دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گروههای متناهی با دو طول برای کلاس‌های تزویج p-منظم

استاد راهنما

دکتر حسن مهتدی‌فر

استاد مشاور

دکتر کمال عزیزی هریس

پژوهشگر

رقیه آسیابی

شهریور ۱۳۹۲


بسم الله الرحمن الرحیم
بهار

بسم الله الرحمن الرحیم

پروردگارا،

خود را تقدیم تو میدارم، با من کن و از من ساز آنچه خود اراده کنی، از اسارت نفس رهایم کن تا انجام اراده‌ات را بهتر توانم، مشکلاتم را بگیر تا پیروزی بر آنها شاهدی باشد برای کسانیکه با قدرت تو، عشق تو و راه تو یاریشان خواهم داد. باشد که همیشه بر اراده‌ی تو گردن نهم.

آمین

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

بنام خدا

و من لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **حسن مهتدی‌فر**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر کمال عزیزی هریس که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم. از کلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی دکتر حمید موسوی، دکتر موسی جباری، دکتر مرتضی فغفوری، دکتر غلامرضا حجتی ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر اصغر رنجبری مدیرگروه ریاضی محض و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم. در پایان از کلیه‌ی اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاس‌گزاری می‌کنم.

رقیه آسیابی

شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: آسیابی نام: رقیه
عنوان: گروههای متناهی با دو طول برای کلاس‌های تزویج p-منظم
استاد راهنما : دکتر حسن مهتدی‌فر استاد مشاور : دکتر کمال عزیزی هریس
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۶۰
کلید واژه‌ها: گروههای متناهی، عضوهای p-منظم، طول کلاس‌های تزویج

چکیده

در چند دهه‌ی اخیر تأثیر اعمال شرایط حسابی معینی بر طول کلاس های تزویج گروه متناهی G به طور گسترده مورد توجه متخصصین نظریه‌ی گروه بوده است. در این پایان‌نامه ساختار گروه متناهی G را وقتی که طول کلاس های تزویج عضوهای p-منظم منحصراً اعداد ۱ و m هستند، تعیین می‌کنیم.

در قضیه‌ی A، ثابت می‌کنیم که اگر G گروه متناهی p-حلپذیر باشد و $\{1, m\}$ مجموعه‌ی طول کلاس‌های تزویج p-منظم از G، آنگاه $m = p^a q^b$، که در آن p و q عددهای اول متمایز بوده و $a, b \geq 0$. اگر $b = 0$ آنگاه G دارای p-متمم آبلی است. اگر $b \neq 0$ آنگاه $G = PQ \times A$ که در آن $P \in Syl_p(G)$، $Q \in Syl_q(G)$ و $A \leq Z(G)$. بعلاوه، اگر $a = 0$ آنگاه $G = P \times Q \times A$.

در دومین نتیجه‌ی اصلی تحت عنوان قضیه‌ی B، ساختار گروه مطرح شده در قضیه‌ی A بدون شرط p-حلپذیری معین می‌شود.

فهرست مطالب

مقدمه و پیشینه‌ی پژوهش

در سال‌های اخیر موضوع بسیار مهمی که توسط کارشناسان نظریه‌ی گروههای متناهی بررسی می‌شود، این است که چه ارتباطی بین طول کلاس‌های تزویج یک گروه متناهی و ساختار آن گروه وجود دارد. به عبارت دیگر اگر طول کلاس‌های تزویج یک گروه متناهی را بدانیم، آنگاه در رابطه با ساختار آن گروه چه اطلاعات مفیدی می‌توانیم بدست آوریم.

ایتو[۱] در [۱۴] ثابت کرد که اگر گروه متناهی G دارای دو طول کلاس تزویج باشد، آنگاه G پوچتوان است و نیز در [۱۵] ثابت کرد که هر گروه متناهی با تنها سه طول کلاس تزویج متمایز، حلپذیر است. در خصوص گروههایی که دارای دو طول کلاس متباین هستند، آراد[۲] و فیسمن[۳] در [۹] با استفاده از دسته‌بندی گروههای متناهی ساده، $(CFSG)$، ثابت کردند که این نوع گروهها نمی‌توانند ساده باشند. از طرف دیگر، ای. کامینا[۴] و آر. کامینا[۵] ثابت کرده‌اند که اگر G گروهی متناهی باشد با این خاصیت که

[۱] Ito

[۲] Arad

[۳] Fisman

[۴] A. Camina

[۵] R. Comina

به ازای هر سه طول کلاس تزویج داده شده‌ی متمایز بزرگتر از یک، یک جفت متباین وجود داشته باشد، آنگاه G حداکثر سه طول کلاس تزویج متمایز بزرگتر از یک دارد و G حلپذیر است. اثبات حلپذیری این گروهها با استفاده از نتیجه‌ای بود که از $CFSG$ استفاده می‌شد، این نتیجه که به امبرگ[۶] و کازارین[۷] منسوب می‌شود، درباره‌ی غیر ساده بودن گروههایی است که حاصلضرب یک گروه پوچتوان در یک گروه با مرکز غیر بدیهی است.

بلترن[۸] وفلیپ[۹] در [۳ ,۲] نشان دادند که وقتی مجموعه‌ی طول کلاس‌های یک گروه مانند G، مجموعه‌ی $\{1, m, n, mn\}$ است، که درآن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند که $(m, n) = 1$، آن‌گاه G پوچتوان است و برای اعداد اولی چون p و q، $m = p^a$ و $n = q^b$.

از سوی دیگر ایتو، در [۱۶] ثابت کرد که گروههای ساده با چهار طول برای کلاس‌های تزویج منحصراً گروههای $SL(2, 2^a)$، ($a \geqslant 2$) هستند و قسمت اصلی اثبات متشکل از نشان دادن این نکته بود که در گروههای ساده با چهار طول برای کلاس‌های تزویج، همه‌ی مرکزسازهای غیربدیهی، ضرورتاً آزاد هستند، بدین معنی که آن‌ها دو به دو نسبت به شمول غیر قابل مقایسه‌اند(گزاره ۱ از [۱۶]).

برای عدد اول ثابتی چون p، G را گروهی p-حلپذیر و متناهی می‌گیریم. می‌خواهیم ساختار G را وقتی که مجموعه‌ی طول کلاس‌های تزویج p-منظم از G، برای عدد صحیحی مانند $m > 1$، مجموعه‌ی $\{1, m\}$ است، تعیین کنیم.

هدف ما در این پایان‌نامه که براساس مقالات [۸ ,۱] تهیه و تنظیم خواهد شد،

[۶] Amberg

[۷] Kazarin

[۸] Beltran

[۹] Felipe

عبارت است از بدست آوردن اطلاعاتی از ساختار گروههای متناهی p-حلپذیر از طریق مجموعه‌ی طول‌های کلاس‌های تزویج p'-عضوهای آن، یعنی طول کلاس‌های تزویج p-منظم. نتیجه‌ای کلاسیک از ایتو ثابت می‌کند که اگر ۱ و $m > 1$ تنها طول‌های کلاس‌های تزویج از گروه متناهی G باشند، آنگاه عدد اولی چون q وجود دارد چنان که $G = Q \times A$، که در آن Q، q-زیرگروه سیلویی از G و A آبلی است. بنابراین، بویژه m توانی از q است. اولین نتیجه‌ی اصلی ما گسترش قضیه‌ی ایتو است، وقتی که این مسأله به کلاس‌های p-منظم در گروه p-حلپذیر انتقال می‌یابد. دومین نتیجه‌ی ما، بدست آوردن نتیجه‌ی اول بدون شرط p-حلپذیری است.

در فصل اول پایان‌نامه تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را فراهم آورده و لم‌ها و قضیه‌های مشهوری را که در فصل‌های بعدی همواره مورد استناد قرار گرفته‌اند، احیاناً بدون اثبات بیان کرده‌ایم. در فصل‌های ۲ و ۳ نتایج اصلی پایان‌نامه را همراه لم‌های مورد نیاز می‌آوریم.

فصل ۱

تعاریف، لم ها و قضایای مقدماتی

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

فرض کنیم G یک گروه باشد. دو عضو a و b از G مزدوج نامیده می‌شود، هرگاه عضو g موجود باشد به‌طوری‌که $a^g = b$. به آسانی مشاهده می‌شود که تزویج یک رابطه‌ی هم ارزی است. بنابراین G به کلاس‌های هم‌ارزی افراز می‌شود. این بدان معناست که هر عضو گروه متعلق به دقیقاً یک کلاس هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی شامل عضو a از G مجموعه‌ی $a^G = \{g^{-1}ag | g \in G\}$ خواهد بود و کلاس تزویج a نامیده می شود و طول کلاس تزویج برابر است با اندیس مرکزساز a در G، که با $|G : C_G(a)|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری زیرنرمال G دنباله‌ای است متناهی از زیرگروههای G مانند:

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمال G دنباله‌ای است متناهی از زیرگروههای نرمال G مانند:

$$۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq \cdots \leq G_r = G.$$

در هر دو تعریف فوق هر G_i را یک جمله‌ی سری، هر $G_i/G_{i-۱}$ یک عامل سری و r را طول سری می‌نامند. واضح است که سری به طول r دارای $r+۱$ جمله است.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. سری نرمال

$$۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq \cdots \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی G می‌گوییم، در صورتی که به ازای هر i که $۱ \leq i \leq r$،

$$G_i/G_{i-۱} \leq Z(G/G_{i-۱}).$$

قرارداد ۴.۱.۱. در این پایان‌نامه p را یک عدد اول و π را مجموعه‌ای از اعداد اول در نظر می‌گیریم. همچنین به ازای هر مجموعه‌ی π از اعداد اول، مجموعه‌ی اعداد اولی را که به π تعلق ندارند با π' نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G گروه متناهی، $|G| = p^a m$، $p \nmid m$ و $a \geqslant ۰$. در این صورت زیرگروه H از G را p-زیرگروه سیلوی G می‌گوییم هرگاه:

$$|H| = p^a.$$

مجموعه‌ی همه‌ی p-زیرگروههای سیلوی G را با $Syl_p(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. زیرگروه L از G را زیرگروه هال می‌نامیم هرگاه:

$$(|L|, |G:L|) = ۱.$$

پس هر p-زیرگروه سیلو، یک زیرگروه هال است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. G را p-گروه می‌نامیم، در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو G توانی صحیح و نامنفی از p باشد.

بدیهی است که اگر G، p-گروه باشد آنگاه مرتبه‌ی G توانی از p است.

تعریف ۸.۱.۱. عدد طبیعی n را یک π-**عدد** گوییم هرگاه هر مقسوم علیه اول n متعلق به π باشد.

تعریف ۹.۱.۱. گروه G را π-گروه گوییم، هرگاه مرتبه‌ی G یک π-**عدد** باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم G گروه متناهی باشد. منظور از یک π-زیرگروه هال G عبارت است از، زیرگروه H به طوری که، مرتبه‌ی H یک π-**عدد** و اندیس H در G یک π'-**عدد** باشد.

نتیجه می‌شود که تعاریف p-زیرگروه سیلو و p-زیرگروه هال با هم معادلند.

تعریف ۱۱.۱.۱. عضوی از یک گروه را π-عضو می‌نامیم، هرگاه مرتبه‌ی آن π-**عدد** باشد و اگر هر عضو، π-عضو باشد آنگاه گروه را π-گروه می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. عضوی از یک گروه را π-منظم می‌نامیم هرگاه آن π'-عضو باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. زیرگروه K از H را زیرگروه مشخصه گوییم و با نماد $K \; ch \; H$ نشان می‌دهیم هرگاه:

$$\forall \alpha \in Aut(H) : \alpha(K) \subseteq K.$$

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد و $K \leq H \leq G$. در این صورت:*

(۱) *اگر $K \; ch \; H$ و $H \; ch \; G$ آنگاه $K \; ch \; G$؛*

(۲) *اگر $H \trianglelefteq G$ و $K\ ch\ H$ آنگاه $K \trianglelefteq G$.*

برهان. رجوع کنید به قضیه‌ی ۶.۱.۱، از [۱۸].

قضیه ۱۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد و $G_1, \cdots, G_n$ زیرگروههایی از آن باشند به طوری که:*

(۱) *به ازای هر i که $1 \leqslant i \leqslant n$، $G_i \trianglelefteq G$؛*

(۲) *$G = G_1 \cdots G_n$؛*

(۳) *به ازای هر i که $1 \leqslant i \leqslant n$، $G_i \cap G_1 \cdots G_{i-1}G_{i+1} \cdots G_n = 1$.*

در این صورت $G \cong G_1 \times \cdots \times G_n$.

برهان. رجوع کنید به قضیه‌ی ۲.۱.۵، از [۱۸].

در قضیه‌ی فوق شرط (۱) را می‌توان با شرط زیر تعویض کرد:

$(1)'$ به ازای هر i, j که $1 \leqslant i, j \leqslant n$، $[G_i, G_j] = 1$.

قضیه ۱۶.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد و $H, K \leq G$. در این صورت داریم:*

(۱) *$N_G(H)$ بزرگترین زیرگروه G است که H در آن نرمال است. بالاخص $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $G = N_G(H)$؛*

(۲) *اگر $H \leq K$، آنگاه $N_K(H) = N_G(H) \cap K$؛*

(۳) *$N_G(H) \cap N_G(K) \leq N_G(H \cap K)$؛*

(۴) *اگر $x \in G$، آنگاه $N_G(H^x) = N_G(H)^x$؛*

(۵) اگر $H \leq N_G(K)$، آنگاه $HK \leq G$؛

(۶) اگر $x \in G$، آنگاه $C_G(H^x) = C_G(H)^x$

(۷) اگر $H \leq K$، آنگاه $C_K(H) = C_G(H) \cap K$؛

(۸) H آبلی است اگر و تنها اگر $H \leq C_G(H)$؛

(۹) $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$.

برهان. رجوع کنید به قضایای ۴.۳.۲، ۵.۳.۲ و ۶.۳.۲، از [۱۸].

لم ۱۷.۱.۱. *اگر S زیرگروهی از G باشد و N زیرگروهی نرمال از G، آنگاه $|N : N \cap S|$ مقسوم علیهی از $|G : S|$ است.*

برهان. بنا به دومین قضیه‌ی اساسی ایزومورفیسم:

$$\frac{NS}{N} \cong \frac{S}{N \cap S}.$$

لذا،

$$|G : S| = |G : NS||NS : S| = |G : NS||N : N \cap S|.$$

□

لم ۱۸.۱.۱. *اگر N زیرگروه نرمال از G باشد و $g \in N$، آنگاه $|g^G| \mid |g^N|$.*

برهان. می‌دانیم $C_N(g) = N \cap C_G(g)$. پس بنا به لم قبل با قرار دادن $S = C_G(g)$ داریم:

$$|G : C_G(g)| = |G : NC_G(g)||N : N \cap C_G(g)|$$

$$= |G : NC_G(g)||N : C_N(g)|.$$

□

لم ۱۹.۱.۱. *اگر N زیرگروه نرمال از G باشد و $g \in G$. با استفاده از علامت بار برای نگاشت متعارف داریم:*

$$|\bar{g}^{\overline{G}}| \mid |g^G|$$

برهان. واضح است که $\overline{C_G(g)} \leq C_{\overline{G}}(\bar{g})$. لذا:

$$|\bar{g}^{\overline{G}}| = |\overline{G} : C_{\overline{G}}(\bar{g})| \mid |\overline{G} : \overline{C_G(g)}| = |G : C_G(g)N| \mid |G : C_G(g)| = |g^G|.$$

□

لم ۲۰.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه غیر آبلی باشد به‌طوری‌که $Z(G) \lneqq Z_2(G)$. در این صورت به ازای هر $x \in Z_2(G)$، $C_G(x) \trianglelefteq G$.*

برهان. فرض کنیم $x \in Z_2(G) - Z(G)$. در این صورت به‌ازای‌هر $g \in G$، $[x, g] \in Z(G)$. اکنون با فرض $z = [x, g]$ داریم، $C_G(x)^g = C_G(x^g) = C_G(xz) = C_G(x)$. در نتیجه $C_G(x) \trianglelefteq G$. □

قضیه ۲۱.۱.۱ (کوشی). *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $p \mid |G|$. در این صورت G عضوی از مرتبه‌ی p دارد.*

برهان. رجوع کنید به قضیه‌ی ۱.۱.۴، از [۱۸].

قضیه ۲۲.۱.۱. *(برنساید) فرض کنیم G گروه ساده‌ی غیر آبلی باشد. در این صورت $\{1\}$ تنها کلاس تزویج از طول توانی از عدد اول است.*

برهان. رجوع کنید به قضیه‌ی ۳.۹، از [۱۰].

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. گوییم زیرگروه H از G دارای یک متمم مانند K $(K \leq G)$ است هرگاه $G = HK$ و $H \cap K = 1$.

تعریف ۲۴.۱.۱. زیرگروه H از G را p-متمم گوییم هرگاه اندیس H در G توانی از p باشد و p مرتبه‌ی H را عاد نکند. واضح است که در این صورت $(|H|, |G:H|) = ۱$.

بدیهی است که تعاریف p-متمم و p'-زیرگروه هال با هم معادلند.

قضیه ۲۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی و $|G| = p^{\alpha}m$، که در آن α عدد صحیح نامنفی است و $p \nmid m$ در این صورت:*

(۱) *G حداقل یک p- زیرگروه سیلو دارد؛*

(۲) *هر p- زیرگروه G مشمول در یک p- زیرگروه سیلوی G است؛*

(۳) *هر دو p- زیرگروه سیلوی G مزدوج‌اند؛*

(۴) *تعداد همه‌ی p- زیرگروه‌های سیلوی G همنهشت ۱ به پیمانه‌ی p است.*

برهان. رجوع کنید به قضیه‌ی ۷.۱.۴، از [۱۸].

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم $|G| = pq$ که $p < q$ اعداد اول هستند. در این صورت G دارای یک p- زیرگروه سیلوی نرمال است.*

برهان. رجوع کنید به قضیه‌ی ۱.۳۰، از [۱۱].

لم ۲۷.۱.۱. *فرض کنیم G گروهی متناهی و $H, K \leq G$ که $(|G:H|, |G:K|) = ۱$. در این‌صورت $G = HK$ و $|G:H \cap K| = |G:H||G:K|$.*

برهان. رجوع کنید به لم ۳.۱۶، از [۱۱].

قضیه‌ی زیر رابطه‌ی p- زیرگروه سیلوی یک زیرگروه نرمال از گروه G را با p- زیرگروه سیلوی گروه G بیان می‌کند.

قضیه ۲۸.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. بعلاوه فرض کنیم $N \trianglelefteq G$ و $R \leq N$. در این صورت $R \in Syl_p(N)$ اگر و تنها اگر G دارای p- زیرگروه سیلویی مانند P باشد به‌طوری‌که $R = P \cap N$.*

برهان. رجوع کنید به قضیه‌ی ۱۸.۱.۴، از [۱۸].

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه تولید شده توسط همه‌ی زیرگروههای نرمال پوچتوان G را زیرگروه فیتینگ می‌نامند و با $Fit(G)$ یا $F(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۳۰.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت:*

$$F(G) = \prod_{p\in\pi(G)} O_p(G),$$

که در آن $\pi(G)$ مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های اول مرتبه‌ی G است.

برهان. رجوع کنید به لم ۴.۲.۱۷، از [۱۳].

لم ۳۱.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی و $g \in G$. آن‌گاه عناصر منحصربفرد x و y از گروه G با خواص زیر موجودند:*

(۱) $g = xy = yx$؛

(۲) *x یک π'-عضو و y یک π-عضو است؛*

(۳) *x و y توان‌هایی از g هستند.*

برهان. فرض کنیم $o(g)=n$، $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ تجزیه‌ی یکتای n به حاصلضرب اعداد اول متمایز باشد که در آن $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ اعداد صحیح مثبت هستند. قرار می‌دهیم:

$$A=\{p_i|p_i\in\pi\}, m_1=\prod_{p_i\in\pi}p_i^{\alpha_i}$$

$$B=\{p_i|p_i\notin\pi\}, m_2=\prod_{p_i\notin\pi}p_i^{\alpha_i}$$

پس $n=m_1m_2$ و $(m_1,m_2)=1$. در این صورت اعداد صحیح r,s وجود دارند به‌طوری‌که:

$$rm_1+sm_2=1,$$

فرض می کنیم $x=g^{rm_1}$ و $y=g^{sm_2}$، خواهیم داشت:

$$g=g^1=g^{rm_1+sm_2}=g^{rm_1}g^{sm_2}=xy,$$

از طرف دیگر،

$$x^{m_2}=(g^n)^r=1^r=1,\ y^{m_1}=(g^n)^s=1^s=1.$$

نتیجه می گیریم که x یک π'-عضو و y یک π-عضو است. همچنین از آنجایی‌که x,y توان‌هایی از G هستند، بنابراین با هم جابه‌جا می‌شوند.

برای اثبات منحصربفردی فرض می‌کنیم $g=uv$ که u یک π'-عضو و v یک π-عضو است و $uv=vu$. در این صورت نشان می‌دهیم که $v=y$ و $u=x$.

داریم $g=uv=xy$ و لذا $x^{-1}u=yv^{-1}$. اما چون u با خودش و v جابه‌جا می‌شود و v نیز با خودش و u جابه‌جا می‌شود، پس u و v هر دو با g جابه‌جا می‌شوند، لذا با توان‌های g نیز جابه‌جا می‌شوند. بنابراین:

$$o(x^{-1}u)\mid[o(x),o(u)],\ o(yv^{-1})\mid[o(y),o(v)]$$

از این‌رو $x^{-۱}u = yv^{-۱}$ هم یک π-عضو و هم یک π'-عضو است. لذا $۱ = x^{-۱}u = yv^{-۱}$ و در نتیجه $v = y$ و $u = x$. □

تعریف ۳۲.۱.۱. تحت شرایط لم فوق x را π'-قسمت g و y را π-قسمت g می‌نامیم که هر دو توان‌هایی از g هستند. در ضمن اگر $\pi = \{p\}$، x را p'-قسمت g و y را p-قسمت g می‌گوییم و می‌نویسیم $x = g_{p'}$ و $y = g_p$.

نتیجه ۳۳.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، $g \in G$ و $o(g) = nm$ که در آن $(m,n) = ۱$. در این‌صورت اعضای منحصربفرد $a, b \in G$ وجود دارند به‌طوری‌که $g = ab = ba$ و $o(a) = n$ و $o(b) = m$. به‌ویژه a و b توانی از g هستند.*

تذکر ۳۴.۱.۱. توجه داشته باشیم که نتیجه فوق را می‌توان تعمیم داد. اگر $o(g) = p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_n^{\alpha_n}$ باشد، آنگاه اعضای منحصربفرد $g_۱, g_۲, \cdots, g_n$ موجودند به‌طوری‌که $g = g_۱g_۲\cdots g_n$ و به‌ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$، $o(g_i) = p_i^{\alpha_i}$ و برای هر $۱ \leqslant i,j \leqslant n$، $g_ig_j = g_jg_i$. همچنین به‌ازای هر i، g_i توانی از g است.

بدیهی است که اگر به‌ازای هر عدد اول q که مرتبه‌ی g را عاد می‌کند، q-قسمت g در $Z(G)$ باشد آن‌گاه $g \in Z(G)$.

لم ۳۵.۱.۱. *اگر G گروهی متناهی و $x, y \in G$ که x یک π'-عضو و y یک π-عضو باشد به‌طوری‌که x, y باهم جابه‌جا شوند آنگاه:*

$$C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y).$$

برهان. واضح است که $C_G(x) \cap C_G(y) \subseteq C_G(xy)$. پس کافی است ثابت کنیم $C_G(xy) \subseteq C_G(x) \cap C_G(y)$. فرض کنیم $g \in C_G(xy)$ پس $g(xy)g^{-۱} = xy$ و لذا $(gxg^{-۱})(gyg^{-۱}) = xy$. چون مزدوج هر π-عضو یک π-عضو است، پس $gxg^{-۱}$ یک π'-عضو و $gyg^{-۱}$ یک