بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی و گرایش آنالیز

موضوع :

یکنوای دوری و تابع فیتزپاتریک برای عملگرهای یکنوا

استاد راهنما :

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور :

دکتر علی تقوی

نام دانشجو :

حشمت اله چوبین

شهریور ماه ۱۳۸۷

تقدیر و تشکر :

خدا را سپاس می گوییم که توفیق انجام این کار را نصیب این بنده ی حقیر کرد ، در پایان ضمن تشکر و سپاس از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر محسن علیمحمدی و استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر علی تقوی به جهت ارائه نظرات و راهنمایی های ارزنده ایشان در تدوین این کار و کلیه ی عزیزانی که در به انجام رساندن این مجموعه نهایت همکاری را داشته اند ، کمال تشکر و قدردانی را داشته و از خداوند متعال موفقیت آنان را خواهانم به عرض می رسانم که حداکثر سعی و تلاش را جهت رفع ایرادها و اشکالات این مجموعه نموده ام و هرگونه پیشنهادات نظراتی را که در جهت رفع نواقص موجود و ارائه اثری بهتری باشد را با دیده ی مثبت پذیرا می باشم.

حشمت اله چوبین

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به دخترم :

نرگس

چکیده

در این پایانامه عملگرهای یکنوای ماکسیمال و یکنوای n–دوری را تعریف کرده و نشان دادیم که هر عملگر یکنوای n–دوری، یکنوای $(n+۱)$–دوری نیست و همچنین عمتگر ۳–دوری ماکسیمال وجود دارد که یکنوای ماکسیمال نمی باشد. سپس تابعی به نام تابع فیتزپاتریک بر روی عملگر یکنوا که توسط سیمونز فیتزپاتریک معرفی شده مورد بررسی قرار داده و به اثبات خواص آن پرداختیم. و در نهایت ثابت کردیم برای هر عملگر یکنوای دوری ماکسیمال نقطه سوپریمم از دنباله از توابع فیتزپاتریک منسوب به پادمشق راکفلر می باشد.

واژه های کلیدی

عملگر یکنوا ، یکنوای دوری و تابع فیتزپاتریک

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

تعاریف و قراردادها

مقدمه

لم زرن تضمین می کند که هر عملگر یکنوای n-دوری یک توسیع می پذیرد و تعبیر بزرگ نمودن گراف آن به یک عملگر یکنوای n-دوری ماکسیمال[۸] ، نتیجه ی مشابه برای عملگرهای یکنوا دوری بر قرار است. عملگرهای یکنوا نقش اساسی در بهینه سازی ایفا می کنند. یکی از با ارزش ترین نتایج در تئوری عملگرهای یکنوا مربوط به نتایج راکفلر[۱] [۵]است که ثابت نمود عملگرهای دوری یکنوا ماکسیمال دقیقا عملگرهای زیر مشتق از توابع اند که محدب و نیم پیوسته پائین و سره اند. بنابراین هر عملگر یکنوای دوری ماکسیمال یک پاد مشتق دارد که در حد جمع با یک عدد ثابت یکتاست. در سال ۱۹۸۸فیتزپاتریک[۲] [۱] تابع فیتزپاتریک را از نگاشت یکنوا از X به X^* معرفی نموده و در سال ۲۰۰۲ بوشکه[۳] [۲] این تابع به طور مفصل مورد بررسی قرار داد تا اینکه در سال ۲۰۰۵ بارتز[۴] و همکارانش در [۳] نتایج مطلوبی در این ارتباط یافتند.

[۱] - Rockafellar
[۲] - Fitzpatrick
[۳] - Bauschke
[۴] - Bartz

تعاریف و قرادادها

در این رساله $\tilde{R}=R\bigcup\{\infty\}$ و X فضای باناخ حقیقی فرض شود.

تعریف ۱-۱: فرض کنید $f:X\longrightarrow\tilde{R}$، مجموعه های زیر به ترتیب اپی گراف و دامنه f نامند $epi\ \ f=\{(x,t)\in X\times R\ |f(x)\leq t\}$ و $dom\ f=\{x\in X\ \ |f(x)<\infty\}$.

تعریف ۱-۲: تابع f محدب نامندهر گاه

$$\forall x,y\in X\ \ ,\ \ \lambda\in[۰,۱]\qquad f(\lambda x+(۱-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(۱-\lambda)f(y).$$

تعریف ۱-۳:

الف) تابع f مقعر نامند هرگاه $-f$ محدب باشد.

ب) تابع f سره نامند هرگاه $domf\neq\phi$.

پ) مجموعه $C\subset X$ محدب نامند هرگاه

$$x,y\in C\Rightarrow\lambda x+(۱-\lambda)y\in C\qquad\forall\lambda\in[۰,۱]$$

ت) فرض کنید $x^*\in X^*-\{۰\}$ و $\alpha\in R$ آنگاه مجموعه $H_{x^*,\alpha}:=\{x\in X|\langle x,x^*\rangle=\alpha\}$ را ابرفضا نامند.

تعریف ۱-۴: (فضای هیلبرت)

مجموعه H با ضرب داخلی که بصورت ذیل معرفی می گردد تبدیل به فضای ضرب داخلی می شود. برای هر دو عنصر متعلق به H مانند x و y ضرب داخلی یعنی $\langle x, y\rangle$ نشان می دهند به طوری که خواص ذیل را دارد.

الف) $\forall x,y,z \in H \quad \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

ب) $\forall x, y \in H \;,\; \alpha \in R \quad \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

پ) $\forall x \in H \quad \langle x, x\rangle \geq ۰$

ت) $\forall x \in H \quad \langle x, x\rangle = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$

ث) $\forall x, y \in H \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

تعریف ۱-۵: فرض کنید $C \subset X$ تابع مشخصه C به صورت زیر تعریف می شود

$$\delta_C : X \longrightarrow R$$

$$\delta_C(x) = \begin{cases} ۰ & x \in C \\ \infty & x \notin C \end{cases}$$

گزاره ۱-۶: اگر f محدب باشد آنگاه $domf$ محدب است.

اثبات : باید نشان دهیم

$$x, y \in domf \Rightarrow \lambda x + (۱-\lambda)y \in domf , \forall \lambda \in [۰,۱]$$

یعنی

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) < \infty$$

چون f محدب است

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱-\lambda)f(y) < \infty$$

در نتیجه $domf$ محدب است.

گزاره ۱–۷: f محدب است اگر وتنها اگر $epif$ محدب باشد.

اثبات: $(\Rightarrow)$ فرض کنید $epif$ محدب باشد. درآن صورت

$$(a, f(a))\ ,\ (b, f(b)) \in epif \Rightarrow \lambda(a, f(a)) + (1-\lambda)(b, f(b)) \in epif \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\Rightarrow (\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) \in epif$$
$$\Rightarrow f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

در نتیجه f محدب است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید f محدب باشد. اما $epif$ محدب نباشد (فرض خلف) یعنی

$$(a, f(a))\ ,\ (b, f(b)) \in epif \ \wedge\ \lambda(a, f(a)) + (1-\lambda)(b, f(b)) \notin epif$$

$$\Rightarrow (\lambda a + (1-\lambda)b\ , \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \notin epif) \Rightarrow f(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

که با محدب بودن f در تناقض است.

گزاره ۱–۸: δ_C تابع محدب است اگر و تنها اگر C مجموعه محدب باشد.

اثبات: $(\Leftarrow)$ فرض کنید δ_C تابع محدب باشد. نشان می دهیم C مجموعه محدب است

$$\forall x, y \in C \qquad \delta_C(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda \delta_C(x) + (1-\lambda)\delta_C(y)$$

(فرض خلف) فرض کنید C مجموعه محدب نباشد. بنابراین

$$\exists x, y \in C\ \ ,\ \exists \lambda \in [0,1] \wedge \lambda x + (1-\lambda) y \notin C \Rightarrow \delta_C(\lambda x + (1-\lambda)y) = +\infty$$

اما داریم

$$x, y \in C \Rightarrow \delta_C(x) = \delta_C(y) = 0$$

یعنی

$$x, y \in C \Rightarrow \delta_C(x) = \delta_C(y) = 0 \Rightarrow +\infty \le 0$$

به تناقض می رسیم.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید C مجموعه محدب باشد نشان می دهیم δ_C تابع محدب است .

$$\forall x, y \in C \quad , \quad \forall \lambda \in [۰,۱] \Rightarrow \lambda x + (۱-\lambda) y \in C \Rightarrow \delta_C(\lambda x + (۱-\lambda) y) = ۰$$

و $\delta_C(x) = ۰ = \delta_C(y)$

در نتیجه رابطه ذیل برقرار است

$$\delta_C(\lambda x + (۱-\lambda) y) \leq \lambda \delta_C(x) + (۱-\lambda) \delta_C(y).$$

گزاره ۱-۹: مجموع دو تابع محدب، محدب است.

اثبات : فرض کنید f و g توابع محدب باشند نشان می دهیم $f+g$ محدب است یعنی

$$\forall x, y \in dom f \cap dom g \ , \ \lambda \in [۰,۱] \qquad (f+g)(\lambda x + (۱-\lambda) y) \leq \lambda (f+g)(x) + (۱-\lambda)(f+g)(y)$$

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x + (۱-\lambda) y) &= f(\lambda x + (۱-\lambda) y) + g(\lambda x + (۱-\lambda) y) \\ &\leq \lambda f(x) + (۱-\lambda) f(y) + \lambda g(x) + (۱-\lambda) g(y) \\ &= \lambda (f(x) + g(x)) + (۱-\lambda)(f(y) + g(y)) \\ &= \lambda (f+g)(x) + (۱-\lambda)(f+g)(y)\end{aligned}$$

تعریف ۱-۱۰: غلاف محدب مجموعه A در فضای برداری X، مجموعه تمام ترکیبات محدب متناهی از اعضای A است و با $co(A)$ نموده می شود.

نتیجه ۱-۱۱: در واقع

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=۱}^{n} t_i x_i \,\middle|\, x_i \in A, t_i \geq ۰, \sum_{i=۱}^{n} t_i = ۱, n \in N \right\}$$

غلاف محدب A، محدب است و اشتراک تمام مجموعه های محدبی است که شامل A می باشند.

اثبات: به [۱۹] مراجعه کنید.

بست غلاف محدب A را غلاف محدب بسته A گوئیم و با $\overline{co}(A)$ نشان می دهیم.

سه نتیجه ذیل در مرجع[۲] می باشندکه بدون اثبات ارائه شده اند.

گزاره۱-۱۲: اگر C زیر مجموعه محدبی از فضای خطی نرمدار X باشد آن گاه $\overline{C}$ نیز چنین است.

قضیه۱-۱۳: فرض کنید A,B زیر مجموعه های محدب از X باشد. و $\operatorname{int} A \neq \phi$ آنگاه A,B را توسط تابعک خطی پیوسته غیرصفر می توان جدا کرد اگر و تنها اگر $\operatorname{int}(A \cap B) = \phi$. یعنی $x^* \in X^* - \{0\}$ و $\alpha \in R$ وجود دارد به طوری که

$$\forall x \in A ,\, y \in B; \quad \langle x, x^* \rangle \leq \alpha \leq \langle y, x^* \rangle .$$

قضیه۱-۱۴: فرض کنید A زیر مجموعه محدب و بسته از X باشد و آنگاه تابعک $x^* \in X^*$ وجود داردکه A و x را از هم جدا می کند.

تعریف۱-۱۵ (مخروط قطبی): فرض کنید X فضای باناخ و $K \subseteq X$ آنگاه

$$K^\circ = \left\{ x^* \in X^* \middle| \langle x^*, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K \right\}$$

تعریف۱-۱۶: فرض کنید V_{x_0} مجموعه از همه همسایگیهای شامل $x_0 \in X$ باشد. تابع $f : X \to \tilde{R}$ نیم پیوسته پائین در x_0 نامند هر گاه $f(x_0) = \sup\limits_{V \in V_{X_0}} \inf\limits_{x \in V} f(x)$. که به طور اختصار $l.s.c$ می نویسیم.

گزاره۱-۱۷: (۱) اگر U در X بسته باشد آنگاه δ_U نیم پیوسته پائین است.

(۲) اگر f نیم پیوسته پائین باشد آنگاه λf نیم پیوسته پائین برای $\lambda \in [0,1]$ می باشد.

(۳) اگر Φ خانواده ای از توابع نیم پیوسته پائین و $f(x) = \sup\limits_{g \in \Phi} g(x)$ آنگاه f نیم پیوسته پائین است.

(۴) اگر f و g نیم پیوسته پائین باشند آنگاه $f + g$ نیم پیوسته پائین است.

اثبات: به [۲] مراجعه کنید.

تعریف۱–۱۸: فرض کنید $f : X \to \tilde{R}$ باشد. تابع $f^* : X^* \to \tilde{R}$ که $f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\left(\langle x^*, x\rangle - f(x)\right)$

تابع مزدوج f نامند و $f^{**} : X^{**} \to \tilde{R}$ که $f^{**}(x^{**}) = (f^*)^*(x^{**}) = \sup_{x^*\in X^*}\left(\langle x^{**}, x^*\rangle - f^*(x^*)\right)$ تابع مزدوج دوم f نامند.

مثال۱–۱۹: نامساوی $\forall (x^*, x) \in X \times X^*$ $\quad f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle$ مطابق ذیل برقرار است که به رابطه یانگ فنچل[۱] معروف است.

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\left(\langle x^*, x\rangle - f(x)\right) \geq \langle x^*, x\rangle - f(x) \Rightarrow f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle$$

گزاره۱–۲۰: روابط زیر برقرار است

(۱) $f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*}\left(\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\right) \leq f(x)$

(۲) اگر $f < g$ آنگاه $f^* < g^*$.

اثبات (۱) :

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*}\left(\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\right) = \sup_{x^*\in X^*}\left(\langle x^*, x\rangle - \sup_{x\in X}\left(\langle x^*, x\rangle - f(x)\right)\right)$$
$$\leq \sup_{x^*\in X^*}\left(\langle x^*, x\rangle - \langle x^*, x\rangle + f(x)\right) = f(x)$$

اثبات (۲):

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\left(\langle x^*, x\rangle - f(x)\right) \geq \sup_{x\in X}\left(\langle x^*, x\rangle - g(x)\right) = g^*(x^*) \Rightarrow f^* \geq g^*$$

[۱] - Young Fenchel

گزاره۱-۲۱: اگر f سره و محدب و نیم پیوسته پائین باشد آنگاه f^* نیز سره و محدب و نیم پیوسته پائین است.

اثبات: نشان می دهیم f^* سره است. از فرض روی f نقطه $(y,f(y)-\varepsilon)\in X\times R$ و $\varepsilon>0$ وجود دارد که به مجموعه $epif$ محدب بسته تعلق نداشته باشد. در این صورت ابر فضا نقطه و مجموعه $epif$ را به طور اکید جدا می کنند. بنابراین $y^*\in X^*$ هست به طوری که

$$\left\langle y^*, y+x\right\rangle+(f(y)-\varepsilon)<f(y+x) \qquad \forall x\in X$$

در نتیجه

$$\left\langle y^*, y+x\right\rangle-f(x+y)<-f(y)+\varepsilon \qquad \forall x\in X$$

در نامساوی بالا از اثر سوپریمم روی $x\in X$ داریم

$$f^*(y^*)\le -f(y)+\varepsilon$$

چون f نیم پیوسته پائینی است و $f^*(x^*)=\sup\limits_{x\in X}\left(\left\langle x^*\right\rangle-f(x)\right)$ پس f^* از تفاضل دو نیم پیوسته پائینی تشکیل شده در نتیجه نیم پیوسته پائینی می باشد.

$$\begin{aligned} f^*\left(\lambda x^*+(1-\lambda)y^*\right) &= \sup_{y\in domf}\left(\left\langle \lambda x^*+(1-\lambda)y^*, y\right\rangle-f(y)\right) \\ &\le \sup_{y\in domf}\left(\lambda\left\langle x^*, y\right\rangle-\lambda f(y)\right)+\sup_{y\in domf}\left((1-\lambda)\left\langle y^*, y\right\rangle-(1-\lambda)f(y)\right) \\ &= \lambda f^*(x^*)+(1-\lambda)f^*(y^*) \end{aligned}$$

یعنی f^* محدب است.

گزاره ۱-۲۲: فرض کنید $f:X\to\tilde{R}$ سره باشد در آن صورت $f^{**}=f$ اگروتنها اگر محدب و نیم پیوسته پائین باشد

اثبات: به [۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۲۳: فرض کنید $f \ , \ g : X \to \tilde{R}$ در آن صورت کوچکترین تلفیق از f و g بصورت $f \,\Box\, g : X \to [-\infty, +\infty]$ که $(f \,\Box\, g)(x) = \inf\limits_{z \in X}\big(f(x-z) + g(z)\big)$ تعریف می شود.

قضیه ۱-۲۴: فرض کنید $f, g : X \to \tilde{R}$ سره و محدب باشند اگر g در نقطه ای که f در آن تعریف شده است پیوسته باشد. آنگاه

$$\inf_{x \in X}\big(f(x) + g(x)\big) = \max_{x^* \in X^*}\big(-f^*(x^*) - g^*(x^*)\big)$$

اثبات: به [۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۲۵: یک قطعه از X به صورت ذیل تعریف می گردد

$$]x, y] = \{(۱-\lambda)x + \lambda y \mid ۰ < \lambda \le ۱ \} \quad , \quad \forall x, y \in X$$

تعریف ۱-۲۶: $f : X \to \tilde{R}$ زیر دیفرانسیل پذیر در نقطه $x \in X$ است هر گاه $x^* \in X^*$ وجود داشته باشد به طوری که $f(y) - f(x) \ge \langle x^*, y - x \rangle$.

مجموعه همه عناصر $x^* \in X^*$ که در نامساوی بالا صدق کنند را به صورت $\partial f(x)$ نمایش داده و نگاشت $\partial f(.) : X \to ۲^{X^*}$ را زیر دیفرانسیل از f نامند.

$$\partial f = \{(x^*, x) \in X \times X^*; f(y) - f(x) \ge \langle x^*, y - x \rangle \forall y \in X\}.$$

چون به ازای هر $y \in X$ است پس باید به ازای $z = x + y$ هم چنین است در نتیجه

$$\begin{aligned}\partial f &= \{(x^*, x) \in X \times X^*; f(z) - f(x) \ge \langle x^*, z - x \rangle \quad \forall z \in X\} \\ &= \{(x^*, x) \in X \times X^*; f(x+y) - f(x) \ge \langle x^*, x + y - x \rangle \quad \forall y \in X\} \\ &= \{(x^*, x) \in X \times X^*; f(x+y) - f(x) \ge \langle x^*, y \rangle \quad \forall y \in X\}\end{aligned}$$

همچنین می توان $\partial f(x)$ به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\partial f(x) &= \{x^* \in X^*; f(y) - f(x) \ge \langle x^*, y - x \rangle \quad \forall y \in X\} \\ &= \left\{x^* \in X^*; ۰ \ge f(x) + \sup_{y \in X}\big(\langle x^*, y \rangle - f(y)\big) - \langle x^*, x \rangle\right\}\end{aligned}$$

$$= \left\{x^* \in X^*; 0 \geq f(x) + f^*(x^*) - \langle x^*, x\rangle\right\} = \left\{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle - f^*(x^*) \geq f(x)\right\}$$

قضیه۱-۲۷: فرض کنید f محدب و نیم پیوسته پائین باشد و $\bar{x} \in domf$ آن گاه f نیم پیوسته پائین در $\bar{x}$ است اگر و تنها اگر $\partial f(\bar{x}) \neq \phi$.

اثبات: $(\Leftarrow)$ اگر f نیم پیوسته پائین باشد بنابر گزاره ۱-۲۲، $f = f^{**}$.

$$f(\bar{x}) = f^{**}(\bar{x}) = \sup_{x^* \in X^*}\left\{\langle \bar{x}, x^*\rangle - f^*(x^*)\right\} > f(\bar{x}) - \varepsilon$$

$$\exists x^* \in X^*; \quad \langle \bar{x} - x^*\rangle - f^*(x^*) > f(\bar{x}) - \varepsilon \Rightarrow_{\varepsilon \to 0^+} \langle \bar{x} - x^*\rangle - f^*(x^*) > f(\bar{x})$$

$$\Rightarrow x^* \in \partial f(\bar{x})$$

$(\Rightarrow)$ فرض کنید $\partial f(\bar{x}) \neq \phi$ پس

$$\exists x^* \in X^*; \quad f(\bar{x}) \leq \langle \bar{x} - x^*\rangle - f^*(x^*) \leq f^{**}(\bar{x})$$

از طرفی $f^{**}(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$ در نتیجه $f^{**}(\bar{x}) = f(\bar{x})$ بنابر گزاره ۲۲-۱ f نیم پیوسته پائین است.

قضیه۱-۲۸: اگر f نیم پیوسته پائین و محدب باشد آن گاه $\bar{x} \in domf$ نقطه مینیمم برای f است اگر و تنها اگر $0 \in \partial f(\bar{x})$.

اثبات : $\bar{x} \in domf$ نقطه مینیمم است اگروتنها اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(\bar{x}) \leq f(x)$ و $0 \leq f(x) - f(\bar{x})$ در نتیجه $0 \in \partial f(\bar{x})$.

گزاره۱-۲۹: اگر f و g توابع محدب روی X و f در $z \in domf \cap domg$ پیوسته باشند آنگاه $\partial(f+g) = \partial f + \partial g$.

اثبات: از تعریف ۱-۲۵نتیجه می شود

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subseteq \partial(f+g)(x), \quad \forall x \in X$$

حال به اثبات $\partial(f+g)(x)\subseteq\partial f(x)+\partial g(x)$ می پردازیم، $x^*\in\partial(f+g)(x)$ در نظر می گیریم در آن صورت $x^*=u^*+v^*$ که $u^*\in\partial f(x)$ و $v^*\in\partial g(x)$.

فرض کنید $x\in domf\bigcap domg$ تابع های زیر را روی X تعریف می کنیم .

$$\varphi(y)=f(y)-f(x)-\langle x^*,y-x\rangle \quad \text{و} \quad \psi(y)=g(x)-g(y)$$

چون $x^*\in\partial(f+g)(x)$ پس

$$(f+g)(y)-(f+g)(x)\geq\langle x^*,y-x\rangle$$

$$f(y)-f(x)-\langle x^*,y-x\rangle\geq g(x)-g(y) \qquad \forall y\in X$$

$$\Rightarrow\varphi(y)\geq\psi(y)$$

$\Phi=epi\varphi$ و مجموعه همه نقاط زیر گراف ψ را Ψ نشان می دهیم . φ محدب و ψ مقعر می باشد

چون f محدب است پس φ محدب می شود.

ψ مقعر است باید نشان دهیم که $-\psi$ محدب است

$$-\psi(\lambda u+(1-\lambda)v)=-g(x)+g(\lambda u+(1-\lambda)v)$$

$$\leq-g(x)+\lambda g(u)+(1-\lambda)g(v)=-\lambda g(x)-(1-\lambda)g(x)+\lambda g(u)+(1-\lambda)g(u)$$

$$=\lambda(-g(x)+g(u))+(1-\lambda)(-g(x)+g(v))=\lambda(-\psi(u))+(1-\lambda)(-\psi(v))$$

و $\text{int epi}\varphi\neq\phi$ چون $z\in\text{int } dom\varphi$.

ابر فضا در $X\times R$ وجود دارد که مجموعه های بالا را از هم جدا می کند. پس $w^*\in X^*$ و $\alpha\in R$ است که

$$g(x)-g(y)\leq\langle w^*,y\rangle+\alpha\leq f(y)-f(x)-\langle x^*,y-x\rangle \qquad \forall y\in X$$

$y=x$ در نظر می گیریم $\alpha=-\langle w^*,\alpha\rangle$ و

$$\langle w^*+x^+,y-x\rangle\leq f(y)-f(x),g(y)\geq(-w^*,y-x) \qquad \forall y\in X$$

$$\langle w^*+x^*,y-x\rangle+\langle -w^*,y-x\rangle\leq(f(y)+g(y))-(f(x)+g(x))$$

$$\Rightarrow x^*\in\partial f(x)+\partial g(x)$$

قضیه۱–۳۰: فرض کنید X فضای باناخ و f نیم پیوسته پائین و محدب باشد و $a,b\in X$ که $a\neq b$ و $r\in R$ که $f(a)<r<f(b)$ آن گاه برای $n\in N$، $(x_n)\to_f c$ و $x_n^*\in\partial f(x_n)$ که $c\in[a,b[$ می باشد وجود دارد به طوری که :

$$r-f(a)<\liminf\left\langle b-a,x_n^*\right\rangle \quad (۱)$$

$$۰\leq\lim\left\langle c-x_n,x_n^*\right\rangle \quad (۲)$$

$$\frac{\|b-c\|}{\|b-a\|}(r-f(a))\leq\liminf\left\langle b-x_n,x_n^*\right\rangle \quad (۳)$$

$$\|b-a\|(f(c)-f(a))\leq\|c-a\|(r-f(a)) \quad (۴)$$

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

گزاره۱–۳۱: فرض کنید $f:X\to\tilde{R}$ سره باشد در آن صورت

$$(x,x^*)\in\partial f\Leftrightarrow f(x)+f^*(x^*)=\left\langle x^*,x\right\rangle.$$

اثبات:

$$(x^*,x)\in\partial f\Rightarrow f(y)-f(x)\geq\left\langle x^*,y-x\right\rangle$$

$$f^*(x^*)=\sup_{y\in X}\left(\left\langle x^*,y\right\rangle-f(y)\right)\leq\sup_{y\in X}\left(\left\langle x^*,y\right\rangle-f(x)-\left\langle x^*,y-x\right\rangle\right)=$$

$$\sup_{y\in X}\left(\left\langle x^*,y\right\rangle-f(x)-\left\langle x^*,y\right\rangle+\left\langle x^*,x\right\rangle\right)=\left\langle x^*,x\right\rangle-f(x)\Rightarrow f(x)+f^*(x^*)\leq\left\langle x^*,x\right\rangle$$

از رابطه یانگ فنچل داریم $f(x)+f^*(x^*)\geq\left\langle x^*,x\right\rangle$

در نتیجه $f(x)+f^*(x^*)=\left\langle x^*,x\right\rangle$.

حال فرض کنید $f(x)+f^*(x^*)=\left\langle x^*,x\right\rangle$ آنگاه

$$\left\langle x^*,x\right\rangle-f(x)=f^*(x^*)\geq\left\langle x^*,y\right\rangle-f(y)\Rightarrow f(y)-f(x)\geq\left\langle x^*,y-x\right\rangle\Rightarrow(x,x^*)\in\partial f$$

نتیجه۱–۳۲: فرض کنید تابع سره و نیم پیوسته پائین و محدب روی فضای باناخ انعکاسی باشد

در آن صورت $\partial f^{*} = (\partial f)^{-1}$.

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

قضیه۱-۳۳: فرض کنید f تابعی محدب و نیم پیوسته پائین و سره روی X باشد اگر برای $x \in X$ داشته باشیم $\partial f(x) \subset \partial g(x)$ آن گاه برای $k \in R$، $f = g + k$.

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

تعریف۱-۳۴: $T : X \to Y$ عملگر خطی نامند هر گاه برای $x, y \in D(T)$ و اسکالر α در صورتیکه

$x + y \in D(T)$ و $\alpha x \in D(T)$

داشته باشیم

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(X)$$

تعریف۱-۳۵: $T : X \to Y$ عملگر زیر خطی نامند هر گاه برای $x, y \in D(T)$ داشته باشیم

$$T(x+y) \le T(x) + T(y)$$

قضیه۱-۳۶: فرض کنید A زیر مجموعه نا تهی ازاعدادحقیقی باشد که از پائین کراندار است همچنین $-A$ را مجموعه $-x$ تمام هایی بنگارید که $x \in A$. در این صورت

$$\inf A = -\sup(-A)$$

اثبات: به [۲۳] مراجعه کنید.

مثال۱-۳۷: فرض کنید $f : X \longrightarrow R$ سره و نیم پیوسته پائین و خطی باشد. چون $f(\cdot) = \cdot$ آن گاه $\partial f(\cdot) = \{x^{*} \in X^{*} \,|\, \langle x^{*}, x \rangle \le f(x) \quad \forall x \in X\}$ اگر $x^{*} \in \partial f(\cdot)$ آنگاه $\langle x^{*}, x \rangle - f(x) \le \cdot$ برای x های متعلق به X نتیجه می شود $f^{*}(x^{*}) = -f(\cdot) = \cdot$.