بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر(عج)
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض
گرایش آنالیز

کران‌هایی برای تبدیلات ماتریسی روی فضاهای دنباله‌ای بلوکی

استاد راهنما:
دکتر داود فروتن‌نیا

دانشجو:
حلیمه نوری‌زاده

شهریورماه ۱۳۹۲

این پایان‌نامه به عنوان یکی از شرایط درجه‌ی کارشناسی ارشد به

گروه ریاضی
دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو: حلیمه نوری‌زاده	امضاء:
استاد راهنما: دکتر داود فروتن نیا	امضاء:
داور اول : دکتر حمیدرضا افشین	امضاء:
داور دوم: دکتر حسن جمالی	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر محبوبه سعیدی	امضاء:

تقدیم به

همسر عزیز و مهربانم

سپاس گزاری...

سپاس بی کران سزاوار آفریننده ی هستی است که ذره ای از نور دانش بی پایانش را به ما بخشید تا از تاریکی رهایی یابیم.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر داوود فروتن نیا، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه تحقق نمی یافت.

همچنین لازم می دانم از جناب آقای دکتر حمیدرضا افشین که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر کنم. از جناب آقای دکتر حسن حمالی نیز به خاطر تقبل زحمت داوری این پایان نامه سپاس گزارم.

در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان و حامی من بود. همچنین از مادر همسرم و تمام اعضای خانواده ام، که با مهربانی مشوق من در این راه بودند و از همه ی دوستان خوبم کمال تشکر را دارم.

حلیمه نوری زاده

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان‌نامه، فضاهای دنباله‌ای h_p، e_p^r و فضای دنباله‌ای بلوکی را معرفی کرده و بعضی خواص توپولوژیکی و روابط شمول مربوط به این فضاها را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $A=(a_{n,k})$ و $B=(b_{n,k})$ ماتریس‌هایی با درایه‌های نامنفی هستند و همچنین A عملگر ماتریسی از فضای $l_{B(p)}(v)$ به فضای $l_{B(q)}(v)$ است. کران‌های پایین را که به شکل

$$\|Ax\|_{v,B(q)} \geq L\|x\|_{v,B(p)},$$

برای هر دنباله نامنفی $x \in l_{B(p)}(v)$ برقرار است، بررسی می‌کنیم. ثابت L مستقل از x است و بزرگترین مقدار ممکن از L را با $L_{v,p,q,B}(A)$ نمایش می‌دهیم. هدف دیگر از این پژوهش بررسی کران پایین برای عملگرهای ماتریسی روی فضاهای دنباله‌ای است.

واژگان کلیدی:

فضای دنباله‌ای اویلر، فضای دنباله‌ای بلوکی، فضای دنباله‌ای هاسدورف، فضای دنباله‌ای وزن‌دار بلوکی، کران پایین عملگرهای ماتریسی

پیش‌گفتار

بصر [۱] و آلتای [۲] فضاهای دنباله‌ای اویلر $e_\circ^r$ و e_c^r را در سال ۲۰۰۵ معرفی کردند [۱]. این فضاها در سال ۲۰۰۶ توسط بصر، آلتای و مرسلین [۳] به فضاهای e_p^r و e_∞^r تعمیم داده شدند [۲]. بحث کران پایین عملگرها از سال ۱۹۸۲ توسط لایونز[۴] برای ماتریس چزارو روی فضاهای دنباله‌ای l_2 شروع شد [۱۴]. سپس این تحقیقات توسط ریاضی‌دانان دیگری مانند بنت [۵] و چن[۶] روی فضاهای دنباله‌ای l_p دنبال شد و کران پایین عملگرهای چزارو، کاپسن [۷] و هاسدورف روی این فضاها دقیقاً مشخص گردید [۳] و [۵]. در ادامه لشکری‌پور، فروتن‌نیا بحث را به فضاهای دنباله‌ای وزن‌دار توسعه دادند [۹] و [۱۱]. فروتن‌نیا در [۱۲] فضای دنباله‌ای وزن‌دار $l_p(v)$ را به فضاهای دنباله‌ای وزن‌دار بلوکی $l_p(v, F)$ توسعه داد. سپس طالبی و مؤذن کران بالا و کران پایین عملگرهای ماتریسی را روی این فضاها بررسی کردند [۱۳] و [۱۵]. در این پایان نامه ادامه تحقیقات انجام شده برروی عملگرهای ماتریسی پایین مثلثی روی فضاهای دنباله‌ای بلوکی $l_p(E)$ و فضاهای دنباله‌ای وزن‌دار بلوکی $l_p(v, F)$ مورد بررسی قرار گرفته است.

این پایان نامه شامل چهار فصل است. فصل اول، مفاهیم و تعاریف مقدماتی

[۱] Basar
[۲] Altay
[۳] Mursaleen
[۴] Lyons
[۵] Bennett
[۶] Chen
[۷] Copson

است که به طور مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرند. فضاهای دنباله‌ای اویلر و دنباله‌ای هاسدورف در فصل دوم معرفی شده است، در این فصل خواص توپولوژیکی و روابط شمول مربوط به این فضاها را مشخص کرده‌ایم. در فصل سوم، فضاهای دنباله‌ای بلوکی را معرفی کرده و به خواص توپولوژیکی و بعضی روابط شمول بین این فضاها پرداخته شده است. در فصل چهارم ابتدا به معرفی فضاهای دنباله‌ای وزن‌دار بلوکی پرداخته، سپس کران پایین را برای ماتریس هاسدورف روی فضاهای دنباله‌ای وزن‌دار بلوکی بررسی می‌کنیم. در پایان نیز کران‌هایی از عملگرهای ماتریسی روی این فضاها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فهرست مطالب

۱ پیش نیازها **۱**
۱.۱ مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی ۱
۲.۱ نظریه اندازه و فضاهای دنباله‌ای ۳
۳.۱ نامساوی‌های کاربردی ۴

۲ فضاهای دنباله‌ای اویلر و هاسدورف **۷**
۱.۲ معرفی فضاهای دنباله‌ای اویلر ۷
۲.۲ رابطه‌های شمول ۱۲
۳.۲ معرفی فضاهای دنباله‌ای هاسدورف ۱۵
۴.۲ رابطه‌های شمول ۱۸

۳ فضای دنباله‌ای بلوکی **۲۳**
۱.۳ معرفی فضاهای دنباله‌ای بلوکی ۲۳
۲.۳ رابطه‌های شمول ۲۷

۴ کران پایین برای عملگرهای ماتریسی روی فضای دنباله‌ای وزن‌دار بلوکی **۳۷**
۱.۴ معرفی فضای دنباله‌ای وزن‌دار بلوکی ۳۷
۲.۴ کران پایین برای ماتریس هاسدورف ۴۱
۳.۴ کران‌هایی از عملگرهای ماتریسی ۵۰

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۶۰**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۲

کتاب‌نامه ۶۴

فصل ۱

پیش نیازها

هدف از این فصل بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز است. بخش اول شامل معرفی پیش‌نیازهای آنالیز تابعی مرتبط با این پایان‌نامه است. در بخش دوم مقدمات اولیه فضاهای دنباله‌ای و فضای L_p و مباحث ابتدایی این فضا مطرح خواهد شد. در بخش سوم نیز تعدادی از نامساوی‌های کاربردی را که به طور مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌شود. بیشتر مطالب این فصل برگرفته از کتاب آنالیز حقیقی(فولند[۱]) [۷] است.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای برداری بر میدان F هستند. در این صورت نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی از X به Y نامیده می‌شود هرگاه:

الف) به ازای هر $x_1, x_2 \in X$، $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$؛

ب) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in F$، $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

تعریف ۲.۱.۱. اگر X فضای برداری بر میدان F باشد تابع $\|.\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ را یک نرم می‌نامیم. هرگاه:

الف) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

[۱] Folland

ب) برای هر اسکالر $\alpha \in F$ و $x \in X$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛
پ) برای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
فضای $(X, \|.\|)$ فضای برداری نرم‌دار نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. اگر در تعریف بالا فقط خواص (ب) و (پ) برقرار باشد آنگاه $\|.\| : X \longrightarrow [\circ, \infty)$ را یک نیم نرم می‌نامیم و فضای $(X, \|.\|)$ را فضای برداری نیم نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فضای برداری نرم‌دار $(X, \|.\|)$ را باناخ گوییم هرگاه نسبت به متر $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید T عملگری خطی از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y است. T کراندار است، هرگاه عدد ثابتی مانند $M > \circ$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X$

$$\|Tx\| \leq M \|x\| .$$

تعریف ۶.۱.۱. اگر T یک عملگر خطی باشد، نرم آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|T\| = \inf \{ M > \circ \ : \|Tx\| \leq M \|x\| , \quad \forall x \in X \} .$$

گزاره ۷.۱.۱. *اگر X یک فضای نرم‌دار خطی و T یک عملگرخطی روی این فضا باشد، آنگاه*

$$\begin{aligned} \|T\| = & \sup \{ \|Tx\| \ : \ x \in X, \|x\| = ۱ \} \\ = & \sup \{ \|Tx\| \ : \ x \in X, \|x\| < ۱ \} \\ = & \sup \{ \|Tx\| \ : \ x \in X, \|x\| \leq ۱ \} \\ = & \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \ : \ x \in X, x \neq \circ \right\} . \end{aligned}$$

برهان. برای اثبات به [۱۶] رجوع کنید.

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید X و Y فضاهای برداری بر میدان F باشند و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی و پوشا باشد، آنگاه فضاهای $\dfrac{X}{\ker T}$ و Y یکریخت هستند و آن را با نماد $Y \cong \dfrac{X}{\ker T}$ نشان می‌دهیم.*

برهان. برای اثبات به [۷] رجوع کنید. □

۲.۱ نظریه اندازه و فضاهای دنباله‌ای

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. یک جبر از مجموعه‌ها روی X، گردایه‌ای ناتهی چون $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X است که تحت اجتماع متناهی و متمم‌گیری بسته است. به عبارت دیگر، اگر $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A}$، آنگاه $\cup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{A}$ و اگر $E \in \mathcal{A}$، آنگاه $E^c \in \mathcal{A}$.

تعریف ۲.۲.۱. یک σ ـ جبر، جبری است که تحت اجتماع شمارش‌پذیر بسته است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای مجهز به یک σ ـ جبر مانند $\mathcal{S}$ است. یک اندازه روی $\mathcal{S}$ تابعی چون $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ است به قسمی که

(۱) $\mu(\phi) = 0$؛

(۲) اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{S}$ باشد، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{S}$ یک σ ـ جبر از زیر مجموعه‌های X و μ یک اندازه روی $\mathcal{S}$ است. در این صورت سه‌تایی $(X,\ \mathcal{S},\ \mu)$ را یک فضای اندازه گوییم و اعضای $\mathcal{S}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌نامیم. همچنین اگر $\mu(X) = 1$، سه تایی $(X,\ \mathcal{S},\ \mu)$ را فضای اندازه احتمال گوییم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید (X, S, μ) فضای اندازه و Y فضای توپولوژی باشد، تابع $f : X \longrightarrow Y$ اندازه پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز E در Y، $f^{-1}(E)$ یک مجموعه‌ی اندازه پذیر در X باشد.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید (X, S, μ) فضای اندازه باشد، و f یک تابع اندازه پذیر باشد و $0 < p < \infty$. در این صورت

$$L_p(X, S, \mu) = \left\{ f \mid f : X \to C,\ \int |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

و برای $p \geq 1$ نرم روی این فضا به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $p \geq 1$، فضای همه دنباله‌های $x = (x_1, x_2, \cdots)$ با خاصیت $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ را فضای l_p نامیده و نرم در این فضا چنین تعریف می‌شود

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۸.۲.۱. فضای همه دنباله‌های کراندار $x = (x_1, x_2, ...)$ از اسکالرها را فضای l_∞ می‌نامیم. نرم روی این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

۳.۱ نامساوی‌های کاربردی

در این بخش تعدادی از نامساوی‌های پرکاربرد در این پایان‌نامه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. هرگاه p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند که $p + q = pq$ یا معادلا

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

آنگاه p و q را مزدوج هم می‌نامیم.

لم ۲.۳.۱. *فرض کنید $(a_n) \in l_p$ و $(b_n) \in l_q$ و $p, q > 1$. اگر p و q مزدوج هم باشند آنگاه $(a_nb_n) \in l_1$ و*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

در نامساوی فوق، تساوی فقط وقتی روی می‌دهد که به ازای ثابتی مانند M داشته باشیم $|a_n|^p = M|b_n|^q$.

برهان. به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

لم ۳.۳.۱. *اگر $f \in L_p$ و $g \in L_q$، آنگاه $fg \in L_1$ و*

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر ثابت‌هایی مانند α و β که هر دو صفر نیستند، وجود داشته باشد به طوری که $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ تقریبا همه جا.
نامساوی‌های فوق، نامساوی‌های هولدر[۱] می‌باشند و در حالت خاص $p = q = ۲$
نامساوی‌های شوارتز[۲] نامیده می‌شوند.
اگر $۱ < p < ۰$ جهت نامساوی‌ها عکس می‌شوند و برای $p = ۱$ نامساوی هولدر به صورت زیر است

$$\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|\right) \sup_n |b_n|.$$

برهان. به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

لم ۱.۳.۴. اگر $(a_n), (b_n) \in l_p$ و $p \geq ۱$، آنگاه

$$\left(\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \leq \left(\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{۱}{p}} + \left(\sum_{n=۱}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{۱}{p}}.$$

برهان. به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

لم ۱.۳.۵. اگر $f, g \in L_p$ و $p \geq ۱$، آنگاه

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{۱}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{۱}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{۱}{p}}.$$

نامساوی‌های فوق، نامساوی‌های مینکوفسکی[۳] می‌باشند.
اگر $۱ < p < ۰$ جهت نامساوی‌ها عکس می‌شوند.

برهان. به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

[۱] Holder
[۲] Schwarz
[۳] Minkowski

لم ۱.۳.۶. *صورتی تعمیم یافته از نامساوی‌های مینکوفسکی را به ازای $p \geq 1$ به صورت زیر معرفی می‌کنیم.*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int f_n(x)dx\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p(x)\right)^{\frac{1}{p}} dx,$$

و

$$\left(\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int f_n^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

اگر $0 < p < 1$، جهت نامساوی‌ها عکس می‌شود.

برهان. به مرجع [7] مراجعه کنید. □

فصل ۲

فضاهای دنباله‌ای اویلر و هاسدورف

در این فصل برای هر $\infty \geq p \geq$ ۱، فضای دنباله‌ای اویلر e_p^r و فضای دنباله‌ای هاسدورف h_p را معرفی کرده و چند رابطه شمول در این فضاها مطرح می‌کنیم. بیشتر مطالب این فصل برگرفته از [۲] است.

۱.۲ معرفی فضاهای دنباله‌ای اویلر

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید ω فضای دنباله‌های حقیقی باشد، هر زیر فضای برداری از ω یک فضای دنباله‌ای نام دارد.

تعریف ۲.۱.۲. برای فضای دنباله‌ای λ، دامنه ماتریسی λ_A از ماتریس نامتناهی A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega \quad : \quad Ax \in \lambda\}.$$

تعریف ۳.۱.۲. فضای دنباله‌ای e_p^r برای $\infty \geq p \geq$ ۱ و ۱ $> r >$ ۰ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e_p^r = \left\{ (x_k) \in w : \quad \sum_{n=\circ}^{\infty} \left| \sum_{k=\circ}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\text{۱} - r)^{n-k} r^k x_k \right|^p < \infty \right\},$$

$$e_\infty^r = \left\{ (x_k) \in w : \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=\circ}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\text{۱} - r)^{n-k} r^k x_k \right| < \infty \right\}.$$

درایه‌های ماتریس اویلر[۱] $E^r = (e_{n,k}^r)$ عبارت است از

$$e_{n,k}^r = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\text{۱} - r)^{n-k} r^k & \circ \leq k \leq n, \\ \circ & k > n. \end{cases}$$

و

$$E^r = \begin{bmatrix} \text{۱} & \circ & \circ & \cdots & \\ \text{۱} - r & r & \circ & \cdots & \\ (\text{۱} - r)^{\text{۲}} & \text{۲}r(\text{۱} - r) & r^{\text{۲}} & \circ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}.$$

با توجه به تعریف دامنه‌ی ماتریسی برای $\text{۱} \leq p \leq \infty$ می‌توان گفت

$$e_p^r = (l_p)_{E^r} = \{x = (x_k) \in \omega \quad : \quad E^r x \in l_p\},$$

و

$$e_\infty^r = (l_\infty)_{E^r} = \{x = (x_k) \in \omega \quad : \quad E^r x \in l_\infty\}.$$

برای هر $x = (x_k) \in e_p^r$، دنباله‌ی $y = \{y_k(r)\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$y_k(r) = \sum_{j=\circ}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (\text{۱} - r)^{k-j} r^j x_j. \qquad (\text{۱.۲})$$

واضح است که $y = E^r x$.

تعریف ۴.۱.۲. برای هر $x \in e_p^r$، نرم آن به صورت زیرمعرفی می‌شود

$$\|x\|_{e_p^r} = \left(\sum_{n=\circ}^{\infty} \left| \sum_{k=\circ}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\text{۱} - r)^{n-k} r^k x_k \right|^p \right)^{\frac{\text{۱}}{p}} \qquad (\text{۱} \leq p < \infty),$$

---

[۱] Euler

و

$$\|x\|_{e^r_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right|.$$

بنابراین واضح است که برای $1 \leq p \leq \infty$، $\|x\|_{e^r_p} = \|E^r x\|_p$ برقرار است.

قضیه ۵.۱.۲. *فرض کنید $1 \leq p \leq \infty$. فضای e^r_p تحت جمع مؤلفه‌ای و ضرب اسکالری فضای برداری نرم‌دار است و با نرم $\|.\|_{e^r_p}$ فضای باناخ است.*

برهان. فرض کنید $1 \leq p < \infty$. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر $x, y \in e^r_p$، $x + y \in e^r_p$. این واضح است چون با استفاده از نامساوی مینکوفسکی داریم

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{e^r_p} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k (x_k + y_k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k y_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

بنابراین $\|x+y\|_{e^r_p} \leq \|x\|_{e^r_p} + \|y\|_{e^r_p}$.

برای هر $x \in e^r_p$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $\|\lambda x\|_{e^r_p} = |\lambda| \|x\|_{e^r_p} < \infty$، لذا $\lambda x \in e^r_p$. همچنین واضح است که برای هر $x \in e^r_p$، $\|x\|_{e^r_p} \geq 0$ و $\|x\|_{e^r_p} = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ باشد. بنابراین e^r_p فضای برداری نرم‌دار است. در ادامه نشان می‌دهیم که e^r_p فضای باناخ است. فرض کنید $\{x^n\}$ دنباله‌ای کشی در e^r_p باشد، یعنی

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \|x^n - x^m\|_{e^r_p} = 0,$$

با توجه به تعریف (۴.۱.۲)،

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \|E^r x^n - E^r x^m\|_p = 0.$$

این یعنی $\{E^r x^n\}$ دنباله‌ای کشی در فضای l_p است. چون l_p، باناخ می‌باشد، دنباله‌ای مانند $y \in l_p$ وجود داشته که $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|E^r x^n - y\|_p = 0$. اگر برای هر