u \in B(X,Y)$. شرایط زیر معادلند:

الف) u فشرده است.

ب) برای هر مجموعه کراندار S در X مجموعه $u(S)$ به طور نسبی در Y فشرده است.

ج) برای هر دنباله‌ی کراندار (x_n) در X دنباله‌ی $(u(x_n))$ یک زیر دنباله‌ی همگرا در Y دارد.

اثبات : از قضیه فوق به راحتی بدست می آوریم که $K(X,Y)$ یک زیر فضای برداری از $B(X,Y)$ می‌باشد. اول نشان می‌دهیم که $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$. فرض می‌کنیم که $T \in K(X,Y)$ باشد، طبق تعریف نرم عملگر داریم:

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| \quad : \quad \|x\| \leq 1\} = sup\|T(\overline{S})\| \leq sup\|\overline{T(\overline{S})}\| < \infty$$

که $\overline{S} = \{x \ \ | \ \ \|x\| \leq 1\}$، از طرفی چون T فشرده است، لذا $\overline{T(\overline{S})}$ فشرده است، بنابراین T کراندار است پس $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$. حال ثابت می‌کنیم که $K(X,Y)$ زیر فضای $B(X,Y)$ است.

فرض می‌کنیم k_1 ، $k_2 \in K(X,Y)$ و S کراندار دلخواه باشد، داریم

$$(k_1 + k_2)(S) = \{(k_1 + k_2)(s) \ \ | \ \ s \in S\}$$

$$k_1(S) + k_2(S) = \{k_1(t) + k_2(s) \ \ | \ \ t, s \in S\}$$

چون

$$\overline{(k_1 + k_2)(S)} \subseteq \overline{k_1(S) + k_2(S)} \subseteq \overline{k_1(S)} + \overline{k_2(S)}$$

چون k_1 ، $k_2 \in K(X,Y)$، بنابراین $\overline{(k_1 + k_2)(S)}$ زیر مجموعه بسته‌ای از مجموعه فشرده $\overline{k_1(S)} + \overline{k_2(S)}$ است، لذا $k_1 + k_2 \in K(X,Y)$. از طرفی $\overline{(\alpha k)(S)} = \alpha\overline{k(S)}$، چون $\overline{k(S)}$ فشرده است، بنابراین $\alpha k \in K(X,Y)$.

برای اثبات الف $\leftarrow$ ب، فرض می‌کنیم عملگر u فشرده باشد و $S^{'}$ مجموعه کراندار دلخواه در X باشد، پس $M > ۰$ی هست که برای هر $s^{'} \in S^{'}$

$$\|s^{'}\| \leq M \quad \rightarrow \quad \frac{\|s^{'}\|}{M} \leq ۱ \quad \rightarrow \quad \|\frac{s^{'}}{M}\| \leq ۱$$

لذا

$$\frac{S^{'}}{M} \subseteq \overline{S} \quad \rightarrow \quad \overline{u(\frac{S^{'}}{M})} \subseteq \overline{u(\overline{S})}$$

چون u فشرده است و $\overline{u(\frac{S^{'}}{M})}$ بسته، لذا $\frac{۱}{M}\overline{u(S^{'})}$ فشرده است. بنابراین $\overline{u(S^{'})}$ فشرده است.

ب $\leftarrow$ ج: چون (x_n) دنباله‌ی کراندار در X است، لذا طبق قسمت (ب)، $\{u(x_n) : \ n = ۱, ۲, ...\}$ به طور نسبی در Y فشرده است، بنابراین $\overline{\{u(x_n) : \ n = ۱, ۲, ...\}}$ فشرده است. طبق قضیه وایرشتراس هر دنباله کراندار در مجموعه فشرده دارای زیر دنباله همگراست.

ج $\leftarrow$ الف، به راحتی با برهان خلف ثابت می‌شود. $\square$

همچنین اگر $w : Y \rightarrow Y^{'}$ و $u : X \rightarrow Y$ و $v : X^{'} \rightarrow X$ نگاشت های خطی کراندار میان فضای های هیلبرت X و Y و $X^{'}$ و $Y^{'}$ باشند و u فشرده باشد آنگاه uv و wu فشرده هستند. بنابراین $K(X) = K(X, X)$ یک ایدآل در $B(X)$ است.

$$u(S) \subseteq \overline{u(S)} \quad \rightarrow \quad w(u(S)) \subseteq w(\overline{u(S)})$$

از طرفین بستار می‌گیریم

$$\overline{w(u(S))} \subseteq w(\overline{u(S)})$$

چون هر تابع پیوسته، مجموعه فشرده را به فشرده می‌برد، لذا $w(\overline{u(S)})$ فشرده است. از طرفی زیر مجموعه بسته از مجموعه فشرده، فشرده است، بنابراین $\overline{wu(s)}$ فشرده است. لذا wu فشرده است. به همین ترتیب برای uv ثابت می‌شود.

قضیه ۱۲.۱.۱ اگر X یک فضای هیلبرت باشد آنگاه $K(X) = B(X)$ اگر وفقط اگر X با بعد متناهی باشد.

اثبات : اگر S گوی یکه بسته در X باشد، از آنجا که $K(X)$ ایدآلی در $B(X)$ است لذا $K(X) = B(X)$ اگر و تنها اگر عملگر همانی id_X فشرده باشد و این برقرار است اگر و تنها اگر S فشرده باشد که این با متناهی البعد بودن X معادل است.

تنها هم‌ارزی آخر را ثابت می‌کنیم زیرا سایر هم‌ارزی ها بوضوح برقرار است.

اگر X یک فضای نرمدار با بعد متناهی باشد، همانریخت با $\mathbb{R}^n$ است و چون S بسته و کراندار است، طبق قضیه هاینه بورل، فشرده است.

فرض می‌کنیم S فشرده باشد و فرض می‌کنیم که X با بعد متناهی نباشد و دارای یک زیر مجموعه نامتناهی و مستقل خطی $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ باشد که $\|e_n\| = ۱$. چون S گوی یکه بسته در X است، لذا $\{e_n\} \subseteq S$. هر دنباله کراندار درمجموعه فشرده دارای زیر دنباله همگراست. اما طبق قضیه فیثاغورث $\|e_n - e_m\|^۲ = \|e_n\|^۲ + \|e_m\|^۲ = ۲$، این یک تناقض است زیرا چنین دنباله‌ای نمی‌تواند زیر دنباله همگرا داشته باشد. □

قضیه ۱۳.۱.۱ اگر X و Y فضاهای هیلبرت باشند آنگاه $K(X,Y)$ زیر فضای برداری بسته $B(X,Y)$ است [۱۰].

نکته ۱۴.۱.۱ نگاشت خطی $u : X \to Y$ با بعد متناهی نامیده می‌شود هرگاه $u(X)$ با بعد متناهی باشد و تعریف می کنیم $rank(u) = dim(u(X))$. اگر Y, X فضاهای باناخ باشند و $u \in B(X,Y)$ با بعد متناهی باشد، آنگاه $u \in K(X,Y)$. زیرا اگر عملگر u با بعد متناهی باشد چون $dim\ u(X)$ متناهی است، لذا $u(X) \cong \mathbb{R}^n$، از طرفی $\overline{u(S)}$ بسته و کراندار است و

$$\overline{u(S)} \subset u(X) \cong \mathbb{R}^n$$

اما هر مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}^n$ فشرده است، بنابراین $\overline{u(S)}$ فشرده است، لذا عملگر u فشرده است.

تعریف ۱۵.۱.۱ مجموعه‌ی تمام عملگرهای با بعد متناهی روی X را با $F(X)$ نشان می‌دهیم.

از نکته ۱۴.۱.۱ و قضیه ۱۳.۱.۱ فوق بدست می‌آید که حد عملگرهای با بعد متناهی عملگری فشرده است. زیرا اگر فرض کنیم (u_α) یک دنباله از عملگرهای با بعد متناهی باشد که $u_\alpha \to u$، و اما هر عملگر با بعد متناهی فشرده است لذا (u_α) دنباله‌ای از عملگرهای فشرده است که $u_\alpha \to u$. چون $K(H)$ یک زیر فضای بسته از $B(H)$ است، بنابراین u فشرده است. بنابراین قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۶.۱.۱ اگر X و Y فضاهای هیلبرت باشند آنگاه

الف) $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$.

ب) $K(X,Y)$ یک فضای خطی است و اگر $\{T_n\} \subseteq K(X,Y)$ و $T \in B(X,Y)$ باشد، به طوریکه $\|T_n - T\| \to 0$ آنگاه $T \in K(X)$.

ج) اگر $A,\ B \in B(X)$ و $T \in K(X)$ آنگاه $BT,\ TA \in K(X,X)$.

نتیجه ۱۷.۱.۱ اگر X فضای هیلبرت باشد آنگاه $K(X)$ یک اید آل در $B(X)$ است و چون $F(X) \subset K(X)$، بنابراین $F(X)$ نیز یک اید آل در $B(X)$ است.

قضیه ۱۸.۱.۱ اگر X فضای هیلبرت باشد و $T \in B(X,X)$ آنگاه شرایط زیر معادلند:

الف) T فشرده است.

ب) T^* فشرده است.

ج) دنباله $\{T_n\}$ از عملگر های با بعد متناهی وجود دارد به طوریکه $\|T_n - T\| \to 0$.

اثبات : ج) ← الف): فرض می‌کنیم $\{T_n\}$ یک دنباله از عملگر های با بعد متناهی باشد به طوریکه $\|T_n - T\| \to 0$ چون $F(X,X) \subseteq K(X,X)$ لذا $\{T_n\}$ یک دنباله از عملگر های فشرده است و چون $K(X,X)$ زیر فضای بسته $B(X,X)$ است، لذا حد دنباله $\{T_n\}$ نیز فشرده است.

الف) ← ج): از آنجاییکه T فشرده است لذا $\overline{T(S)}$ فشرده است و چون هر فضای متری فشرده تفکیک پذیر است لذا $\overline{T(S)}$ تفکیک پذیر است. اما برد هر عملگر فشرده نیز تفکیک پذیر است، بنابراین $E = \overline{R(T)}$ زیر فضای تفکیک پذیر X است. فرض می‌کنیم $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$ پایه‌ای برای E باشد و فرض می‌کنیم P_n تصاویر متعامد X روی فضای خطی تولید شده توسط روی $\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$ باشد. قرار می‌دهیم $T_n = P_n T$ توجه می‌کنیم که T_n با بعد متناهی هستند. نشان می‌دهیم که $\|T_n - T\| \to 0$. اگر $k = Th \in E$، پس $k = \sum_{i=1}^{\infty} \langle k, e_i \rangle e_i$ و لذا $\|k\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle k, e_i \rangle|^2$. چون P_n تصاویر متعامد X روی فضای خطی تولید شده توسط $\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$ می‌باشد، لذا $T_n h = P_n k$ به فرم $P_n k = \sum_{i=1}^{n} \langle k, e_i \rangle e_i$ است، بنابراین

$$\|T_n h - Th\|^2 = \|P_n k - k\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle k, e_i \rangle|^2$$

بنابراین

$$\|P_n k - k\|^2 \to 0$$

لذا $\|P_n Th - Th\| \to 0$. از آنجاییکه T فشرده است، فرض می‌کنیم $\epsilon > 0$ باشد لذا بردارهای $h_1, h_2, h_3, ..., h_n \in S$ وجود دارند به طوریکه $T(S) \subseteq \cup_{j=1}^{n} B(Th_j, \frac{\epsilon}{3})$. بنابراین اگر $\|h\| \leq 1$ آنگاه یک h_j وجود دارد به طوریکه $\|Th - Th_j\| < \frac{\epsilon}{3}$. بنابراین برای هر عدد صحیح n،

$$\|Th - T_n h\| \leq \|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| + \|P_n(Th_j - Th)\|$$

$$\leq 2\|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\|$$

$$\leq 2\frac{\epsilon}{3} + \|Th_j - T_n h_j\|$$

با استفاده از ادعای فوق می‌توانیم عدد صحیح n_0 را می‌توان طوری پیدا کنیم که برای هر $n \geq n_0$ و برای هر $1 \leq j \leq n$، $\|Th_j - T_n h_j\| < \frac{\epsilon}{3}$، بنابراین $\|Th - T_n h\| \leq \epsilon$ به طور یکنواخت برای هر $h \in S$. لذا $\|T - T_n\| < \epsilon$ برای $n \geq n_0$.

ج) ← ب): فرض می‌کنیم $\{T_n\}$ یک دنباله از عملگر های با بعد متناهی باشد به طوریکه $\|T - T_n\| \to 0$. از آنجا که $\|T_n^* - T^*\| = \|T - T_n\| \to 0$ و $F(X, X)$ ایدآل خودالحاق است، لذا $T_n^* \in F(X, X)$ و چون قسمت

(ج)، (الف) را نتیجه می‌دهد لذا T^* فشرده است.

چون $(T^*)^* = T$ لذا قسمت (الف) و (ب) معادل هستند. □

نتیجه ۱۹.۱.۱ اگر H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $F(X)$ چگال در $K(X)$ است. به عبارت دیگر $\overline{F(X)} = K(X)$.

نتیجه ۲۰.۱.۱ اگر $T \in K(X,X)$ پس $\overline{R(T)}$ تفکیک پذیر است و اگر $\{e_n\}$ یک پایه برای $\overline{R(T)}$ و P_n عملگر تصویر X روی فضای خطی تولید شده توسط $\{e_j : 1 \le j \le n\}$ باشد، آنگاه $\|P_nT - T\| \to 0$.

تعریف ۲۱.۱.۱ اگر $A \in B(X)$، اسکالر λ یک مقدار ویژه A است اگر $ker(A-\lambda) \neq 0$، که در آن $ker(A-\lambda)$ فضای پوچ عملگر A است. اگر h یک بردار غیر صفر در $ker(A-\lambda)$ باشد، h را یک بردار ویژه برای λ می‌نامیم و در واقع $Ah = \lambda h$. مجموعه تمام مقادیر ویژه A را با $\sigma(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱ اگر $u : X \to Y$ نگاشت خطی کراندار میان فضاهای هیلبرت X و Y باشد، دوگان u را توسط $u^* \in B(Y^*, X^*)$ به صورت $u^*(\tau) = \tau o u$ تعریف می کنیم.

قضیه ۲۳.۱.۱ فرض می‌کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند و فرض می‌کنیم $u \in K(X,Y)$ آنگاه $u^* \in K(Y^*, X^*)$. [۱۰]

نگاشت خطی پیوسته $u : X \to Y$ بین فضای هیلبرت X و Y از پایین کراندار است اگر عدد مثبت δ وجود داشته باشد به طوریکه $\|u(x)\| \geq \delta\|x\| (x \in X)$. توجه کنید که در این حالت $u(X)$ لزوماً بسته است. اگر $(u(x_n))$ دنباله کشی در $u(X)$ باشد آنگاه (x_n) دنباله کشی در X است. بنابراین همگرا به عنصری مانند $x \in X$ می‌شود زیرا X تام است و بنابراین $u(X)$ تام است.

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض می‌کنیم M زیر فضای بسته‌ای از فضای برداری توپولوژیک X باشد، هرگاه زیر فضای بسته‌ای مانند N از X موجود باشد به‌طوریکه $X = M + N$ و $M \cap N = \{0\}$. اگر $dim\ M < \infty$ باشد، N را همبعد M در X می‌نامیم و می‌نویسیم $X = M \oplus N$.

قضیه ۲۵.۱.۱ فرض می‌کنیم u عملگر فشرده روی فضای هیلبرت X باشد و فرض می‌کنیم $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

الف) هسته $u - \lambda$ با بعد متناهی است.

ب) فضای $(u - \lambda)(X)$ دارای هم بعد متناهی در Xاست.

اثبات : فرض می‌کنیم $Z = ker(u - \lambda)$، آنگاه $u(Z) \subseteq Z$. زیرا

$$Z = ker(u - \lambda) = \{x : \ \ (u - \lambda)x = 0\} = \{x : \ \ u(x) = \lambda(x)\}$$

پس $ker(u - \lambda)$ فضای برداری ویژه متناظر با مقدار ویژه λ است. اگر فرض کنیم $x \in Z = ker(u - \lambda)$، پس $u(x) = \lambda(x)$، لذا $u\left(u(x)\right) = u(\lambda(x)) = \lambda u(x)$ بنابراین $u(x) \in Z$، در نتیجه $u(Z) \subseteq Z$. اگر $u_Z : Z \to Z$ تحدید u روی Z باشد و S گوی یکه بسته Z باشد. چون عملگر u فشرده است و $\overline{u_Z(S)} \subset \overline{u(S)}$، لذا u_Z نیز فشرده است. از آنجاییکه $u_Z(x) = \lambda x = \lambda I_Z(x)$ و $\lambda \neq 0$، بنابراین $u_Z = \lambda I_Z$، چون u_Z فشرده است لذا I_Z فشرده است. بنابراین Z با بعد متناهی است.(I_Z عملگر همانی روی Z می‌باشد.) □

نکته ۲۶.۱.۱ بنا بر تعریف $\sigma(u)$، وقتی عملگر u وارون پذیر است، نتیجه می‌شود $0 \notin \sigma(u)$. زیرا اگر $0 \in \sigma(u)$ پس $u - 0 \times I = u$ وارون پذیر نیست که این با فرض تناقض است.

قضیه ۲۷.۱.۱ فرض کنید u عملگر فشرده روی فضای باناخ X باشد، آنگاه $\sigma(u)$ شمارش پذیر است و هر نقطه غیر صفر $\sigma(u)$ یک مقدار ویژه برای u و یک نقطه ایزوله برای $\sigma(u)$ است و صفر تنها نقطه حدی ممکن برای $\sigma(u)$ است [۱۰].

قضیه ۲۸.۱.۱ فرض می‌کنیم u عملگر فشرده روی فضای هیلبرت H باشد، آنگاه u^* فشرده است.

اثبات : فرض می‌کنیم u تجزیه قطبی به فرم $u = w|u|$ داشته باشد، آنگاه $|u| = w^*u$ و بنابراین $u^* = |u|w^*$.
چون u فشرده است و $K(H)$ یک ایدآل در $B(H)$ است، $|u| = w^*u$ نتیجه می‌دهد $|u| \in K(H)$ و همینطور $u^* = |u|w^*$ نتیجه می‌دهد $u^* \in K(H)$. □

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض می‌کنیم A یک جبر باناخ باشد، منظور از اینولوشن روی A تابع $* : A \to A$ است که

الف) $(a^*)^* = a$

ب) $(ab)^* = b^*a^*$

ج) $(a+b)^* = a^* + b^*$

د) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$

حال اگر A جبر باناخ اینولوشن داری باشد که $\|aa^*\| = \|a\|^۲$ برای هر $a \in A$، آنگاه A را یک C^*-جبر می‌نامیم.

نتیجه ۳۰.۱.۱ از آنجاییکه زیر فضاهای بسته خودالحاق در C^*-جبرها خود C^*-جبر می‌باشند، لذا $K(H)$ یک C^*-جبر از $B(H)$ می‌باشد.

قضیه ۳۱.۱.۱ اگر H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $F(H)$ فضای تولید شده توسط تصاویر تک بعدی است.

اثبات : فرض می‌کنیم $u \in F(H)$ و نشان می‌دهیم ترکیب خطی تصاویر تک بعدی است. حال قرار می‌دهیم $u = u^+ - u^-$ و فرض می‌کنیم u تجزیه قطبی به فرم $u = w|u|$ داشته باشد آنگاه $|u| = w^*u$ بنابراین $|u| \in F(H)$، از طرفی $u^+ = \frac{u+|u|}{۲}$ و $u^- = \frac{u-|u|}{۲}$ بنابراین u^+ و u^- متعلق به $F(H)$ هستند. فرض می‌کنیم $u \geq ۰$ و متعلق به $F(H)$ باشد. برد $u(H)$ با بعد متناهی است لذا یک فضای هیلبرت با پایه متعامد یکه $e_۱, e_۲, ..., e_n$ است. فرض می‌کنیم $p = \sum_{j=۱}^{n} e_j \otimes e_j$ که $x \otimes y : H \to H$ با ضابطه $(x \otimes y)(z) = \langle y, z\rangle x$ تعریف می‌شود. بنابراین p تصویر H به‌توی $u(H)$ است، زیرا

$$pu(h) = \sum_{j=1}^{n} (e_j \otimes e_j) u(h)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle u(h), e_j \rangle e_j$$

$$= u(h)$$

پس $u = pu = u^{\frac{1}{2}} p u^{\frac{1}{2}}$ و $u = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes x_i$، جاییکه $x_j = u^{\frac{1}{2}}(e_j)$. حال $x_j = \lambda_j f_j$ برای یک بردار واحد f_j و اسکالر λ_j. بنابراین $u = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 f_j \otimes f_j$ و از آنجاییکه عملگرهای $f_j \otimes f_j$ تصاویر تک بعدی هستند، اثبات تمام است. $\square$

قضیه ۳۲.۱.۱ اگر H یک فضای هیلبرت باشد و I یک ایدآل ناصفر در $B(H)$ باشد، آنگاه I حاوی $F(H)$ است.

اثبات : اگر u عملگر ناصفری در I باشد، آنگاه برای یک $x \in H$، $u(x) \neq 0$. اگر p تصویر تک بعدی باشد، آنگاه $p = y \otimes y$ برای یک بردار واحد $y \in H$. بوضوح $v \in B(H)$ وجود دارد به طوریکه $vu(x) = y$. بنابراین $p = uv(x \otimes x)u^* v^*$، لذا $p \in I$ وقتی $u \in I$، بنابراین I حاوی تمام تصاویر تک بعدی است و بنابراین I حاوی $F(H)$ است. $\square$

نتیجه ۳۳.۱.۱ $F(H)$ کوچک ترین ایدآل ناصفر در $B(H)$ است.

نتیجه ۳۴.۱.۱ اگر I ایدآل ناصفر در $B(H)$ باشد، آنگاه $K(H) \subset \overline{I}$.

اثبات : چون $F(H)$ کوچک ترین ایدآل ناصفر $B(H)$ است لذا $F(H) \subset I$. از طرفی $K(H) = \overline{F(H)}$، بنابراین $K(H) \subset \overline{I}$. $\square$

نتیجه ۳۵.۱.۱ اگر I ایدآل ناصفر بسته در $B(H)$ باشد، آنگاه $K(H) \subseteq I$.

۲.۱ عملگرهای هیلبرت اشمیت و عملگرهای از کلاس تریس

تعریف ۱.۲.۱ فرض می‌کنیم u یک عملگر روی فضای هیلبرت H باشد و فرض می‌کنیم E پایه متعامد یکه برای H باشد. نرم هیلبرت اشمیت عملگر u را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|u\|_۲ = \left(\sum_{x\in E} \|u(x)\|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

این تعریف مستقل از انتخاب پایه است. زیرا اگر E' یک پایه متعامد دیگری برای H باشد، آنگاه برای هر مجموعه غیر تهی متناهی F از E داریم:

$$\sum_{x\in F} \|u(x)\|^۲ = \sum_{x\in F}\sum_{y\in E'} |\langle u(x), y\rangle|^۲$$

$$= \sum_{y\in E'}\sum_{x\in F} |\langle u(x), y\rangle|^۲ = \sum_{y\in E'}\sum_{x\in F} |\langle x, u^*(y)\rangle|^۲$$

$$\le \sum_{y\in E'}\sum_{x\in E} |\langle x, u^*(y)\langle|^۲ = \sum_{y\in E'} \|u^*(y)\|^۲$$

$$\sum_{x\in F} \|u(x)\|^۲ \le \sum_{y\in E'} \|u^*(y)\|^۲$$

چون F زیر مجموعه ناتهی متناهی از E است، بنابراین

$$\sum_{x\in E} \|u(x)\|^۲ \le \sum_{y\in E'} \|u^*(y)\|^۲$$

بنابراین با تقارن داریم:

$$\sum_{x\in E} \|u(x)\|^۲ = \sum_{x\in E} \|u^*(x)\|^۲ = \sum_{y\in E'} \|u(y)\|^۲$$

این نشان می‌دهد که $\|u\|_۲$ مستقل از انتخاب پایه است وهمچنین $\|u\|_۲ = \|u^*\|_۲$.

تعریف ۲.۲.۱ عملگر u هیلبرت اشمیت است اگر $\|u\|_۲ < +\infty$. مجموعه‌ی تمام عملگرهای هیلبرت اشمیت روی H را با $B_۲(H)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۲.۱ اگر E و F پایه های متعامد یکه برای H باشد، آنگاه برای هر عملگر کراندار u

$$\sum_{e\in E}\|u(e)\|^{۲}=\sum_{f\in F}\|u^{*}(f)\|^{۲}=\sum_{e\in E}\sum_{f\in F}|\langle u(e),f\rangle|^{۲}$$

نتیجه ۴.۲.۱ $\sum_{E}\langle |u|e,e\rangle$ مستقل از انتخاب پایه است.

اثبات : اگر E و F پایه های متعامد یکه برای H باشد، ثابت می‌کنیم که $\sum_{E}\langle |u|e,e\rangle=\sum_{F}\langle |u|e,e\rangle$.

$$\sum_{F}\langle |u|f,f\rangle=\sum_{F}\langle |u|^{\frac{۱}{۲}}f,|u|^{\frac{۱}{۲}}f\rangle=\sum_{F}\||u|^{\frac{۱}{۲}}f\|^{۲}=\sum_{E}\||u|^{\frac{۱}{۲}}e\|^{۲}$$

$$=\sum_{E}\langle |u|^{\frac{۱}{۲}}e,|u|^{\frac{۱}{۲}}e\rangle=\sum_{E}\langle |u|e,e\rangle$$

□

تعریف ۵.۲.۱ عملگر $T:H\to H$ قطری شدنی است اگر پایه متعامد یکه $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ موجود باشد به طوریکه

$$T(e_n)=\lambda_n e_n$$

و ماتریس عملگر T به صورت زیر است

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\lambda_{۱} & & & \text{O}\\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ \text{O} & & & \ddots\end{pmatrix}$$

که λ_nها مقادیر ویژه عملگر T هستند.

مثال ۶.۲.۱ فرض می‌کنیم u عملگری روی فضای هیلبرت تفکیک پذیر H باشد و $(e_n)_{n=۱}^{\infty}$ پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت H باشد. اگر u عملگر قطری با دنباله مقادیر ویژه (λ_n) باشد. آنگاه u عملگر هیلبرت اشمیت است اگر و تنها اگر $\sum_{n=۱}^{\infty}|\lambda_n|^{۲}<\infty$.