دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

اساتید راهنما:

دکتر – دکتر

پژوهشگر:

تیر ۱۳۸۸

تقدیم به

پدرم:

مادرم:

قدردانی

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات و تعاریف اولیه

۱.۱ مقدمه

در سال ۱۹۶۰، اولام مسائلی را تحت عنوان زیر مطرح کرد:

چه موقع می‌توان به جای حل معادله تابعی به حل نامعادله تابعی روی آورد؟ به عبارت دیگر چه موقع می‌توان فرض کرد که حل نامعادله نزدیک به حل معادله می‌باشد.تحقیقات گسترده‌ای در این مورد برای فرمول بندی و حل چنین مسائلی در دهه‌های اخیر انجام گرفته است.

مسئله ای از این نوع توسط اولام[۱] طی یک سخنرانی قبل از نشست ریاضی در دانشگاه ویسکانسین در سال ۱۹۴۰ ارائه شد.

گروه متری $G(\cdot, d)$ و عدد مثبت ϵ و نگاشت $f : G \longrightarrow G$ به طوری که $d(f(x \cdot y), f(x) \cdot f(y)) < \epsilon$ به ازای هر $x, y \in G$ داده شده است. آیا درون ریختی a از G و ثابت $k > 0$ به طوری که $d(a(x), f(x)) \leq k\epsilon$ به ازای هر $x \in G$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است معادله

$$a(x \cdot y) = a(x) \cdot a(y) \qquad (۱.۱.۱)$$

از اتومورفیسم ها پایا است.

در تلاش برای حل معادلاتی از این قبیل نویسندگان اغلب هومورفیسم ها را روی گروهها یا فضاهای برداری بررسی کرده‌اند.

بویژه $D.H.Heyers$ در ارتباط با نگاشتهای ϵ جمعی $f : E_1 \longrightarrow E_2$ بین فضاهای باناخ کارکرد نگاشت f، ϵ جمعی است اگر برای هر x, y در شرط زیر صدق کند

$$||f(x + y) - f(x) - f(y)|| < \epsilon. \qquad (۲.۱.۱)$$

نشان داده شده است که دراین مورد یک تابع $a : E_1 \longrightarrow E_2$ وجود دارد به طوری که $||a(x) - f(x)|| < \epsilon$. لذا در این مورد خاص $k = 1$ می باشد.

[۱] $S.M.Ulam$

در این جا معادله کوشی

$$f(x+y)-f(x)-f(y)=\circ \qquad (۳.۱.۱)$$

پایدار است. بعلاوه رابطه بین f و a با ضابطه زیر بیان می‌شود

$$a(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(۲^n x)}{۲^n}. \qquad (۴.۱.۱)$$

روشی که منجر به فرمولی مانند فرمول بالا می شود را روش مستقیم گویند.

در سال ۱۹۷۸ راسیاس[۲] نسخه تعمیم یافته مطلب قبل را با این فرض که شرط کوشی بی کران باشد، نشان داد. او فرض کرد که

$$||f(x+y)-f(y)-f(x)|| \leq (||x||^p+||y||^p)\epsilon \qquad (۵.۱.۱)$$

به طوری که $\circ \leq p < ۱$ برای تمامی x و y ها در $E_۱$ باشد.

با استفاده از روش مستقیم او نشان داد که در این مورد خاص تابع جمعی $a: E_۱ \longrightarrow E_۲$ با فرمول داده شده مشابه فرمول قبل است به طوری که

$$||a(x)-f(x)|| \leq k\epsilon||x||^p \qquad (۶.۱.۱)$$

که در این جا k وابسته به p است.

این نتیجه بعدها به $p \neq ۱$ توسیع یافت و توسط راسیاس، جانگ[۳] ، ایساک[۴] ، گاجا[۵] و شمری[۶] تعمیم داده شد و در سال ۱۹۸۰ موضوع هومومورفیسم های تقریب یا پایداری معادلات هومومورفیسم توسط تعدادی از ریاضی دانها بررسی شد.در کل نویسندگان از همه ی فضاهای برداری، گروه، نیم گروه و ... برای دامنه نگاشت های جمعی استفاده کرده اند.

[۲] $Th.M.Rassias$

[۳] $S.M.Jung$

[۴] $G.Isac$

[۵] $Z.Gajda$

[۶] $P.Semri$

علاوه بر این در سال ۱۹۸۳ مسئله پایداری برای نگاشتهای جمعی روی دامنه محدود به صفحه بررسی شد. بعدها مشخص شد که هیچ مشکلی در جایگزینی فضای برداری E_1 با نیم گروه های جابجائی در قضیه هایِرز [۷] پیش نمی‌آید.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنید E_1 یک فضای برداری نرم دار و E_2 یک فضای باناخ باشد و نگاشت $f : E_1 \longrightarrow E_2$ را با شرط

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| < \epsilon$$

برای تمامی x و y ها در E_1 باشد. آنگاه حد

$$g(x) = \lim\ 2^{-n} f(2^n x)$$

برای تمامی x ها در E_2 موجود است و g یک نگاشت جمعی یکتاست که در شرط زیر صدق می کند

$$||f(x) - g(x)|| \leq \epsilon.$$

در سال ۱۹۸۵ مثالی ازفورتی [۸] نشان داد که هیچ کدام از گروه های هیچ جابجائی یا نیم گروه ها نمی توانند به عنوان دامنه های معادلات هومورفیسم ها پایدار باشند.

مشهورترین معادله تابعی، معادله کوشی

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۷.۱.۱)$$

است و هر تابع با ویژگی بالا را تابع جمعی گویند.

واضح است که برای توابع حقیقی تعریف شده روی خط حقیقی هر جواب لبگ اندازه پذیر

[۷] $D.H.Hyers$

[۸] $G.L.Forti$

از معادله بالا به شکل $f(x)=cx$ برای هر ثابت c است، زیرا

$$f(x+y)=c(x+y)=cx+xy=f(x)+f(y) \qquad \forall c \tag{۸.۱.۱}$$

لذاداریم $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

مفهوم پایداری از آن جا ناشی می‌شود که ما یک معادله تابعی را با یک نامعادله جایگزین می‌کنیم که این نامعادله به پراکندگی معادله بستگی دارد.

توجه می کنیم که توابع روی یک فضای برداری حقیقی نرم دار $E_۱$ با مقادیری در یک فضای باناخ حقیقی $E_۲$ تعریف می شوند.

به ازای ϵ داده شده، تابع $f: E_۱ \longrightarrow E_۲$ را ϵ جمعی گوییم هرگاه در نامساوی زیر صدق کند

$$||f(x+y)-f(y)-f(x)|| \ \leq \epsilon \qquad \forall x,y\in E_۱. \tag{۹.۱.۱}$$

ما یک تابع جمعی g که نزدیک به تابع ϵ جمعی f است را جستجو می‌کنیم.

حال برای شروع قرار می دهیم $x=y$ و طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم. بنابراین خواهیم داشت

$$\Big|\Big|\frac{f(۲x)}{۲}-f(x)\Big|\Big| \leq \frac{\epsilon}{۲} \tag{۱۰.۱.۱}$$

حال در معادله فوق قرار می دهیم $x=۲x$ و بعد طرفین را بر ۲ تقسیم می کینم، خواهیم داشت

$$\Big|\Big|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲}-f(۲x)\Big|\Big| \leq \frac{\epsilon}{۲^۲} \tag{۱۱.۱.۱}$$

با توجه به دو رابطه فوق الذکر و نامساوی مثلث خواهیم داشت

$$\Big|\Big|\frac{f(۲^۲x)}{۲^۲}-f(۲x)\Big|\Big| \ \leq \epsilon(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲})=\epsilon(۱-۲^{-۲}) \tag{۱۲.۱.۱}$$

با ادامه این روند با استفاده از استقرای ریاضی و نامساوی مثلث به ازای هر $n\in \ I\!N$ رابطه زیر را خواهیم داشت

$$||۲^{-n}f(۲^{-n}x)-f(x)|| \leq \epsilon(۱-۲^{-n}) \tag{۱۳.۱.۱}$$

حال نشان می دهیم که $g_n(x) = ۲^{-n} f(۲^n x)$ به ازای هر x همگراست. لازم بذکر است که اثبات رابطه بالا در ادامه مطالب نشان داده خواهد شد.

حال با جایگذاری $۲^m x$ به جای x و تقسیم طرفین به ۲^m خواهیم داشت

$$||۲^{-(n+m)} f(۲^{n+m} x) - ۲^{-m} f(۲^m x)|| < \frac{\epsilon(۱ - ۲^{-n})}{۲^m} \leq \epsilon ۲^{-m} \qquad (۱۴.۱.۱)$$

داریم

$$||g_{n+m} - g_m|| = ||۲^{-(n+m)} f(۲^{n+m} x) - ۲^{-m} f(۲^m x)|| \leq \epsilon ۲^{-m} \qquad (۱۵.۱.۱)$$

از این رو با توجه به محک کوشی $\lim g_n(x)$ وجود دارد (برای تمام x ها در $E_۱$).

با توجه به رابطه (۱۳.۱.۱) با گرفتن حد وقتی که $n \to \infty$ خواهیم داشت

$$||g(x) - f(x)|| \leq \epsilon \qquad \forall x \in E_۱. \qquad (۱۶.۱.۱)$$

حال با جایگزین کردن $۲^n x$ به جای x در رابطه $||f(x+y) - f(y) - f(x)|| \leq \epsilon$ و تقسیم طرفین بر ۲^n خواهیم داشت

$$||۲^{-n} f(۲^n (x+y)) - ۲^{-n} f(۲^n x) - ۲^{-n} f(۲^n y)|| \leq ۲^{-n} \epsilon. \qquad (۱۷.۱.۱)$$

با حد گیری وقتی که $n \to \infty$ واضح است که g جمعی خواهد بود. البته نامساوی فوق وقتی که $f(x) = c$، محسوس تر است وقتی که c هر ثابتی در $E_۲$ با شرط $||c|| \leq \epsilon$ باشد و خواهیم داشت $g(x) = ۰$. بعلاوه g تنها تابع جمعی است که در شرط

$$||f(x) - g(x)|| \leq \epsilon \qquad \forall x \in E_۱ \qquad (۱۸.۱.۱)$$

صدق می کند.

زیرا فرض کنیم تابع دیگری مانند $h : E_۱ \longrightarrow E_۲$ وجود داشته باشد، آنگاه به ازای بعضی از y ها در $E_۱$ خواهیم داشت $h(y) \neq g(y)$. از این که $||f(x) - h(x)|| < \epsilon$ (برای تمام x ها) داریم

$$||g(x) - h(x)|| = ||g(x) - f(x) + f(x) - h(x)|| \leq ۲\epsilon \qquad \forall x \in E_۱. \qquad (۱۹.۱.۱)$$

حال عدد صحیح k را طوری انتخاب می کنیم که

$$k||g(y)-h(y)||>۲\epsilon. \tag{۲۰.۱.۱}$$

با توجه به این که هر دوی f و g جمعی هستند داریم

$$||g(ky)-h(ky)||=k||g(y)-h(y)||>۲\epsilon. \tag{۲۱.۱.۱}$$

که این یک تناقض است. لذا خواهیم داشت $h(x)=g(x)$ (برای تمام x ها در $E_۱$).

هر دوی f و g می توانند ناپیوسته باشند. در حالت خاص فرض کنیم که f در یک نقطه پیوسته باشد. نشان می دهیم که g در تمام جاها پیوسته باشند. فرض کنید چنین نباشد. فرض می کنیم g در مبدا پیوسته نباشد، لذا عدد صحیح $\alpha>\circ$ و دنباله‌ای از نقاط x_n در $E_۱$ وجود دارد که به صفر همگراست به طوری که

$$g(x_n)>\frac{۱}{\alpha}\,. \tag{۲۲.۱.۱}$$

حال فرض کنید m یک عدد صحیح بزرگتر از $۳\alpha\epsilon$ باشد، بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}||g(mx_n+y)-g(y)|| &\leq ||g(mx_n+y)-f(mx_n+y)||\\ &+ ||f(mx_n+y)-f(y)||+||f(y)-g(y)||<۳\epsilon.\end{aligned} \tag{۲۳.۱.۱}$$

چون f پیوسته است پس

$$\lim_{n\to\infty} f(mx_n+y)=f(y), \tag{۲۴.۱.۱}$$

به عبارتی دیگر با توجه به جمعی بودن g خواهیم داشت

$$||g(mx_n+y)-g(y)||=||g(mx_n)||=m||g(x_n)||>۳\epsilon \tag{۲۵.۱.۱}$$

که یک تناقض است، لذا g در همه جا پیوسته است.

فصل ۲

تعاریف و قضایای مورد نیاز

۱.۲ نیم‌گروه‌ها، تکگون‌ها و گروه‌ها

اگر G مجموعه ای ناتهی باشد، یک عمل دوتائی بر G تابعی است بصورت $G \times G \longrightarrow G$. برای این عمل دوتائی های مختلفی بکار می رود، برای مثال (a,b) نماد ضربی و $(a+b)$ نماد جمعی و $a \cdot b$ و $a * b$ و غیره.

تعریف ۱.۱.۲ یک نیم‌گروه عبارتست از مجموعه‌ای ناتهی مانند G همراه با عمل یک دوتائی بر G با خاصیت شرکت پذیری به این معنی که به ازای هر a, b, c در G داشته باشیم

$$a(bc) = (ab)c. \tag{۱.۱.۲}$$

تعریف ۲.۱.۲ یک تکگون، نیم‌گروهی است مانند G که شامل یک عنصر همانی (دو طرفه) مانند $e \in G$ می باشد به طوری که به ازای هر $a \in G$

$$a\,e = e\,a = a. \tag{۲.۱.۲}$$

تعریف ۳.۱.۲ یک گروه، تکگونی است مانند G به طوری که به ازای هر $a \in G$، عضو معکوسی (دو طرفه) مانند $a^{-1} \in G$ موجود باشد به طوری که

$$a\,a^{-1} = a^{-1}\,a = e. \tag{۳.۱.۲}$$

تعریف ۴.۱.۲ تابع f را جمعی گویند هرگاه به ازای هر x, y از دامنه تابع داشته باشیم

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{۴.۱.۲}$$

تعریف ۵.۱.۲ فرض کنید E و E' فضاهای باناخ باشند و فرض کنید δ عدد مثبتی باشد. یک تبدیل خطی f از E به E' را δ خطی گویند هرگاه به ازای هر x, y در E داشته باشیم

$$||f(x+y) - f(y) - f(x)|| < \delta. \tag{۵.۱.۲}$$

۱.۱.۲ فضای نرم‌دار

گوئیم فضای برداری X یک فضای نرم‌دار است اگر برای هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی مانند $||x||$، به نام نرم x چنان مربوط باشد که

۱) به ازای هر x و y در X داشته باشیم

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، داشته باشیم

$$||\alpha x|| = |\alpha| ||x||.$$

۳) اگر $x \neq 0$ باشد، داشته باشیم

$$||x|| \geq 0.$$

۴) اگر $x \in X$ باشد، داشته باشیم

$$||x|| = 0 \iff x = 0.$$

هر فضای نرم‌دار را می‌توان یک فضای متری در نظر گرفت که در آن $d(x,y)$ مساوی با $||x-y||$ است.

۲.۱.۲ فضای متریک

فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و غیرتهی و d تابعی حقیقی بر $X \times X$ باشد به طوری که

۱) به ازای هر x و y از X داشته باشیم

$$d(x,y) \geq 0.$$

۲) به ازای هر x و y از X

$$d(x,y)=0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad x=y.$$

۳) به ازای هر x و y از X داشته باشیم

$$d(x,y)=d(y,x).$$

۴) به ازای هر x ، y و z از X داشته باشیم

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z).$$

در این صورت d را یک متر روی X و (X,d) را یک فضای متریک می‌نامند.

۳.۱.۲ فضای برداری

مجموعه V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ نامیده می‌شود هرگاه عملگرهای جمع و ضرب اسکالر در شرایط زیر صدق کنند:

- به ازای هر x و y از V داشته باشیم

$$x+y\in V.$$

که این خاصیت را بسته بودن نسبت به عمل جمع می نامند.

- به ازای هر x و y و z از V داشته باشیم

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

- به ازای هر x و y از V داشته باشیم

$$x + y = y + x.$$

- عضو مانند $\circ$ متعلق به V چنان موجود باشد که به ازاء هر $x \in V$ ، $x + \circ = x$.

- برای هر $x \in V$ ، عنصری مانند $(-x)$ در V چنان موجود باشد که $x + (-x) = \circ$.

- به ازای هر $x \in V$ و هر $\alpha \in I\!\!F$ ، داشته باشیم $\alpha x \in V$ که این خاصیت را بسته بودن نسبت به عمل ضرب اسکالر می نامند.

- برای تمامی α و β متعلق به $I\!\!F$ و برای هر $x \in V$ داشته باشیم

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

- برای هر $\alpha \in I\!\!F$ و هر $x, y \in V$ داشته باشیم

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

- به ازای هر $\alpha, \beta \in I\!\!F$ و هر $x \in V$ داشته باشیم

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

- عنصری مانند $۱ \in I\!\!F$ موجود باشد که برای هر $x \in V$ داشته باشیم

$$۱x = x.$$

۴.۱.۲ فضای باناخ

یک فضای نرم دار که نسبت به متر تعریف شده بوسیله نرمش تام باشد،(به این معنی که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد) فضای باناخ گویند.

فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ فضاهای برداری باشند. اگر یک تابع جمعی $\delta : E_۱ \longrightarrow E_۲$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in E_۱$ داشته باشیم $\delta(\delta(x)) = x$ ، آنگاه δ را یک برگشت یا پیچش $E_۱$ می نامند.

برای تابع برگشت داده شده مانند $\delta : E_۱ \longrightarrow E_۲$ معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x+\delta(y)) = ۲f(x) + ۲f(y) \qquad (۶.۱.۲)$$

معادله مربعی تابع یا برگشت نامیده می شود.

فرض کنید X یک مجموعه باشد، تابع $d : X \times X \longrightarrow [۰, \infty]$ یک متر تعمیم یافته روی X نامیده می شود اگر و فقط اگر هر سه شرط یک متر را داشته باشد. اختلاف یک فضای متری تعمیم یافته با فضای متریک در این است که متر تعمیم‌یافته شامل بی‌نهایت نیز می‌باشد.

یک تابع $f : E_۱ \longrightarrow E_۲$ که $E_۱$ و $E_۲$ فضاهای برداری هستند، یک جواب معادله (۶.۱.۲) است اگر و فقط اگر یک تابع جمعی مانند $A : E_۱ \longrightarrow E_۲$ و یک تابع دوجمعی متقارن $B : E_۱ \times E_۱ \longrightarrow E_۲$ موجود باشد به طوری که

$$A(\delta(x)) = A(x) \qquad \forall x \in E_۱ \qquad (۷.۱.۲)$$

$$B(\delta(x), y) = -B(x, y) \qquad \forall x \in E_۱ \qquad (۸.۱.۲)$$

$$f(x) = B(x, x) + A(x) \qquad \forall x \in E_۱. \quad [۱۱] \qquad (۹.۱.۲)$$

حال اگر در معادله (۶.۱.۲) قرار دهیم $\delta = I$ که در آن $I : E_۱ \longrightarrow E_۲$ بیانگر تابع همانی است،

آنگاه معادله (۶.۱.۲) به شکل زیر درخواهد آمد

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad (۱۰.۱.۲)$$

حال اگر در معادله (۶.۱.۲) قرار دهیم $\delta = -I$ ، آنگاه این معادله به معادله تابعی زیر تبدیل خواهد شد

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y). \qquad (۱۱.۱.۲)$$

اخیراً **بلید**[۱] پایداری معادلات مربعی تابعی با برگشت را ثابت کرده است [۱۰].

حال ما می‌خواهیم روش نقطه ثابت را برای بررسی پایداری معادله تابعی توابع از یک فضای برداری به یک فضای کامل β نرم بکار بریم.

فرض کنید k بیانگر میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد و فرض کنید E یک فضای برداری با میدان X باشد.

یک تابع $||\cdot||_\beta : E \longrightarrow [۰,\infty)$ ، β نرم است اگر و فقط اگر در شرایط زیر صادق باشد

۱) $||x|| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

۲) $|\lambda|^\beta ||x||_\beta = ||\lambda x||_\beta \qquad \forall \lambda \in k, \;\; \forall x \in E$

۳) $||x+y||_\beta \leq ||x||_\beta + ||y||_\beta \qquad \forall x, y \in E$

قضیه ۱.۱.۲ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تعمیم یافته باشد و فرض کنید $T : X \longrightarrow X$ به طور اکیداً انقباضی با ثابت لیپ شیتز $۰ < q < ۱$ باشد. اگر عدد صحیح غیر منفی N به طوری که، $d(T^{N+۱}x, T^N x) < \infty$ برای هر $x \in X$ آنگاه گزاره های زیر برقرارند

- دنباله $\{T_n(x)\}$ همگرا به نقطه ثابت x^* از T است.

[۱] $B.Belaid$

- x^* تنها نقطه ثابت T در مجموعه‌ی

$$X^* = \{y \in X;\ \ d(T^N x, y) < \infty\}$$

است.

- اگر $y \in X^*$ ، آنگاه

$$d(y, x^*) \leq \frac{۱}{۱-q}\, d(Ty, y). \qquad (۱۲.۱.۲)$$

اثبات قسمت اول: چون برای عدد صحیح غیرمنفی N داریم

$$d(T^{N+۱}x, T^N x) < \infty, \qquad (۱۳.۱.۲)$$

$$d(T^{N+۱}x, T^{N+۲}x) = d(TT^N x, TT^{N+۱}x), \qquad (۱۴.۱.۲)$$

حال چون T انقباضی است داریم

$$d(TT^N x, TT^{N+۱}x) \leq q d(T^N x, T^{N+۱}x), \qquad (۱۵.۱.۲)$$

اکنون نشان می‌دهیم با استفاده از استقرای ریاضی داریم

$$d(T^{N+l}x, T^{N+l+۱}x) \leq q^l d(T^N x, T^{N+۱}x) < \infty, \qquad (۱۶.۱.۲)$$

به ازای $l = ۱$ حکم برقرار است

$$d(T^{N+۱}x, T^{N+۲}x) \leq q d(T^N x, T^{N+۱}x), \qquad (۱۷.۱.۲)$$

فرض کنیم قضیه برای حالت l برقرار باشد، یعنی داشته باشیم

$$d(T^{N+l}x, T^{N+l+۱}x) \leq q^l d(T^N x, T^{N+۱}x) < \infty, \qquad (۱۸.۱.۲)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} d(T^{N+l+۱}x, T^{N+l+۲}x) &= d(T(T^{N+l}x), T(T^{N+l+۱}x)) \\ &\leq q d(T^{N+l}x, T^{N+l+۱}x). \qquad (۱۹.۱.۲) \end{aligned}$$